名师点金丛书

高等数学辅导

同济·第五版（下）

主编 同济大学 李伟

- 内容总结 题型集萃
- 方法归纳 同步自测
- 考研精选 教材题解

中央民族大学出版社

名师点金丛书

高等数学辅导(下)

(同济第五版)

主编　同济大学　李伟

中央民族大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导·下/《高等数学辅导》编写组编. —北京:中央民族大学出版社,2005.8

(名师点金丛书)

ISBN 7-81108-079-6

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 097172 号

名师点金丛书·高等数学辅导（下）

主　　编　《高等数学辅导》编写组

责任编辑　小 路

封面设计　坤 燕

出 版 者　中央民族大学出版社

北京市海淀区中关村南大街 27 号　　邮编：100081

电话：68472815（发行部）　　传真：68932751（发行部）

68932218（总编室）　　68932447（办公室）

发 行 者　全国各地新华书店

印 刷 者　北京文飞福利印刷厂

开　　本　787×960（毫米）　1/16

印　　张　235

字　　数　3500 字

版　　次　2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 7-81108-079-6/H·101

定　　价　310.00（全二十册）

前　言

高等数学是我国高等院校理工科专业的一门重要的基础课程，也是全国硕士研究生入学考试的统考内容。而由同济大学应用数学系主编的《高等数学》（第五版）因其结构严谨、逻辑清晰、叙述详细等优点被众多高校选用为教材。为了更好地帮助广大学习者掌握教材中的知识点，我们组织了有多年教学经验的教授及考研辅导专家编写了与此相配套的学习辅导书。

本书是经过编者仔细研究了《高等数学课程教学基本要求》和《2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》后精心编写而成的。本书在内容编排上主要按同济大学《高等数学》（第五版）的章节顺序编排。

本书具体每章节设立的体系如下：

一、大纲要求　明确指出大纲对本章节内容的掌握程度要求，重点突出、学习目标明确，使读者一目了然，做到心中有数。

二、主要内容总结　对每章节的重要概念、定义等以图表和公式的形式归纳总结出来，简单明了、浅显易懂、加强记忆力。

三、典型题型与解题方法　对本章节中需要掌握的知识点配以典型例题，并提供多种解题方法，由此更能抓住重点和难点。帮助读者提高解题能力，做到举一反三，触类旁通。

四、同步自测题　供读者检验自己对本章内容的掌握程度，最终达到对知识的巩固。做完之后可参考答案，以对比自己的失误之处。

五、本章历年考研真题精选　供读者熟悉本章内容的考研出题点，在全面复习的基础上，对重点内容进行突破。

六、附《高等数学》（同济五版）各章节的习题答案　建议读者在做完习题后参考详细答案，逐渐提高自己的解题能力。

本书主要面向使用该教材的教师或学生，也可作为考研人员的参考书。

本书虽然经过较长时间的编写和修改，但限于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，望广大读者批评指正。

编　者

2005.8

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的极限与连续性

一、大纲要求

1. 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质.

二、主要内容总结

表 8-1-1　平面点集

名称	定义
两点间距离	在 xOy 平面上任意两点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，有 $\rho(M_1,M_2)=\lvert M_1M_2\rvert=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 称为点 M_1 与 M_2 之间的距离.
邻域	设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，即 $U(P_0,\delta)=\{P \mid \lvert PP_0\rvert<\delta\}$； 点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，即 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<\lvert PP_0\rvert<\delta\}$
内点	如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点.
外点	如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使 $U(P)\cap E=\phi$，则称 P 为 E 的外点.
边界点	如果点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的边界点.
边界	E 的边界点的全体，称为 E 的边界.
聚点	如果对于任意给定的 $\delta>0$，点 P 的去心领域 $\overset{\circ}{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点，则称 P 是 E 的聚点.

续表

名称	定义
开集	如果点集 E 的点都是 E 的内点,则称 E 为开集.
闭集	如果点集 E 的余集 E^C 为开集,则称 E 为闭集.
连通集	如果点集 E 的任何两点,都可用折线连结起来,且该折线上的点都属于 E,则称 E 为连通集.
区域	连通的开集称为区域或开区域.
闭区域	开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.
有界集	对于平面点集 E,如果存在某一正数 r,使得 $E\subset U(O,r)$,其中 O 是坐标原点,则称 E 为有界集.
无界集	一个集合如果不是有界集,就称这集合为无界集.

表 8-1-2 多元函数及其极限与连续

名称	定义	备注
二元函数	设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集,称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数,通常记为 $z=f(x,y)$,$(x,y)\in D$ 或 $z=f(P)$,$P\in D$,其中点集 D 称为该函数的定义域,x,y 称为自变量,z 称为因变量.	二元函数只与定义域和对应关系有关,而与具体用什么字母表示无关

续表

名称	定义	备注
多元函数的极限	设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ，使得当点 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有 $\|f(P)-A\|=\|f(x,y)-A\|<\epsilon$ 成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$，也记作 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 或 $f(P)\to A(P\to P_0)$	二重积分存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都无限接近于 A
二元函数的连续	设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$，如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续；如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，那么就称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.	在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，即要求此点的函数值和极限值相等

表 8-1-3　极限的性质

设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=B$

性质	内容
加、减法	$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)\pm g(x,y)]=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\pm\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=A\pm B$

续表

数乘	$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} cf(x,y)=c\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=cA$($c$为常数)
乘法	$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=A\cdot B$
除法	$B\neq0$ 时,$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)/g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)/\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=A/B$

表 8-1-4 连续函数的性质

性质	内容
四则运算性	如果二元函数 $f(P)$ 与 $g(P)$ 在点 P_0 处连续,则和、差、积、商(分母不为零)在点 P_0 处也连续
初等函数连续性	一切二元初等函数在其定义域内是连续的
复合函数	如果 $f(u,v)$ 在其定义域 E 内的点 (u_0,v_0) 处连续,函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在其公共定义域 D 内点 (x_0,y_0) 处连续,且 $u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$,又值域 $u(D),v(D)\in E$,则复合函数 $f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

表 8-1-5 闭区域上连续函数的性质

性质	内容
有界性与最大值最小值定理	在有界闭区域 D 上的多元连续函数,必定在 D 上有界,且能取得它的最大值和最小值.即,若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续,则必定存在常数 $M>0$,使得对一切 $P\in D$,有 $\lvert f(P)\rvert\leqslant M$;且存在 P_1、$P_2\in D$,使得 $f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\}$,$f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}$.
介值定理	在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值,即若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续,P_1、P_2 为 D 内两点,且 $f(P_1)<f(P_2)$,存在 μ,满足 $f(P_1)<\mu<f(P_2)$,则在 D 内存在一点 P_0,使得 $f(P_0)=\mu$.
一致连续性定理	在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续

三、典型题型与解题方法

题型 1　求多元函数的定义域

【解题方法】 求二元函数的定义域，与一元函数一样，列出不等式组，得到的二元函数的定义域是一个平面区域，在画定义域时，可先将不等式变成等式，求其边界方程，再确定定义域在边界的哪一面.

[例 1]求函数 $z=\arcsin(2x)+\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域.

解：$\arcsin(2x)$ 的定义域为：$|2x|\leqslant 1$，$\sqrt{4x-y^2}$ 的定义域为：$4x-y^2\geqslant 0$，$\dfrac{1}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为：$1-x^2-y^2>0$，且 $1-x^2-y^2\neq 1$.

联立不等式组 $\begin{cases}|2x|\leqslant 1\\ 4x-y^2\geqslant 0\\ 1-x^2-y^2>0\\ 1-x^2-y^2\neq 1\end{cases}$ ⇒所求函数的定义域为

$-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$，$y^2\leqslant 4x$，$0<x^2+y^2<1$.

[例 2]求函数 $z=\ln(y-x)+\sqrt{x}\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域，并画出草图.

解：要使函数有意义，应有 $\begin{cases}y-x>0\\ x\geqslant 0\\ x^2+y^2\leqslant 1\end{cases}$

即 $\begin{cases}y>x\\ x\geqslant 0\\ x^2+y^2\leqslant 1\end{cases}$，故定义域为 $D=\{(x,y)\mid y>x,x\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1\}$

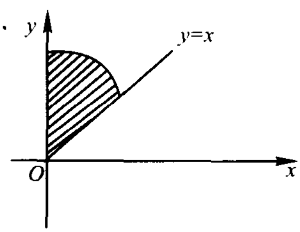

图 8－1

题型 2　关于二元函数的极限

【解题方法】 1. 求二元函数的极限：(1)参照求一元函数的方法，如四则运算及性质、夹逼准则、无穷小替代、重要极限、复合函数变量替换、连续函数的极限及初等函数的连续性等；(2)利用二元函数的定义.

2. 证明二元函数极限不存在：(1)沿某个特殊路径的极限不存在；(2)沿不同路径极限不相等；(3)两个二次极限存在但不相等.

[例 3]求下列极限：

(1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{\sin(x^2+y^2)}$　　(2)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{\sqrt{1+xy}-1}$

(3)$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　(4)$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ $(a\neq 0)$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)$　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin(2xy)}{y}$

解:(1)令 $u=x^2+y^2$,当 $x\to 0$,$y\to 0$ 时,$u\to 0$,

原式 $=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{\sin u}=1$.

(2)原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy(\sqrt{1+xy}+1)}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2(\sqrt{1+xy}+1)=4$.

(3)原式 $=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2$.(因为 $\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点(1,0)处连续)

(4) $\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\left[\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{x}{y(x+y)}}$,

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\dfrac{x}{y(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\dfrac{1}{y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}=\dfrac{1}{a}$,$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{xy}=e$,

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e^{\frac{1}{a}}$.

(5)设 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,则

$0\leqslant|(x+y)\ln(x^2+y^2)|=[\rho(\cos\theta+\sin\theta)\ln\rho^2]\leqslant 2|\rho\ln\rho|(|\sin\theta+\cos\theta|)\leqslant 4\rho|\ln\rho|$,

而已知 $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\ln\rho=0$,从而有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0$.

(6)若 $a\neq 1$ 时,由基本初等函数的连续性

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin 2xy}{y}=\dfrac{\sin(2\cdot 0\cdot a)}{a}=0$,

若 $a=0$ 时 $|\sin 2xy|\leqslant 2\cdot|xy|$,则 $\left|\dfrac{\sin 2xy}{y}\right|\leqslant 2|x|$,又因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}2|x|=0$,

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin 2xy}{y}=0$.

[例 4]证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

证明:因为 $\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y^2|$,故对 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$,

当 $|x|<\delta$,$|y|<\delta$,且 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,有 $\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant|y^2|<\delta^2=\varepsilon$,由极限定义有

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

[例 5]证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$　　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

解:(1)因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x^2)}{2x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2x^2}{2x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$,故原极限不

存在.

(2)取 $y=k\sqrt{x}$,有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to k\sqrt{x}}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(k\sqrt{x})^2}{x^2+(k\sqrt{x})^4}=\dfrac{k^2}{1+k^4}$

因为取不同的 k 可得不同极限值,故在原点极限不存在.

(3)当 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\cdot y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2\cdot x^2+(x-y)^2}=1.$$

当 (x,y) 沿 x 轴趋近于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\cdot y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x^2\cdot 0^2}{x^2\cdot 0^2+(x-0)^2}=0,$$

因 $1\neq 0$,所以原式的极限不存在.

题型3　多元函数的连续性

【解题方法】 z 在点 (x_0,y_0) 处连续须同时具备三条件:(1) $z=f(x,y)$ 在以点 (x_0,y_0) 为聚点的某集合上有意义;(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to y_0}}(x,y)$ 存在;(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$. 此外要特别理解并灵活运用闭区域上连续函数的性质:最大值最小值定理、有界性及介值定理.

[例6] 讨论函数的连续性,其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x-2y)}{x-2y}, & x\neq 2y\\ 0, & x=2y\end{cases}.$$

解:在点 $(0,0)$ 处,由于 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}x\cdot\dfrac{\sin(x-2y)}{x-2y}=0=f(0,0)$,则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

若 $x_0=2y_0\neq 0$,取路径 $x=2y$,$\forall\, y_0$ 则有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0=\frac{x_0}{2}}}f(x,y)=\lim_{x\to 2y_0}x\cdot\frac{\sin(x-2y_0)}{x-2y_0}=2y_0=x_0\neq f(x_0,y_0)=0$$

因此,间断点为直线 $x=2y$ 上除点 $(0,0)$ 外的其他点.

[例7] 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,在点 $(0,0)$ 处的连续性.

解:先考查 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$,由于 $\lim\limits_{y=kx\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y=kx\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y=kx\to 0}\dfrac{x^2(1-k^2)}{x^2(1+k^2)}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$,知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在,故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

第二节 多元函数的微分法

一、大纲要求

1. 理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要和充分条件，了解全微分形式不变性.

2. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.

3. 掌握多元复合函数偏导数的求法.

4. 会求隐函数的偏导数.

二、主要内容总结

表 8-2-1 基本概念、性质

名称	定义	性质
偏导数	设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right\vert_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right\vert_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z_x\right\vert_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$f_x(x_0,y_0)$ 类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$，记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\vert_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right\vert_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.	$f_x(x_0,y_0)$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在 (x_0,y_0) 处的切线关于 x 轴的斜率.

续表

名称	定义	性质
高阶偏导数	设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$，那么在 D 内 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 都是 x,y 的函数.如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，分别是 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),$$ $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$ $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),$$ $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$ 其中第二、三两个偏导数称为混合偏导数；依次类推可定义三阶及三阶以上的偏导数.	如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 和 $f_{yx}(x_0,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则恒有 $$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$
全微分	如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A、B 不依赖于 Δx、Δy 而仅与 x、y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记作 dz，即 $$dz=A\Delta x+B\Delta y$$ 如果函数在区域 D 内各点处都可微分，那么称这函数在 D 内可微分.	1° 如果 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分，那么这函数在该点必定连续 2° （必要条件）如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为 $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$ 3° （充分条件）如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则函数在该点可微分.