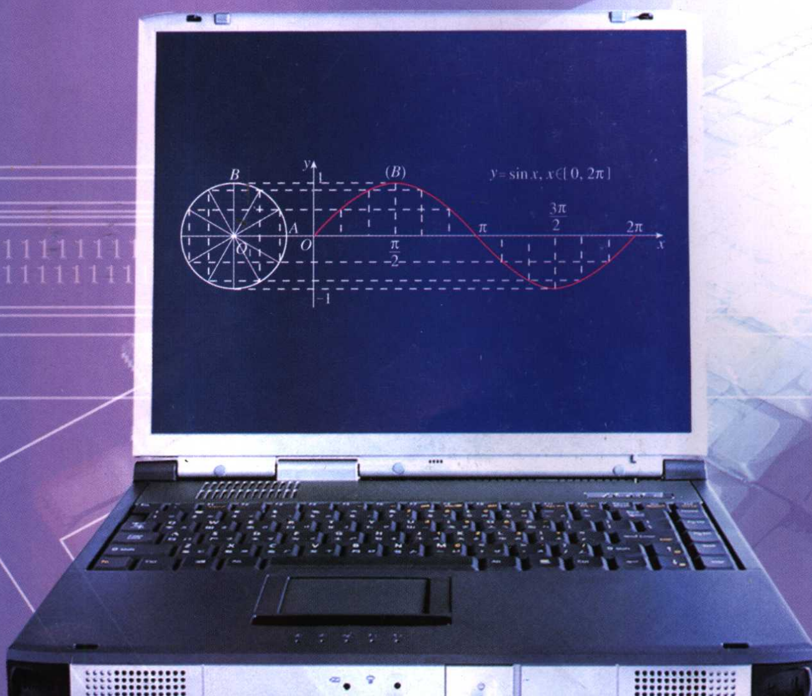
经全国中小学教材审定委员会
2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 4

必修

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

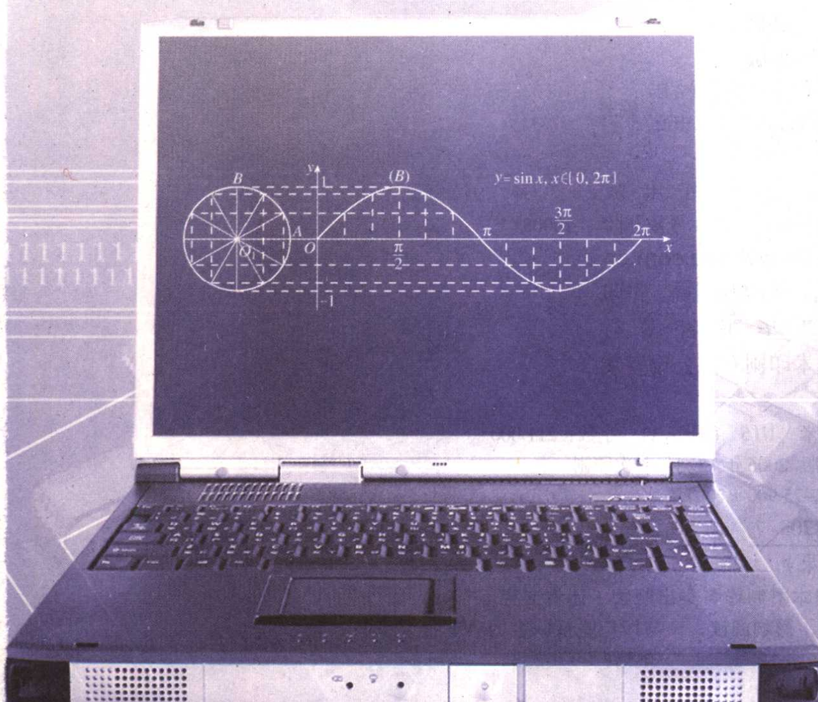
A版

普通高中课程标准实验教科书

数学 4

必修

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数学 4

必修

A 版

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编：100081）

网址：http://www.pep.com.cn

天津统编教材出版中心重印

天 津 市 新 华 书 店 发 行

天津金彩美术印刷有限公司印装

*

开本：890毫米×1240毫米 1/16 印张：11 字数：211 000

2004年5月第1版 2006年12月第1次印刷

印数：1-75 900（2007春）

ISBN 7-107-17708-7
G·10797（课） 定价：9.45元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：章建跃
主要编者：章建跃　任子朝　张劲松　蒋佩锦
责任编辑：章建跃
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：林荣桓

主 编 寄 语

同学们，欢迎大家使用这套普通高中数学教科书，希望它能够成为你们学习数学的好朋友.

作为这套教科书的主编，在大家开始用这套书学习数学之前，对于为什么要学数学，如何才能学好数学等问题，我有一些想法与你们交流.

为什么要学数学呢？我想从以下两个方面谈谈认识.

数学是有用的. 在生活、生产、科学和技术中，在这套教科书中，我们都会看到数学的许多应用. 实际上，“数量关系与空间形式”，在实践中，在理论中，在物质世界中，在精神世界中，处处都有，因而研究“数量关系与空间形式”的数学，处处都有用场. 数学就在我们身边，她是科学的语言，是一切科学和技术的基础，是我们思考和解决问题的工具.

学数学能提高能力. 大家都觉得，数学学得好的人也容易学好其他理论. 实际上，理论之间往往有彼此相通和共同的东西，而“数量关系与空间形式”、逻辑结构及探索思维等正是它们的支架或脉络，因而数学恰在它们的核心处. 这样，在数学中得到的训练和修养会很好地帮助我们学习其他理论，数学素质的提高对于个人能力的发展至关重要.

那么，如何才能学好数学呢？我想首先应当对数学有一个正确的认识.

数学是自然的. 在这套教科书中出现的数学内容，是在人类长期的实践中经过千锤百炼的数学精华和基础，其中的数学概念、数学方法与数学思想的起源与发展都是自然的. 如果有人感到某个概念不自然，是强加于人的，那么只要想一下它的背景，它的形成过程，它的应用，以及它与其他概念的联系，你就会发现它实际上是水到渠成、浑然天成的产物，不仅合情合理，甚至很有人情味. 这将有助于大家的学习.

数学是清楚的. 清楚的前提，清楚的推理，得出清楚的结论，数学中的命题，对就

是对，错就是错，不存在丝毫的含糊．我们说，数学是易学的，因为它是清楚的，只要大家按照数学规则，按部就班地学，循序渐进地想，绝对可以学懂；我们又说，数学是难学的，也因为它是清楚的，如果有人不是按照数学规则去学去想，总想把“想当然”的东西强加给数学，在没有学会加法的时候就想学习乘法，那就要处处碰壁，学不下去了．

在对数学有一个正确认识的基础上，还需要讲究一点方法．

学数学要摸索自己的学习方法． 学习、掌握并能灵活应用数学的途径有千万条，每个人都可以有与众不同的数学学习方法．做习题、用数学解决各种问题是必需的，理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法也是必需的，还要充分发挥问题的作用，问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性．要善于提问，学会提问，“凡事问个为什么”，用自己的问题和别人的问题带动自己的学习．在这套书中，我们一有机会就提问题，希望“看过问题三百个，不会解题也会问”．类比地学、联系地学，既要从一般概念中看到它的具体背景，不使概念“空洞”，又要在具体例子中想到它蕴含的一般概念，以使事物有“灵魂”．

同学们，**学数学趁年轻．** 你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期．这个时期下点功夫学数学，将会终生受益．我们构建了这片数学天地，期盼它有益于大家的成长．你们是这片天地的主人，希望大家在学习的过程中能对它提出宝贵的改进意见．预祝同学们愉快地生活在这片数学天地中．

本 册 导 引

我们根据《普通高中数学课程标准（实验）》编写了这套实验教科书.

本书是高中数学必修课程5个模块中的一个，包括三角函数、平面向量与三角恒等变换等三章内容. 三角函数是一类基本的、重要的函数，在数学、其他科学以及生产实践中都有广泛的应用，三角函数的学习是对函数概念的深化；平面向量有着极其丰富的实际背景，是近代数学中重要和基本的概念之一，它是沟通代数、几何与三角函数的一种工具；三角恒等变换在数学中有一定的应用，对发展我们的推理能力和运算能力都有好处.

在数学1中，同学们学习了函数的一些基本概念，并学了指数函数、对数函数、幂函数等具体函数，与这些函数比较，三角函数是刻画现实世界中存在的那些具有周期性变化现象的数学模型. 在本章中，同学们将通过实例，学习三角函数及其基本性质，体会三角函数在解决具有周期变化规律的问题中的作用.

从解析几何的学习中，同学们可以感受到代数方法（数及其运算）在研究几何问题中的作用和有效性，通过本章的学习可以发现，向量方法（向量及其运算）是研究几何的另一个好工具. 在本章中，同学们将在了解向量的实际背景的基础上，学习平面向量及其运算的一些基本知识，用向量的语言和方法来表述和解决数学、物理中的一些问题，从中可以看到向量这一工具的强大力量.

在过去的学习中，同学们曾经接触过大量“只变其形不变其质”的代数变换，这种变换是解决数学问题的重要手段. 三角变换也是“只变其形不变其质”的，这种变换也是解决问题所必需的. 在本章中，同学们将运用向量的方法推导基本的三角恒等变换公式，由此出发导出其他的三角恒等变换公式，并运用这些公式进行简单的恒等变换.

学习始于疑问. 在本书中，我们将通过适当的问题情景，引出需要学习的数学内容，然后在“观察”“思考”“探究”等活动中，引导同学们自己发现问题、提出问题，通过亲身实践、主动思维，经历不断的从具体到抽象、从特殊到一般的抽象概括活动来理解和掌握数学基础知识，打下坚实的数学基础.

学而不思则罔. 只有通过自己的独立思考，并掌握科学的思维方法才能真正学会数学. 在本书中，我们将利用数学内容之间的内在联系，特别是蕴涵在数学知识中的数学思想方法，启发和引导同学们学习类比、推广、特殊化、化归等数学思考的常用逻辑方法，使同学们学会数学思考与推理，不断提高数学思维能力.

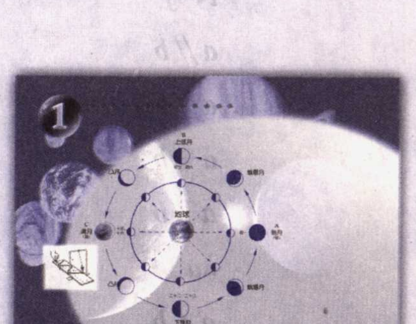
学习的目的在于应用．在本书中，我们将努力为同学们提供应用数学知识解决各种数学内外问题的机会，以使同学们加深对数学概念的理解，认识数学知识与实际的联系，并学会用数学知识和方法解决一些实际问题．另外，我们还开辟了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等拓展性栏目，为同学们提供选学素材，有兴趣的同学可以自主选择其中的一些内容进行探究．

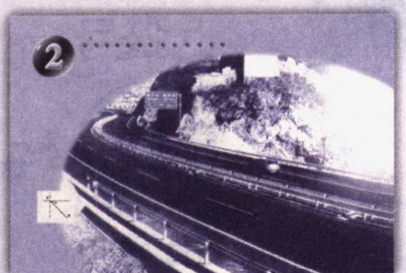
祝愿同学们通过本册书的学习，不但学到更多的数学知识，而且在数学能力、用数学解决问题的能力等方面都有较大提高，并培养起更高的数学学习兴趣，形成对数学的更加全面的认识．

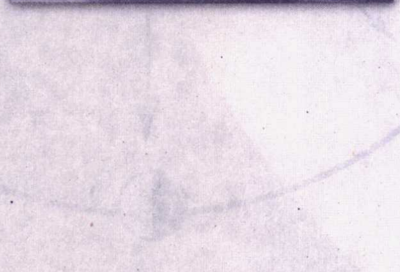
本书部分数学符号

$\sin x$	x 的正弦
$\cos x$	x 的余弦
$\tan x$	x 的正切
$\sin^2 x$	$\sin x$ 的平方
$\boldsymbol{a}$	向量 $\boldsymbol{a}$
$\overrightarrow{AB}$	向量 $\overrightarrow{AB}$
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的模（或长度）
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模（或长度）
$\mathbf{0}$	零向量
$\boldsymbol{e}$	单位向量
$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$	平面直角坐标系中 x 轴，y 轴方向的单位向量
$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行（共线）
$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差
$\lambda\boldsymbol{a}$	实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积

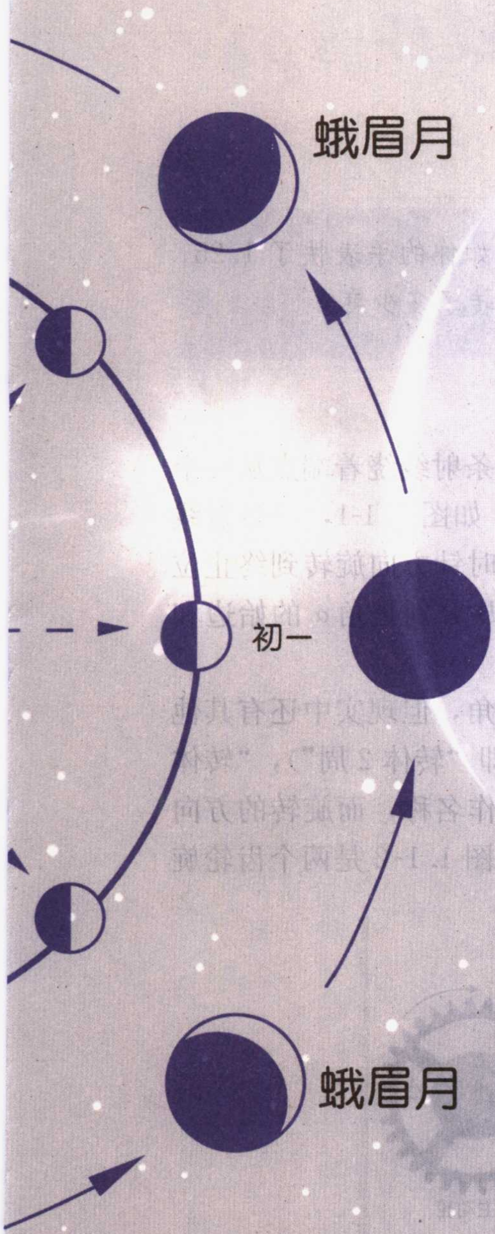
目 录




2


3

第一章 三角函数



现实世界中的许多运动、变化都有着循环往复、周而复始的现象，这种变化规律称为周期性.例如：地球自转引起的昼夜交替变化和公转引起的四季交替变化；月亮圆缺变化的周期性，即朔—上弦—望—下弦—朔；潮汐变化的周期性，即海水在月球和太阳引力作用下发生的周期性涨落现象；物体做匀速圆周运动时位置变化的周期性；做简谐运动的物体的位移变化的周期性；交变电流变化的周期性；等等.如何用数学的方法来刻画这种变化规律呢？

我们知道，函数是刻画客观世界变化规律的数学模型.在数学1中，我们学习了指数函数、对数函数等，知道这些函数可以用来刻画现实问题中某些类型的变化规律.那么，在数学中又如何刻画客观世界中的周期性变化规律呢？本章要学习的三角函数就是刻画这种变化规律的数学模型.

三角函数到底是一种怎样的函数？它具有哪些特有的性质？在解决具有周期性变化规律的问题中到底能发挥哪些作用？下面我们就来研究这些问题.

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

思考?

你的手表慢了5分钟，你是怎样将它校准的？假如你的手表快了1.25小时，你应当如何将它校准？当时间校准后，分针旋转了多少度？

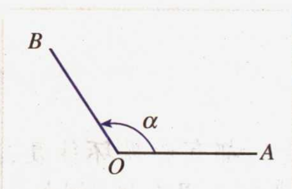


图1.1-1

我们知道，角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形．如图1.1-1，一条射线的端点是O，它从起始位置OA按逆时针方向旋转到终止位置OB，形成一个角α，射线OA、OB分别是角α的始边和终边.

过去我们研究过0°～360°范围的角，但现实中还有其他角．例如，体操中有“转体720°”（即“转体2周”），“转体1 080°”（即“转体3周”）这样的动作名称，而旋转的方向也有顺时针与逆时针的不同；又如，图1.1-2是两个齿轮旋

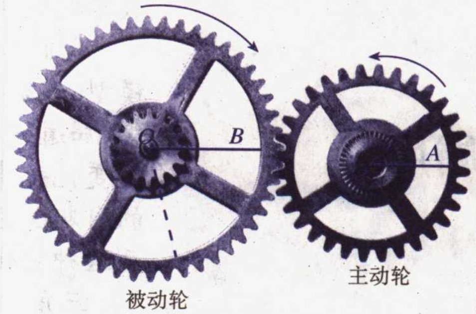


图1.1-2

转的示意图，被动轮随着主动轮的旋转而旋转，而且被动轮与主动轮有相反的旋转方向．这样，OA 绕 O 旋转所成的角与 $O'B$ 绕 O' 旋转所成的角就会有不同的方向．因此，要准确地描述这些现象，不仅要知道角形成的结果，而且要知道角形成的过程，即必须既要知道旋转量，又要知道旋转方向．这就需要对角的概念进行推广．

我们规定，按逆时针方向旋转形成的角叫做**正角**（positive angle），按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角**（negative angle）．如果一条射线没有作任何旋转，我们称它形成了一个**零角**（zero angle）．这样，零角的始边与终边重合．如果 α❶是零角，那么 $\alpha=0°$．

图 1.1-3（1）中的角是一个正角，它等于 750°；图 1.1-3(2)中，正角 $\alpha=210°$，负角 $\beta=-150°$，$\gamma=-660°$；正常情况下，如果以零时为起始位置，那么钟表的时针或分针在旋转时所形成的角总是负角．

❶ 为了简单起见，在不引起混淆的前提下，“角 α”或“$\angle\alpha$”可以简记成“α”．

手表快了 1.25 小时，只需将分针旋转 $-3\ 870°$（或 450°）就可以将它校准．

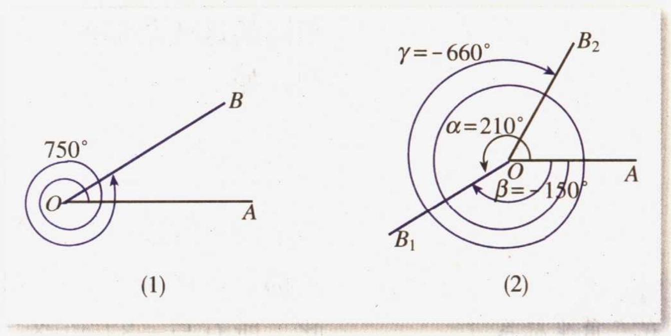


图 1.1-3

这样，我们就把角的概念推广到了**任意角**（any angle），包括正角、负角和零角．

今后我们常在直角坐标系内讨论角．为了讨论问题的方便，我们使角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合．那么，角的终边在第几象限，我们就说这个角是第几**象限角**（quadrant angle）．例如，图 1.1-4 中的 30°角、$-120°$角分别是第一象限角和第三象限角．如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何一个象限．

你能说说在直角坐标系内讨论角的好处吗？

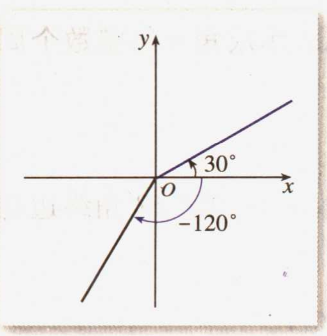


图 1.1-4

探究

将角按照上述方法放在直角坐标系中后，给定一个角，就有唯一的一条终边与之对应．反之，对于直角坐标系内任意一条射线 OB（如图1.1-5），以它为终边的角是否唯一？如果不唯一，那么终边相同的角有什么关系？

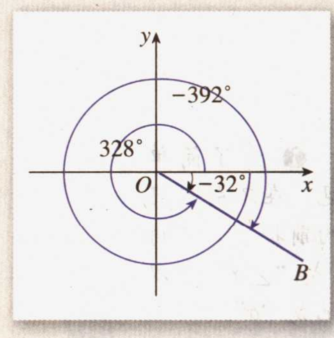


图 1.1-5

不难发现，在图 1.1-5 中，如果 $-32°$ 的终边是 OB，那么 $328°$，$-392°$……角的终边都是 OB，并且与 $-32°$ 角终边相同的这些角都可以表示成 $-32°$ 的角与 k 个 $(k\in\mathbf{Z})$ 周角的和，如

$$328°=-32°+360°\text{（这里 }k=\_\_\_\_\text{）},$$
$$-392°=-32°-360°\text{（这里 }k=\_\_\_\_\text{）}.$$

设 $S=\{\beta\mid\beta=-32°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，则 $328°$，$-392°$ 角都是 S 的元素，$-32°$ 角也是 S 的元素（此时 $k=\_\_$）．因此，所有与 $-32°$ 角终边相同的角，连同 $-32°$ 角在内，都是集合 S 的元素；反过来，集合 S 的任一元素显然与 $-32°$ 角终边相同．

在直角坐标系中，角的终边绕原点旋转 $360°$ 后回到原来的位置．因此，在直角坐标系中讨论角可以很好地表现角的“周而复始”的变化规律．

一般地，我们有：

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合

$$S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和．

❶ $0°\sim360°$ 是指 $0°\leqslant\alpha<360°$．

例 1　在 $0°\sim360°$ 范围内❶，找出与 $-950°12'$ 角终边相同的角，并判定它是第几象限角．

解：$-950°12'=129°48'-3\times360°$，

所以在 $0°\sim360°$ 范围内，与 $-950°12'$ 角终边相同的角是

129°48′，它是第二象限角.

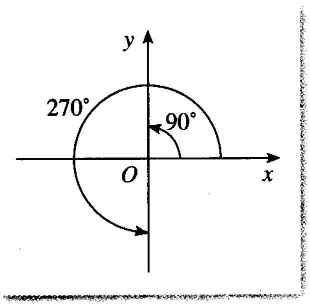


图 1.1-6

例 2 写出终边在 y 轴上的角的集合.

解：在 0°～360°范围内，终边在 y 轴上的角有两个，即 90°，270°角（图 1.1-6）. 因此，所有与 90°角终边相同的角构成集合

$$S_1=\{\beta|\beta=90°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

而所有与 270°角终边相同的角构成集合

$$S_2=\{\beta|\beta=270°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

于是，终边在 y 轴上的角的集合

$$\begin{aligned}S&=S_1\cup S_2\\&=\{\beta|\beta=90°+2k\cdot 180°,\ k\in\mathbf{Z}\}\\&\quad\cup\{\beta|\beta=90°+180°+2k\cdot 180°,\ k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\beta|\beta=90°+2k\cdot 180°,\ k\in\mathbf{Z}\}\\&\quad\cup\{\beta|\beta=90°+(2k+1)180°,\ k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\beta|\beta=90°+n\cdot 180°,\ n\in\mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

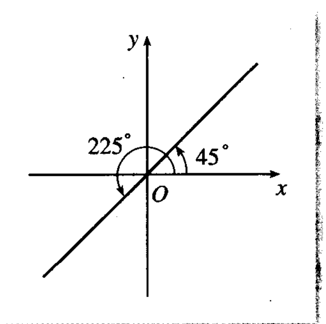


图 1.1-7

例 3 写出终边在直线 $y=x$ 上的角的集合 S，并把 S 中适合不等式 $-360°\leqslant\beta<720°$ 的元素 β 写出来.

解：如图 1.1-7，在直角坐标系中画出直线 $y=x$，可以发现它与 x 轴的夹角是 45°，在 0°～360°范围内，终边在直线 $y=x$ 上的角有两个：45°，225°. 因此，终边在直线 $y=x$ 上的角的集合

$S=\{\beta|\beta=45°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=225°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=45°+k\cdot 180°,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

S 中适合 $-360°\leqslant\beta<720°$ 的元素是

$$45°-2\times 180°=-315°,$$
$$45°-1\times 180°=-135°,$$
$$45°+0\times 180°=45°,$$
$$45°+1\times 180°=225°,$$
$$45°+2\times 180°=405°,$$
$$45°+3\times 180°=585°.$$

练 习

1. (口答)锐角是第几象限角?第一象限角一定是锐角吗?再分别就直角、钝角来回答这两个问题.
2. (口答)今天是星期三,那么 $7k(k\in\mathbf{Z})$ 天后的那一天是星期几? $7k(k\in\mathbf{Z})$ 天前的那一天是星期几? 100 天后的那一天是星期几?
3. 已知角的顶点与直角坐标系的原点重合,始边与 x 轴的非负半轴重合,作出下列各角,并指出它们是第几象限角:
   (1) $420°$; (2) $-75°$; (3) $855°$; (4) $-510°$.
4. 在 $0°\sim360°$ 范围内,找出与下列各角终边相同的角,并指出它们是第几象限角:
   (1) $-54°18'$; (2) $395°8'$; (3) $-1\,190°30'$.
5. 写出与下列各角终边相同的角的集合,并把集合中适合不等式 $-720°\leqslant\beta<360°$ 的元素 β 写出来:
   (1) $1\,303°18'$; (2) $-225°$.

1.1.2 弧度制

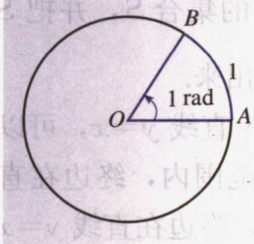


图 1.1-8

可以证明,一定大小的圆心角 α 所对应的弧长与半径的比值是唯一确定的,与半径大小无关.

度量长度可以用米、英尺、码等不同的单位制,度量重量可以用千克、磅等不同的单位制. 不同的单位制能给解决问题带来方便. 角的度量是否也能用不同的单位制呢?

我们知道,角可以用度为单位进行度量,1 度的角等于周角的 $\frac{1}{360}$. 这种用度作为单位来度量角的单位制叫做**角度制** (degree measure). 为了使用方便,数学上还采用另一种度量角的单位制——**弧度制** (radian measure):

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 **弧度**(radian)的角,用符号 rad 表示,读作弧度.

如图 1.1-8,圆 O 的半径为 1, $\overset{\frown}{AB}$ 的长等于 1, $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角.