全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题

数学一

SHUXUE JICHU GUOGUAN 660 TI (SHUXUEYI)

主编　李永乐

★ 完全按照新大纲编著

★ 权威解析精选试题

★ 全面评注各类题型

2008

新华出版社

全国十二大考研辅导机构指定用书

013-44
137=2
:2008(1)
2007

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题

数学一

SHUXUE JICHU GUOGUAN 660 TI (SHUXUEYI)

主编　李永乐

编者：(按姓氏笔画)

清华大学　刘庆华
北京大学　刘西垣
北京大学　李正元
清华大学　李永乐
北京交通大学　赵达夫
东北财经大学　龚兆仁

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据
数学基础过关660题.数学一/李永乐主编
北京:新华出版社,2007.2
2007年全国硕士研究生入学考试用书
ISBN 978－7－5011－7842－1

Ⅰ.数...　Ⅱ.李...　Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－习题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第164271号

敬告读者

本书封面粘有策划者专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

数学基础过关660题(数学一)

主　　编:李永乐
策　　划:白云覃
责任编辑:孙红霞
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:新华出版社
地　　址:北京石景山区京原路8号
邮　　编:100043
经　　销:新华书店
印　　刷:北京云浩印刷有限责任公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:21.5
字　　数:490千字
版　　次:2007年2月第1版
印　　次:2007年2月第1次印刷
书　　号:ISBN 978－7－5011－7842－1
定　　价:30.00元

若有印装质量问题,请与印厂联系(010)82570560

前 言

07年考研数学试卷的结构又发生了变化，增加了选择题，减少了解答题。目前选择题10个，填空题6个，共16个题64分，占了数学总分的42.6%。

需要提醒广大考生的是：对于往届考生的失误要引以为戒，一定要重视选择题、填空题的复习。例如，从教育部考试中心公布的统计结果来看：06年数学一选择题难度系数0.524，填空题难度系数0.538。在选择题与填空题上正确率仅二分之一强，是不是丢分丢的有点太多了？

本次再版在题目选编上有较大的变动。一是增加了选择题的数量；二是对解答与评注进行了修订，以适应各种水平同学的需求。希望本书的修订再版能对同学们的复习备考有更大的帮助。对本书不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编 者

2007年2月

目　录

第一部分　选择题

第二部分　填空题

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com

第一部分　选择题

高等数学

线 性 代 数

概率论与数理统计

◇◇ 高等数学 ◇◇

1. 设 $x_n \leqslant a \leqslant y_n$，但$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ 则$\{x_n\}$ 与$\{y_n\}$

(A) 都收敛于 a.　　(B) 都收敛，但不一定收敛于 a.

(C) 可能收敛，也可能发散.　　(D) 都发散.　　[　　]

【答案】 (A)

【分析】 由 $x_n \leqslant a \leqslant y_n$，得

$$0 \leqslant a - x_n \leqslant y_n - x_n.$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ 以及夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}(a - x_n) = 0.$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 由此得$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

所以选(A).

2. 设 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} z_n$

(A) 存在且等于零.　　(B) 存在但不一定等于零.

(C) 不一定存在.　　(D) 一定不存在.　　[　　]

【答案】 (C)

【分析】 由 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \Rightarrow 0 \leqslant z_n - x_n \leqslant y_n - x_n$.

又因$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(z_n - x_n) = 0$. 但不保证 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ 存在. 例如，

取 $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$，$y_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$，

$$z_n = (-1)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)，此时有，x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$，但当 $n \to \infty$ 时，z_n 的极限不存在，因此选(C).

【评注】 (1) 要注意夹逼定理的条件，当 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ 时，才有$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ 不一定有$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，当$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$(或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$) 存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$，才能有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则下列命题中不正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=+\infty$.　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)h(x))=\infty$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+h(x))=+\infty$.　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=+\infty$.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析 1】 易知,两个正无穷大量之和与之积均是正无穷大量,即(A)、(D) 正确. 又正无穷大量与有界量之和仍为正无穷大量,即(C) 也正确.

因此,(B) 不正确. 选(B).

【分析 2】 我们知道,当 $A=0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)h(x))$ 是未定式(无穷大量与无穷小量之积). 因此(B) 不正确.

【评注】 当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A\neq 0$ 时 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)h(x))=\infty$.

4. 下列极限正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$,因此选(B)

而 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\pi}{\pi}=0$,又$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$,$\sin x$ 是有界量,

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

【评注】 在重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 中,要注意极限过程是 $x\to 0$.

5. 下列叙述正确的是

(A) 如果 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内无界,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

(B) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内无界.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

(D) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析 1】 因为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,所以,对于任意 $M>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<$

δ 时，$|f(x)|>M$ 由此可得 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内无界，因此选(B).

【分析2】 举反例说明(A)、(C)、(D)均不成立．设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，令 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，

$y_n=\frac{1}{n\pi}$，则 $x_n\to 0,y_n\to 0\quad(n\to+\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}f(y_n)=0$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 邻域无界，但 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 不是无穷大量．也说明 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不 ∃．

此例说明(A)，(C) 不正确．

若令 $f(x)=0$（常数函数），则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，但 $\frac{1}{f(x)}$ 无定义，故(D) 不正确．

因此选(B)

【评注】 1° $f(x)=\begin{cases}x & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$，

则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，但 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $x=0$ 的任一邻域的无理点均无定义．

2° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

6. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}$，则当 $x\to 2$ 时有

(A) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.　　(B) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$.

(C) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$.　　(D) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在，且 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq\infty$.　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)e^{\frac{1}{x-2}}=+\infty$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+2)e^{\frac{1}{x-2}}=0$$

所以选(D).

【评注】 注意 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，因而 $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在.

7. 设 $x\to 0$ 时 $ax^2+bx+c-\cos x$ 是比 x^2 高阶无穷小，其中 a,b,c 为常数，则

(A) $a=\frac{1}{2},b=0,c=1$.　　(B) $a=-\frac{1}{2},b=0,c=0$.

(C) $a=-\frac{1}{2},b=0,c=1$.　　(D) $a=\frac{1}{2},b=0,c=0$.　[　　]

【答案】 (C)

【分析】 由题意得

$$\lim_{x\to 0}(ax^2+bx+c-\cos x)=0$$

得 $c=1$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+c-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=0$$

所以 $b=0, a=-\dfrac{1}{2}$. 因此选(C)

【评注】 上述结论利用当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,以及极限的四则运算法则.

8. 设 $x\to 0$ 时 $(1+\sin x)^x-1$ 是比 $x\tan x^n$ 低阶的无穷小,而 $x\tan x^n$ 是比 $(e^{\sin^2 x}-1)\ln(1+x^2)$ 低阶的无穷小,则正整数 n 等于

(A)1. (B)2.

(C)3. (D)4. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 当 $x\to 0$ 时,$(1+\sin x)^x-1\sim\ln[(1+\sin x)^x-1+1]$
$=x\ln(1+\sin x)\sim x\sin x\sim x^2$, $(e^{\sin^2 x}-1)\ln(1+x^2)\sim\sin^2 x\cdot x^2\sim x^4$

而

$$x\tan x^n\sim x\cdot x^n=x^{n+1}$$

因此

$$2<n+1<4$$

$\Rightarrow$ 正整数 $n=2$. 所以选(B).

9. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不 ∃, $\lim\limits_{x\to a}h(x)$ 不 ∃,则下列结论中正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)$ 不 ∃. (B) $\lim\limits_{x\to a}(g(x)+h(x))$ 不 ∃.

(C) $\lim\limits_{x\to a}(h(x)\cdot g(x))$ 不 ∃. (D) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x-a}\sin\dfrac{1}{x-a}+f(x)\right)$ 不 ∃. [ ]

【答案】 (D)

【分析 1】 按题设,易知 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ 不 ∃.(否则,若 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ ∃,则 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}[(f(x)+g(x))-f(x)]$ ∃,矛盾).(D) 中 $g(x)=\dfrac{1}{x-a}\sin\dfrac{1}{x-a}$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不 ∃ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x-a}\sin\dfrac{1}{x-a}+f(x)\right)$ 不 ∃.

选(D).

【分析 2】 举反例说明(A),(B),(C) 均错,例如.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

$$g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}, h(x)=\begin{cases}-1, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$$

则$\lim\limits_{x\to0}g(x)$，$\lim\limits_{x\to0}h(x)$ 均不 ∃，但

$$\lim_{x\to0}(g(x)+h(x))=0, \lim_{x\to0}(g(x)\cdot h(x))=-1.$$

故(B)，(C) 不正确.

若取 $f(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=0$，故(A) 也不正确. 选(D)

【评注】 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不 ∃，则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 不 ∃，当 $A\neq0$ 时，又有$\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$ 不 ∃. 当 $A=0$ 时，$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$ 可能 ∃，也可能不 ∃.

10. 若$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x^2+x^2f(x)}{x^6}\right)=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3+f(x)}{x^4}$ 为

(A)0. (B)3.

(C) $\dfrac{9}{2}$. (D)∞. [ ]

【答案】 (C)

【分析 1】 因为

$$\frac{3+f(x)}{x^4}=\frac{3x^2+x^2f(x)}{x^6}=\frac{3x^2-\sin3x^2+\sin3x^2+x^2f(x)}{x^6}$$

又 $$\lim_{x\to0}\frac{3x^2-\sin3x^2}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{6x-6x\cos3x^2}{6x^5}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(3x^2)^2}{x^4}=\frac{9}{2}$$

所以 $$\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^4}=\frac{9}{2}+0=\frac{9}{2}.$$ 选(C)

【分析 2】 对 $\sin3x^2$ 用泰勒公式. 由

$$\sin t=t-\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)(t\to0)$$

令 $t=3x^2$ 得

$$\sin3x^2=3x^2-\frac{1}{6}(3x^2)^3+o(x^6)(x\to0)=3x^2-\frac{9}{2}x^6+o(x^6)$$

于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x^2+x^2f(x)}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2-\frac{9}{2}x^6+x^2f(x)+o(x^6)}{x^6}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^4}-\frac{9}{2}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^6)}{x^6}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^4}=\frac{9}{2}$$ 选(C)

11. 已知 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx-\ln(1-2x+x^2)}{x^2}=5$,则

(A)$a=-4,b=2$.　　　　(B)$a=4,b=-2$.

(C)$a=3,b=-2$.　　　　(D)$a=-3,b=2$.　　　　[　　]

【答案】 (B)

【分析 1】 用泰勒公式.

$$\ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\quad(t\to 0)$$

令 $t=-2x+x^2$,则 $t^2=(-2x+x^2)^2=4x^2+o(x^2)\quad(x\to 0),o(t^2)=o(x^2)$,于是

$$\begin{aligned}\ln(1-2x+x^2)&=-2x+x^2-\frac{1}{2}\cdot 4x^2+o(x^2)\\&=-2x-x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

分子 $=(a+1)x^2+(b+2)x+o(x^2)$

因此,

$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+1)x^2+(b+2)x+o(x^2)}{x^2}=5$

$\Rightarrow b+2=0$　即 $b=-2$　(否则 $I=\infty$)

$\Rightarrow a+1=5,a=4$.

选(B).

【分析 2】 由题设知

$$a=I_1+5,$$

其中　$I_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+x^2)-bx}{x^2}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-2+2x}{1-2x+x^2}-b}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2+2x-b(1-2x+x^2)}{2x(1-2x+x^2)}$

分子极限为 $-2-b$,必须有 $-b-2=0$,

即 $b=-2$(否则 $I_1=\infty\Rightarrow I=\infty$)

于是

$I_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-2+2(1-2x+x^2)}{2x(1-2x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-4x+2x^2}{2x}$

$=-1$

因此

$a=5-1=4$.

选(B).

12. $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=$

(A)0.　　　　(B)$-\dfrac{1}{6}$.

(C) $-\frac{1}{8}$.　　(D) $-\frac{1}{12}$.　　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 用泰勒公式求这个极限

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

相减得

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

因此

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$ 选(D)

【评注】 求$\frac{0}{0}$型极限常可用洛必达法则或泰勒公式，若需多次用洛必达法则，导致求导计算不方便，而又容易由间接法求得分子、分母的泰勒公式时，应该用泰勒公式求这类$\frac{0}{0}$型极限.

13. 设 $x \to a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是 $x-a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小，则下列命题

① $f(x)g(x)$ 是 $x-a$ 的 $n+m$ 阶无穷小.

② 若 $n > m$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $x-a$ 的 $n-m$ 阶无穷小.

③ 若 $n \leqslant m$，则 $f(x)+g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

中，正确的个数是

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)0.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 此类问题要逐一分析，按无穷小阶的定义：

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = A \neq 0(\exists), \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = B \neq 0(\exists)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x)}{(x-a)^{n+m}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = A \cdot B \neq 0(\exists)$$

$\Rightarrow f(x)g(x)$ 是$(x-a)$ 的 $n+m$ 阶无穷小；

又，若 $n > m$，

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \bigg/ (x-a)^{n-m} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \bigg/ \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = \frac{A}{B} \neq 0(\exists)$$

$\Rightarrow f(x) \big/ g(x)$ 是$(x-a)$ 的 $n-m$ 阶无穷小；

因此 ①,② 正确,但 ③ 不正确. 例如,$x\to0$ 时,$\sin x$ 与 $-x$ 均是 x 的一阶无穷小,但

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

即,$\sin x+(-x)$ 是 x 的 3 阶无穷小,

因此选(B).

【评注】 设 $x\to a$ 时 $f(x),g(x)$ 分别是 $x-a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小,$n<m\Rightarrow f(x)+g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

因为

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(x-a)^m}(x-a)^{m-n}$$

$$=A+B\cdot0=A\neq0(\exists)$$

若 $n=m\Rightarrow f(x)+g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶或高于 n 阶的无穷小.

14. 下列各题计算过程中正确无误的是

A. 数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)'}{n'}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

B. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\pi\cos\pi x}{6x-2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\pi^2\sin\pi x}{6}=0$.

C. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在.

D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\infty$. [　　]

【答案】 (D)

【分析 1】 (A) 是错的. 因为 n 是正整数,对数列没有导数概念,不能直接用洛必达法则.

(B) 是错的. 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\pi\cos\pi x}{6x-2}$ 已不是未定式,不能用洛必达法则.

(C) 也是错的. 用洛必达法则求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时,若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在,也不为 ∞,则法则失效,不能推出原极限不存在,事实上该极限是存在的.

因此选(D).

【分析 2】 (D) 是正确的.

用洛必达法则求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时,

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(有限数),则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$,则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$,(D) 正是后一种情形.

【评注】 (A),(B),(C) 的正确解法是：

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}\xlongequal{\text{数列极限转化为函数极限}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

(B) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{3x^2-2x-1}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\pi\cos\pi x}{6x-2}=\dfrac{-\pi}{4}$.

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}(x\sin\dfrac{1}{x})=1\times0=0$.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1} & x\neq\pm1\\ 0 & x=\pm1\end{cases}$ 则，

(A) $f(x)$ 在点 $x=1$ 连续，在点 $x=-1$ 间断.
(B) $f(x)$ 在点 $x=1$ 间断，在点 $x=-1$ 连续.
(C) $f(x)$ 在点 $x=1,x=-1$ 都连续.
(D) $f(x)$ 在点 $x=1,x=-1$ 都间断. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2\times\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\pi$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在，因而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，$\arctan\dfrac{1}{x^2-1}$ 为有界量，$\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$

$$\lim_{x\to-1}(x+1)\arctan\frac{1}{x^2-1}=0=f(0)$$

所以，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，因此，选(B).

16. 在其定义区间上连续函数 $f(x)$ 是

(A) $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant1\\ 2-x & 1<x\leqslant2\end{cases}$.　(B) $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant1\\ 1-x & 1<x\leqslant2\end{cases}$.

(C) $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\ 0 & x=1\\ 2-x & 1<x\leqslant2\end{cases}$.　(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & 0\leqslant x<1\\ 0 & 1\leqslant x\leqslant2\end{cases}$. [ ]

【答案】 (A)

【分析 1】 设 $f(x)=\begin{cases}g(x) & (a\leqslant x\leqslant x_0)\\ h(x) & (x_0<x\leqslant b),\end{cases}$ 其中 $g(x),h(x)$ 分别在$[a,x_0]$,

$[x_0,b]$ 是初等函数，又 $g(x_0)=h(x_0)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续．对于(A)，$x\Big|_{x=1}=(2-x)\Big|_{x=1}$，故选(A).

【分析 2】 作为选择题，可先考察一下，所涉及到的函数是否有初等函数，如果有，就选择，因为初等函数在其定义区间上是连续的，在(A)中 $f(x)=1-|x-1|=1-\sqrt{(x-1)^2}$，它是初等函数，因此，选(A).

17. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $f(x)$ 在 x_0 间断，则在点 x_0 处必定间断的函数是

(A) $f(x)\sin x$.　　　　(B) $f(x)+\sin x$.

(C) $f^2(x)$.　　　　(D) $|f(x)|$.　　　　[　　]

【答案】 (B)

【分析 1】 若 $f(x)+\sin x$ 在 $x=x_0$ 连续 $\Rightarrow$

$$f(x)=(f(x)+\sin x)-\sin x$$

在 $x=x_0$ 连续，与已知矛盾．因此 $f(x)+\sin x$ 在 x_0 必间断．选(B).

【评注】 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 间断，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，则 $f(x)\pm g(x)$ 在 $x=x_0$ 间断.

【分析 2】 举反例说明(A)，(C)，(D)不对.

设 $f(x)=\begin{cases}0, x\neq 0,\\ 1, x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 间断，

$f(x)\cdot\sin x=0(\forall x)$ 在 $x=0$ 连续.

若设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 间断，但 $f^2(x)=1(\forall x)$，$|f(x)|=1(\forall x)$ 在 $x=0$ 均连续，因此不选(A)，(C)，(D).

18. 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续，且在 x_0 的一空心邻域中有 $f(x)>0$，则

(A) $f(x_0)>0$.　　　　(B) $f(x_0)\geqslant 0$.

(C) $f(x_0)<0$.　　　　(D) $f(x_0)=0$.　　　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 由 $f(x)$ 在 x_0 点连续，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 又因在 x_0 的一空心邻域中有 $f(x)>0$，由极限的性质有 $f(x_0)\geqslant 0$. 于是应选(B).

【评注】 $f(x)$ 在 x_0 一空心邻域内 $f(x)>0$ 及 $f(x)$ 在 x_0 连续不一定有 $f(x_0)>0$，例如 $f(x)=x^2$，$x_0=0$ 满足题设条件，但 $f(x_0)=0$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com