



高等院校力学教材
Textbook in Mechanics for Higher Education

弹性力学

徐秉业 王建学 编著

Xu Bingye Wang Jianxue



清华大学出版社



Springer



高等院校力学教材
Textbook in Mechanics for Higher Education

弹性力学

徐秉业 王建学 编著

Xu Bingye Wang Jianxue



清华大学出版社
北京

 Springer

内 容 简 介

本书是一本供有关工程专业本科生使用的教材,着重介绍弹性力学的基础和这一学科领域中的成熟内容,主要特色是简明、易懂。在讲解问题时,特别注意与材料力学衔接,重点介绍平面问题中分析问题的思路,以及各种解题的思路和方法,同时还注意说明用弹性力学方法所得到的结果和用材料力学方法所得结果的差别。作为专门问题,本书介绍了应力集中、热应力和轴对称弹性薄板问题。同时也介绍了一些工程上常遇到的实际问题,并采用例题说明基本原理和处理问题的方法,便于读者理解。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/徐秉业,王建学编著. —北京:清华大学出版社,2007.7

(高等院校力学教材)

ISBN 978-7-302-13124-3

I. 弹… II. ①徐… ②王… III. 弹性力学—高等学校—教材 IV. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 055608 号

责任编辑:杨 倩

责任校对:焦丽丽

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社总机:010-62770175

投稿咨询:010-62772015

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

邮购热线:010-62786544

客户服务:010-62776969

印装者:北京市昌平环球印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:175×245 印 张:11

版 次:2007 年 7 月第 1 版

印 数:1~3000

定 价:19.50 元

字 数:217 千字

印 次:2007 年 7 月第 1 次印刷

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:010383-01

前 言

弹性力学是固体力学的一个重要分支,是分析解决许多工程技术问题的基础。所谓弹性,是指物体在外力或温度的作用下产生应力和应变,而当外力作用除去后,物体恢复到原来的状态。弹性力学的研究方法包括理论分析、数值计算和实验应力分析三个方面。为了建立弹性力学的基本方程需要由静力学、几何学和物理学三个方面来进行研究。在静力学方面,主要是建立物体的平衡条件,不仅物体所承受的外力是平衡力系,而且物体内部每点都要处于平衡状态。在几何学方面不仅要考虑刚体位移,而且要研究因变形而产生的位移,并建立起位移和应变之间的关系。由于物体是连续的,因而在变形时各相邻小单元都是相互联系的。通过研究位移和应变之间的关系,可以得到变形体的协调条件。在物理学方面要建立应力与应变之间的关系(这种关系又称本构关系)。在弹性力学中对物理关系的研究是一个十分重要的问题。本书将只涉及理想弹性体,因为许多材料在应力未超出某一极限值时,都具有这种性质,而且应力与应变之间的关系是线性的,分析起来比较简单。

物体的宏观力学性质,通常是用单向拉伸试验的应力-应变曲线来确定的。对于线弹性体,应力与应变成正比,而且应力与应变具有一一对应的关系。以广义胡克定律为基础的线弹性力学已发展得比较完善,建立了严格的数学体系。在平面问题中,应力分量是三个,应变分量也是三个,位移分量是两个,因此,应该有八个方程式将这八个未知量联系起来。由分析中得出,联系这些未知量的方程有的是偏微分方程式,有的是代数方程式,一般来说,求解八个偏微分方程组将是很困难的。但是,如果能将应力用某一应力函数表示出来,则应变可由应力求出,而位移又可由应变求出。从这里看出,在这类问题中只要找到了相应的应力函数并使所得到的解满足边界条件,

便找到了问题的解。本书将在推导弹性力学基本方程的基础上,重点介绍应力函数的意义和它的推导方法。由于线弹性物理关系数学表达式比较简单,许多问题都能找到准确的解析解。前苏联的力学家穆斯赫里什维利采用复变函数方法对弹性力学中的平面问题进行了系统的研究,给出了许多有意义的结果。应力集中是指物体中应力局部增高的现象,一般出现在物体形状急剧变化的地方,如缺口、孔洞、沟槽以及有刚性约束处。在应力集中处,应力的最大值与物体的几何形状和加载方式有关。近年来计算机技术和有限元方法以及边界元方法的迅速发展,为寻找应力集中的数值解开辟了新途径。热应力主要研究物体因受热引起的非均匀温度场在弹性范围内产生的应力和应变问题。它在弹性力学的基础上考虑温度的影响,在应力-应变关系中增加一项由于温度变化引起的应变。物体受热时,物体的各部分将因温度升高而向外膨胀。若物体每一部分都能自由膨胀,虽有应变也不出现应力。若物体每一部分不能自由膨胀,各部分之间会因相互制约而产生应力。这种应力称为温度应力或热应力。线弹性力学中的平面问题、柱体扭转、接触问题、应力集中问题和热应力问题等在许多实际工程问题中都获得了广泛的应用,因此这一学科分支发展得较为成熟。

当物体中的某一应力或应力的某一组合超出材料的弹性极限之后,则需要用非线性的塑性本构关系对问题进行研究。严格说来,所有物体都具有变形与时间有关的流变性质,例如某些聚合物、生物材料、岩土材料以及处于高速变形状态下的金属材料都具有明显的流变特性。这时需要用粘弹性力学或粘塑性力学对这类问题进行研究。当物体受到突加外载荷的扰动,其将在平衡位置附近做往复的周期性或非周期性的运动,这种现象称为弹性动力响应。当弹性材料某一局部受到突加冲击载荷作用后,将产生应力与应变的传播、反射以及相互作用的波动现象。这时应采用应力波理论进行研究。弹性动力学和应力波理论在防护工程、地震工程、宇航工程、穿甲力学、高速成形、地质探矿、爆炸工程等领域都有重要的应用。

随着电子计算机的出现而发展起来的有限单元法,对弹性力学的发展创造了有利的条件。它不受物体几何形状的限制,对于各种复杂的物理关系都能根据具体问题算出所期待的结果。为了提高计算精度,近年来还发展了许多行之有效的计算方法。

在解决实际问题时,采用解析分析方法往往遇到许多数学上的困难,而利用数值计算方法又需要编制复杂的计算程序,工作量和计算费用都是很大的,而且还必须建立在正确的物理关系基础上才能获得合理的结果。

目前常用的实验应力分析方法可以克服理论分析和数值计算中所遇到的困难。这一方法也不受物体几何形状和复杂物理关系的限制,一般都可获得实验结果。这些结果可用来检验理论分析的正确性以及简化的合理性,因此实验是发展和研究弹性力学必不可少的手段,对于解决工程实际问题有十分重要的意义。但是,实验应力

分析方法一般很难测出物体内部应力和应变的分布规律,测量精度也需要不断提高,而且在缺少理论分析只有实验结果时,很难判断实验的正确性和可靠性。所以弹性力学的发展,需要将理论研究、数值计算和实验应力分析三者结合起来。

弹性力学课程已被许多工程专业选为必修课程或选修课程。目前这门课程的教材已出版了多种版本,但内容普遍偏多。本书是一本内容简明、适合一般工程专业本科生使用的教材,着重介绍弹性力学的基础和这一学科领域中成熟的内容。在讲解问题时,特别注意与材料力学衔接,首先介绍平面问题,重点介绍平面问题中分析问题的思路,以及各种解题思路和方法,特别是半逆解法和应力函数的物理意义。这里还注意说明用弹性力学方法所得到的结果和用材料力学方法所得结果的差别。在此基础上,将问题推广到三维问题中去。作为专门问题,本书介绍了应力集中、热应力和轴对称弹性薄板问题。因为这三个问题不仅是工程上经常遇到的问题,也是弹性力学中相对比较成熟并便于初学者掌握的内容。对于热应力和应力集中问题,在给出解题方法的基础上,介绍了一些工程上常遇到的实际问题,从而将课程内容与实际问题的相联系,有利于培养学员分析问题和解决问题的能力。弹性圆板是工程弹性力学中的一个常见内容,这部分内容概念清晰,公式简单。本书介绍弹性力学的基本问题时深入浅出,并采用例题说明基本原理和处理问题的方法,便于读者理解。本书主要特色是简明、易懂。

在学习本书时要注意掌握基本概念,学会公式推导,同时还应该注意掌握分析问题的方法,因此应该学习书中例题解题的思路,并做相当数量的习题。为了取得良好的教学效果和便于学员自学,与本书配套出版的还有《弹性力学习题解答》。

清华大学出版社杨倩同志对本书进行了认真的审校,提出了许多很好的建议,从而提高了本书的出版质量,在此谨向她表示诚挚的谢意!我们期待这本教材能在有关工程专业的教学中发挥应有的良好作用。

徐秉业 王建学

2005年1月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 弹性力学发展史	1
1.2 弹性力学的作用和任务	2
1.3 弹性力学的基本假设	4
1.4 载荷分类	5
1.5 标记和符号	6
1.6 平面问题和空间问题	8
1.7 圣维南原理	9
1.8 逆解法和半逆解法	10
习题	11
第 2 章 平面问题	12
2.1 平衡方程	12
2.2 平面问题的几何关系	15
2.3 平面问题的物理关系	16
2.4 用应力表示的协调方程	18
2.5 应力函数	20
习题	21
第 3 章 直角坐标平面问题的求解	24
3.1 多项式形式的应力函数	24

3.2 在端部受外力作用悬臂梁的弯曲问题	27
3.3 受均布载荷作用的矩形简支梁的弯曲问题	31
3.4 具有三角形截面的水坝的计算	38
习题	40
第 4 章 极坐标中的平面问题	43
4.1 极坐标中的基本方程	43
4.2 曲梁的纯弯曲问题	48
4.3 厚壁筒问题	49
4.4 受集中力作用的楔体问题	52
4.5 受集中力作用的半平面问题	53
习题	55
第 5 章 空间问题	58
5.1 三维应力状态分析	58
5.2 平衡微分方程	62
5.3 一点的应变状态几何方程	65
5.4 三维应力状态下的主应变和体应变	68
5.5 物理方程	71
5.6 按位移、应力求解空间问题	73
习题	78
第 6 章 空间问题的求解举例	81
6.1 受集中力作用的半空间问题	81
6.2 半弹性空间的一些特殊加载情况	84
6.3 圆形截面柱体的扭转	86
6.4 非圆截面柱体的扭转问题	90
6.5 薄膜比拟	97
习题	101
第 7 章 应力集中问题	104
7.1 带小圆孔圆板在拉伸时的应力集中	104
7.2 带小圆孔板受纯剪应力作用时的应力集中	112
7.3 降低应力集中系数的方法	114

习题	116
第 8 章 热应力问题	118
8.1 热应力的概念	118
8.2 热应力中的简单问题和平板问题	120
8.3 厚壁圆筒和厚壁球壳容器中的热应力	125
习题	130
第 9 章 弹性薄板问题	133
9.1 薄板理论中的一般知识	133
9.2 薄板中应力基本公式和内力	134
9.3 弹性薄板问题求解法的分类	143
9.4 轴对称圆板问题的举例	152
习题	161
参考文献	164



第 1 章

绪 论

1.1 弹性力学发展史

弹性力学是固体力学的一个重要分支,它是研究弹性固体在外力作用下物体产生变形和内力规律的学科。这里所谓弹性是指物体的应力与应变之间有单值的函数关系,即应力与应变有一一对应的关系。当除去外力后,物体完全恢复到初始形状,因为所研究的是线性问题,所以有时又称线弹性力学。

早期主要是通过实验研究来寻找弹性力学的基本规律。英国的胡克(R. Hooke)早在 1660 年便在实验中发现了螺旋弹簧伸长量和所受拉力成正比的定律,后被称为胡克定律。到 19 世纪 20 年代,法国的纳维(C. L. M. H. Navier)和柯西(A. L. Cauchy)在当时数学飞跃发展的基础上建立了弹性力学的数学理论。纳维于 1827 年首次导出了弹性固体的平衡运动方程。柯西在一系列论文中明确地提出了应变、应变分量、应力和应力分量的概念,建立了弹性力学的几何方程、各向同性以及各向异性材料的广义胡克定律。在此以后,法国的圣维南(A. J. C. B. de Saint Venant)发表了许多理论结果和实验结果,证明了弹性力学的正确性。这一时期弹性力学广泛应用于工程实际,在理论上建立了许多重要定理和原理,同时也发展了许多有效的计算方法。1881 年德国的赫兹(H. R. Hertz)求解了两弹性体局部接触时弹性体内应力分布的规律。1898 年德国的基尔施(G. Kirsch)发现了应力集中现象,这些结果解释了以往无法解释的现象,在提高设计水平方面起到了重要作用,因而弹

性力学受到了工程技术人员的重视。此后,弹性力学的一般理论也有了许多重要发展,其中包括各种能量原理的建立,以及许多近似有效方法的提出,其中前苏联的穆斯赫里什维利(Н. И. Мушхелъшвили)将复变函数理论引入弹性力学,从而使弹性力学中的平面问题都可以借助复变函数求解。目前又出现了许多弹性力学的边缘分支,如非线性弹性力学、各向异性和非均匀的弹性理论、热弹性理论、磁弹性力学、应力集中理论和弹性接触理论等。

1.2 弹性力学的作用和任务

在近代工业的发展过程中,对于各种结构与机械零件在外力作用下的变形要进行分析,而大多数材料在小变形的情况下都可以近似地看作线弹性体,所以弹性力学的发展与工程上的需要有着密切的联系。各种工程需要使弹性力学得到了不断的发展,结构和构件尺寸的选择和确定对弹性力学的发展也起到了重要的促进作用。结构和构件尺寸的选择和确定是与保证该承重构件的安全及持久性密不可分的,确定结构内力和选择结构尺寸的学科称为材料力学。这门学科涉及以下几方面的问题:

(1) 保证结构和构件具有相应的强度。例如有一个悬索桥,承受重量的悬索如图 1-1 所示,首先要保证悬索具有足够的受拉强度。

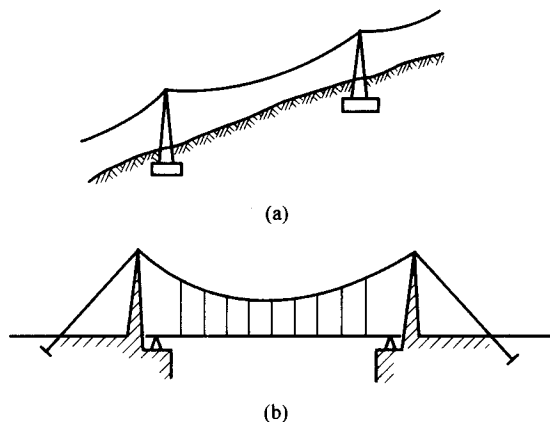


图 1-1

(2) 保证结构和构件满足相应变形的要求。例如悬索桥承受重量的悬索除满足强度要求外,同时还要满足变形的要求,因为若变形太大,则该悬索桥便无法使用。

(3) 保证结构和构件的设计安全可靠,且经济上又是合理优化的。这里要求找出一个既满足规范安全的有关规定,同时也满足经济设计原则。

(4) 保证结构和构件满足美学的要求,使得所设计的结构和构件美观和谐。

材料强度科学近年来发展很快,特别是在理论方面不断取得新成果。实验力学的发展也促进了这一学科的发展,因为许多结果都验证了理论分析的正确性。当设计新型结构或设备时,弹性力学和强度科学更具有明显的意义。

有些问题由于材料复杂的形状和性质,往往难于找到理论解,这时便需要借助模型试验找到有关信息和数据。模型试验还可以验证理论结果的正确性。材料力学主要研究杆或梁在外力作用下的拉、压、弯、扭问题。研究材料力学中进一步复杂的问题需要略去许多简化假设,这时便要用到弹性力学。例如在研究梁的弯曲问题时,在材料力学中采用了平截面假设,这时截面上的正应力沿梁的高度线性变化,而在弹性力学中则不需要这样的假设。通过弹性力学的研究,可以确定在什么情况下平面假设能给出合理的结果。研究证明,当截面尺寸与梁的长度相比足够小时,即当 $h \leq (1/4 \sim 1/5)l$ 时,平面假设才是正确的。如果截面的尺寸与梁的长度具有相同的量级,则平面假设将导致错误的结果。此外,还有许多问题用材料力学的知识无法求解,在此情况下,只能用弹性力学去求解。例如:

(1) 具有圆孔的受拉平板,如图 1-2 所示,因为此时在孔的周围有应力集中。

(2) 受集中力作用的楔体和半空间问题,如图 1-3 和图 1-4 所示。

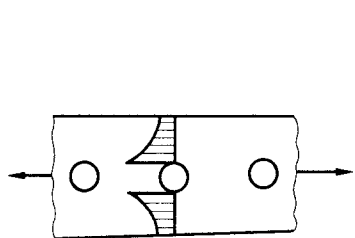


图 1-2

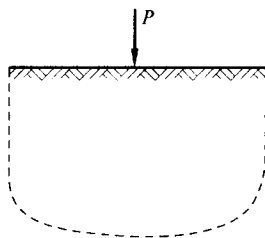


图 1-3

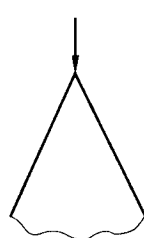


图 1-4

(3) 受集中力作用的弹性薄板,如图 1-5 所示。

(4) 受水压力作用的水坝,如图 1-6 所示。

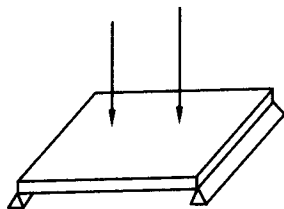


图 1-5

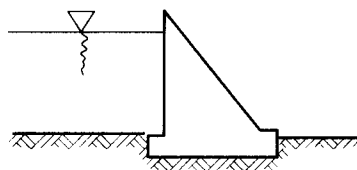


图 1-6

1.3 弹性力学的基本假设

在弹性力学中,为了能通过已知量(如物体的几何形状和尺寸、物体所受的外力或几何约束)求出应力、应变和位移等未知量,首先要从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发,建立这些未知量所满足的弹性力学基本方程和相应的边界条件。因此,通常必须按照所研究物体的性质,以及求解问题的范围,略去一些影响较小的次要因素,使方程的求解成为可能。本书中对物体的材料性质采用以下六条基本假设:

1. 连续性假设

假设物体是连续的,即假定组成物体的质点之间不存在任何空隙。这样,物体内的一些物理量,如应力、应变和位移才可能是连续的,因而才可能用坐标的连续函数来表示它们。实际上,一切物体都是由微粒组成的,严格来说,都不符合上述假定。但可以想象,当微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离比物体的几何尺寸小很多时,运用这个假设不会引起显著的误差。

2. 均匀性假设

假设物体是均匀的,即整个物体所有各部分的物理性质(如弹性)都是相同的,不随着坐标位置的改变而发生变化。根据这个假设,在处理问题时可取出物体内任一部分进行分析,然后将分析结果用于整个物体。如果物体是由两种以上材料组成的,例如混凝土,则只要每种材料的颗粒远远小于物体的几何尺寸,且在物体内部均匀分布,整个物体就可以认为是均匀的。

3. 各向同性假设

假设物体是各向同性的,即物体在不同方向上具有相同的物理性质,因而物体的弹性常数不随坐标方向的改变而改变。显然,用木材和竹材做成的构件都不能当作各向同性体。至于钢材做成的构件,虽然由无数个各向异性的晶体组成,但由于晶体很微小,而且是随机排列的,所以可以认为钢材从宏观意义上说是各向同性的。

4. 完全线弹性假设

物体在任一瞬时的形变完全取决于它在这一瞬时所受的外力,与过去的受力无关。在一般的弹性力学中,完全弹性这一假设,还包含变形与载荷成正比的涵义,亦即两者之间是成线性关系的,它的数学表达式为 $\sigma = E\epsilon$ 。这种线性的完全弹性体中应力-应变关系服从胡克定律,其弹性常数不随应力或应变的大小而变。

5. 小变形假设

假设物体受力以后,整个物体所有各点的变形都远小于物体原来的尺寸。这样可以使问题大为简化,例如,在研究物体的平衡时,可不考虑由于变形引起的物体尺寸和位置的变化;在建立几何方程和物理方程时,可以略去应变、转角的二次幂或二次乘积以上的项,使所得到的关系式都是线性的。

6. 无初始应力假设

假设物体处于自然状态,即在加载前和卸载后物体内部是没有应力的。因此,弹性力学中求得的应力仅仅是由于载荷的变化所引起的。

1.4 载荷分类

凡能导致物体变形的物理因素都称为载荷。根据性质不同载荷可分为两大类。第一类载荷,例如重力、机械力和电磁力等,可以简化为作用在物体上的外力,由外力再引起物体的变形和内力。第二类载荷,例如温度等物理因素,可直接引起物体变形,但仅当这种变形受到约束时,物体才产生内力。

根据作用域的不同,外力可以分为体积力和表面力。

体积力是作用在物体内部体积上的力,简称体力。例如重力、惯性力、电磁力等。物体内部各点受力的情况,一般是不同的。为了表明该物体在某一点 P 所受体力的大小和方向,在这一点取物体的一小部分,它包含着 P 点而体积为 ΔV ,如图 1-7(a)。设作用于 ΔV 的体力为 Δf ,则体力矢量为

$$f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta V}$$

(1.1)

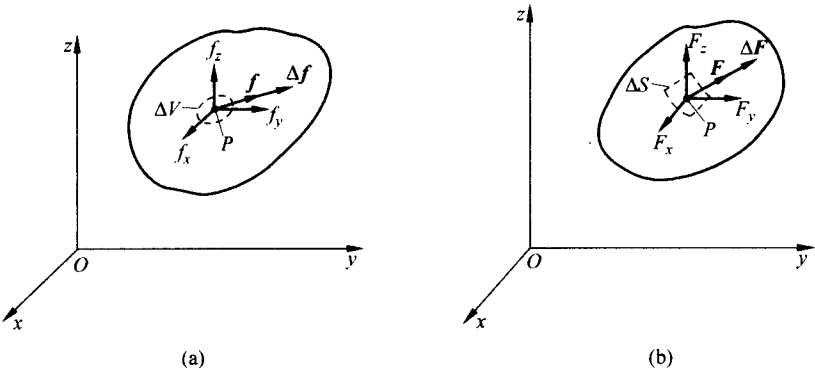


图 1-7

因为 ΔV 为标量, 所以 f 的方向就是 Δf 的方向。矢量 f 在坐标轴 x, y, z 上的投影 f_x, f_y, f_z 称为该物体在 P 点的体力分量, 以沿坐标轴正方向为正, 沿坐标轴负方向为负。一般说 f 是空间点位的函数。

表面力是作用在物体表面上的外力, 简称面力。例如液体或气体在容器内的压力、固体间的接触力等。为了表明该物体在某一点 P 所受面力的大小和方向, 在这一点取物体的一小部分, 它包含着 P 点而面积为 ΔS , 如图 1-7(b) 所示。设作用于 ΔS 的面力为 ΔF , 则面力矢量为

$$\mathbf{F} \triangleq \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} \quad (1.2)$$

因为 ΔS 为标量, 所以 $\mathbf{F}$ 的方向就是 $\Delta \mathbf{F}$ 的方向。矢量 $\mathbf{F}$ 在坐标轴 x, y, z 上的投影 F_x, F_y, F_z 称为该物体在 P 点的面力分量, 以沿坐标轴正方向为正, 沿坐标轴负方向为负。一般说 $\mathbf{F}$ 是物体上表面位置的函数。

在材料力学中经常把高度集中的表面载荷简化为集中力。在弹性力学中往往将集中力变成作用在局部表面上的表面力来处理。

1.5 标记和符号

假设有一弹性体(如图 1-8 所示)受外力的作用, 在这些外力的作用下, 在物体上的某一点(坐标为 x, y, z)将产生应力。在一般情况下, 由于坐标位置的改变, 应力也

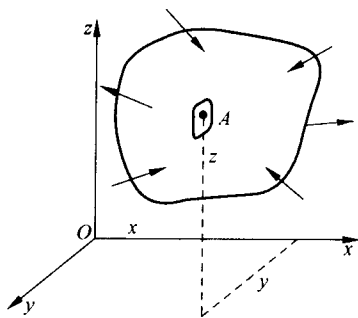


图 1-8

随之改变, 因此在所研究的物体中, 应力是坐标 x, y, z 的函数。这时在物体的表面上, 内力应该和外载荷平衡, 且认为问题满足边界条件。

假设将弹性体分割成无穷多的小单元体, 在变形前和变形后每一小单元体都要和相邻的单元体相互连接相互适应。除要满足静力平衡条件外, 几何位移条件也需要满足。如果将大量的单元体用有关条件连接起来, 则所给出的将是高阶超静定问题, 一般用解析方法是很难找出解答的。因此需要找出另一个能解决这类问题的方法。

这个方法就是选择一个单元体并用微分方程的形式给出该单元的平衡条件和协调条件, 这时这些条件对每个单元体都是正确的, 然后找出一个函数使该函数既满足以上各种条件又满足问题的边界条件。

在结构力学中一般选用两种方法来求解超静定问题, 即力法和位移法。在弹性力学中具有相似的情况, 即可用力法或位移法求解问题。在力法中, 首先找出应力,

然后再找出应变和位移;在位移法中,首先找出位移,然后再找出应变和应力。

有许多方法表示应力和应变,本书以 σ 表示正应力,而用 τ 表示剪应力。

取一小单元体,如图 1-9 所示,来区分作用于单元体各边上的正应力和剪应力。在正应力 σ 的下标处所写的符号表示应力作用于垂直该轴的平面上并平行于该轴。而在剪应力 τ 的下标中,第一个符号表示剪应力作用于垂直该轴的平面上,第二个符号表示与此剪应力平行的方向。对于正应力正负号的规定为:拉应力为正,压应力为负。剪应力的正负号规定分为两种情况:当其所在的外法线与坐标轴的正方向一致时,则以沿坐标轴正方向的剪应力为正,反之为负。当所在外法线与坐标轴的负方向一致时,则以沿坐标轴的负方向的剪应力为正,反之为负。在图 1-9 上的正应力和剪应力按此约定皆为正方向。由图上可见,在单元体各面上共有九个应力分量,其中三个是正应力分量,六个是剪应力分量,即 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$, 九个应力分量确定一点的应力状态。

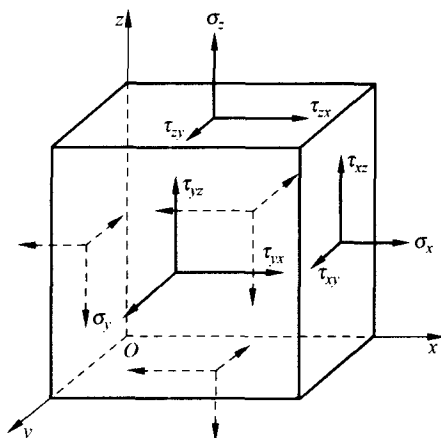


图 1-9

应变与物体的伸长和缩短相联系,并用 ϵ 表示,如图 1-10(a)所示。 ϵ 的下标表示

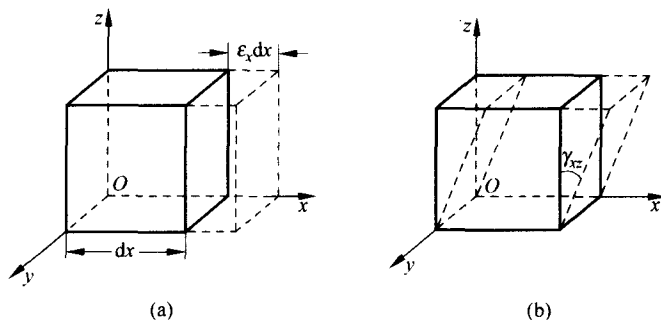


图 1-10

应变与哪一个方向平行。形状变形的角度与单元体的畸变有关,并用有两个下标的 γ 表示,这两个下标表示与畸变面平行的坐标平面,如图1-10(b)所示。应变状态由9个应变分量所确定,其中只有6个是独立的,即 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 。使单元体伸长的正应变为正,在第一象限中,使单元体对角线拉长的剪应变为正。

单元体中任一点平行于 x, y, z 轴的位移分别用 u, v, w 表示,如图1-11所示。

对于弹性体,取如下比例系数:

弹性模量 E

剪切模量 G

泊松比 μ

体积变形模量 K

以上比例系数有如下关系式

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

在各向同性弹性体中有两个弹性常数。

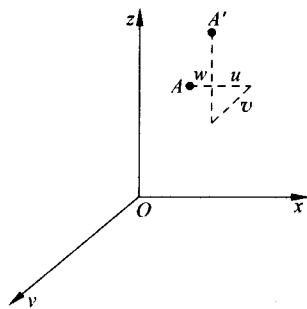


图 1-11

1.6 平面问题和空间问题

许多弹性力学的空间问题都可以化为平面问题来研究,这里一般可分为两种情况,即平面应力问题和平面应变问题。

当有一薄板其厚度很薄,而且外载荷沿厚度方向均匀作用在平面内,如图1-12所示。由于厚度很薄,因此认为 $\sigma_z = 0$,但 $\epsilon_z \neq 0$ 。

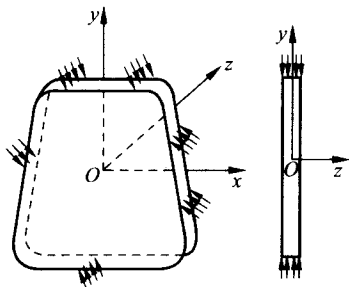


图 1-12

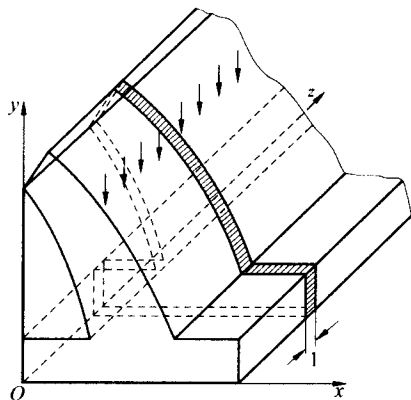


图 1-13