高等财经院校成人教育系列教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主编◎陈晓兰　郝秀梅

经济科学出版社
Economic Science Press

高等财经院校成人教育系列教材

线　性　代　数

主　编　陈晓兰　郝秀梅
副主编　刘太琳　刘纪芹　马玉林

经 济 科 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/陈晓兰，郝秀梅主编．—北京：经济科学出版社，2007.12
（高等财经院校成人教育系列教材）
ISBN 978-7-5058-6745-1

Ⅰ．线…　Ⅱ．①陈…②郝…　Ⅲ．线性代数—高等教育：成人教育—教材　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 182897 号

责任编辑：吕　萍　张建光
责任校对：徐领柱
版式设计：代小卫
技术编辑：潘泽新

线性代数

主编　陈晓兰　郝秀梅

副主编　刘太琳　刘纪芹　马玉林

经济科学出版社出版、发行　新华书店经销

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮编：100036

总编室电话：88191217　发行部电话：88191540

网址：www.esp.com.cn

电子邮件：esp@esp.com.cn

汉德鼎印刷厂印刷

永胜装订厂装订

787×1092　16开　13印张　220000字

2007年12月第一版　2007年12月第一次印刷

印数：0001—5000册

ISBN 978-7-5058-6745-1/F·6006　定价：26.00元

序

当今世界，一切国家、民族、地区和群体单位经济社会发展程度的差别，除了自然资源和社会制度方面的原因外，其根本原因是由人力资本积累素质及运用效率的差别所造成的。就个人事业是否有成或成功程度的差别来说，根本原因也是如此。而人力资本积累素质及其运用效率的差别，说到底，又主要是由人所受到的教育状况所决定的。正因如此，当今世界各个国家都特别重视各类教育事业的发展，我国则提出了“科教兴国”的伟大战略。

在当今世界经济和社会发展中，随着科学技术第一生产力的不断升级换代，科学知识的更新周期越来越短，一般则是5年左右。而在人的教育中，即使一个普通大学本科毕业生，在学校学到的全部知识，也只是一生中所需要的知识总量的1/10左右。在这种情况下，仅靠普通学历教育所学到的知识，远远不能适应经济社会发展的实际需要。而终身教育，有的叫做成人教育、继续教育、推广教育或职业教育等，则是弥补普通教育自然缺陷的根本途径。第二次世界大战后联邦德国和日本等国的经济复苏和崛起，以及美国成为世界超级经济大国的重要原因之一，就是高度重视和发展了各种形式的成人教育，以人的终身教育作为提高人力资本积累素质及运用效率的根本途径。正因如此，中共“十六大”报告中强调提出，要全面建设小康社会，就要“形成全民学习、终身学习的学习型社会，促进人的全面发展”，同时，还特别强调要“加强职业教育和培训，发展继续教育，构建终身教育体系”。

在构建学习型社会中，学习的形式是多种多样的，而成人教育的形式也是多种多样的。就我国成人高校教育形式来说，有一个很

重要的特点，就是将学历教育与非学历教育于一体，既有非普通高等学校的非学历教育的特征，又有某些普通高等学校学历教育的特征。这样，在我国成人高校教育中，除了各类短期培训以外，几乎所有的教育形式都具有两年以上的学习周期。要办好这种形式的成人高等教育，不仅需要正确的办学理念和科学的管理模式，更需要有一支适应成人高等教育的好的教师队伍，特别是适应各个成人高等教育专业的好的系列教材。山东财政学院继续教育学院在长期教材建设的经验积累中，经过精心设计，特邀在中国海洋大学、中国石油大学、山东科技大学、青岛大学、山东农业大学、山东财政学院、山东经济学院、青岛科技大学、莱阳农学院、山东省经济管理干部学院等10所高校中多年从事成人教育教学工作的专家、教授和部分函授站教学一线专业骨干教师，编写了这套系列教材，就是适应这种需要体现山东省成人教育教学的特色，同时也是为提高成人教育办学质量出台的新举措和重要课题（该课题于2005年立项，项目编号为J05P06）。

综观这套教材，主要有以下几个特点：

一是系统性。作为一套系列教材，目前出版的教材主要是适用于会计学、金融学专业教学需要的系列教材。它从两个专业课程设置及教学大纲的要求出发，系统地涵盖了两个专业教学的基本内容，包括专业基础课、专业主干课课程教材，因而具有系统性，有利于指导和帮助学生获得本专业的系统性科学知识。

二是完整性。在这套系列教材中，不仅完整地体现了两个专业各自的课程设置结构，而且在每部教材中都力求完整地体现各门课程应有的全部教学内容。如在会计专业系列教材中，除专业基础课教材外，专业骨干课设有《财务会计》、《财务管理》、《成本会计》、《管理会计》等7部教材之多。有了这套教材，就可以指导和帮助学生获得本专业完整性的科学知识。

三是科学性。评价一套系列性教材的质量或水平，一方面要看教材的结构是否合理，另一方面要看每部教材是否具有科学性。而这里讲的科学性，既包括每部教材的导向性内容是否坚定正确，也

包括每部教材的专业性内容是否先进合理。而山东财政学院继续教育学院在长期教材建设实践经验积累基础上所产生的这套系列教材，既有明确的导向，又有合理的内容，因而具有较高程度的科学性。

四是创新性。党的“十六大”报告中提出：“创新是一个民族进步的灵魂，是一个国家兴旺发达的不竭动力，也是一个政党永葆生机的源泉”。同样，对于一个学校的发展或一部教材的建设来说，创新也是灵魂、动力和源泉。不仅本套系列教材的设计、编写和出版本身就是一种创新，而且更重要的是在每部教材中，都体现了创新的要求，力求把最新的时代信息，其中包括理论信息、专业信息、政策信息等纳入教材之中。其中有些内容，则是编者多年来从事科学研究，并获得多次省部级优秀成果奖的创新性成果。

五是实践性。成人教育的一个鲜明特点，就是对学习内容要求的实践性、应用性、针对性和对策性。本套系列教材在总结成人教育的教学及教材建设经验基础上，力求使每部教材体现这种教育要求，因而更加适应成人教育的实际需要。

六是范域性。山东财政学院的成人教育事业，是在财政部领导下发展起来的教育事业，因而在教学及教材建设上具有广泛的适应性。又由于山东财政学院成人教育的各个专业，均是面向全国招生的专业，并在新疆、广西、青海、内蒙古、天津等地设有分院或函授站，因而又具有广泛的地域性。也就是说，本套系列教材在范围和地域上，具有广泛的适应性。

七是可信性。山东财政学院继续教育学院之所以能够出版这套系列教材，除了社会各界、部分兄弟高校，特别是经济科学出版社的大力支持外，其主要原因之一就是山东财政学院坚实可信的办学实力，以及山东财政学院继续教育学院丰厚的办学经验。仅就山东财政学院在山东的招生而言，近年来，一直维持了省属普通高校成人招生录取的前几位，具有较高的可信度和社会声望。山东财政学院的成人教育是与本院的普通教育超常规同步发展的，不仅连年来维持了同类专业招生的最高录取分数线，而且是同类学校中专业规模最大的成人教育事业，同时，在教学管理及教学质量上，也是得

到教育管理部门评价最高的院校。正是这种坚实雄厚的办学实力，为这套系列教材的建设和出版提供了可信的基础。

八是适应性。由于本套系列教材的以上特点所在，使其不仅适应本院成人教育的教学需要，而且也适应全国各地成人教育的教学需要。同时，也适应相关专业人员的自学需要。

尽管这套系列教材具有适应成人教育的以上诸多特点，但在教学过程中使用该教材时，恳望教者和学者仍然要树立和强化符合时代要求的大学理念。对于教者来说，要善于结合自己的教学及科研实践，补充和丰富教学的新内容，善于了解和提出新问题、研究和解决新问题，把思维创新、理论创新、战略创新、对策创新贯彻到教学全过程；对于学者来说，要善于结合自己的学习及工作实际，在新的学习过程中总结过去、把握现在、规划未来，使新的专业知识成为自己事业有成的知识源泉。在此，所以要强调这个问题，意在说明一个大学教师和一个大学生，不能只是老师照本宣讲，学生照本考答，而是应当在教学实践中树立和强化创新、创业的大学理念，倡导思维创新、知识创新、理论创新、战略创新、对策创新、方法创新。只有这样，才能从根本上培养、开发和启动中国人的创新思维，为实现中华民族的复兴大业贡献更高能级的智慧和才干。

由于本套系列教材是一个系统工程，任务繁重，时间短促，经验不足，肯定存在诸多不足和缺陷，恳望教者、学者和读者提出宝贵意见和建议，以使这套教材进一步得到完善和提高。

2005 年 5 月 18 日

前　言

本教材是山东省教育厅立项的“山东省成人高等教育教学评价与质量监控体系研究”课题项目（课题编号为J05P06）中“财经专业主要课程及其主要教学内容研究与实践”子课题项目系列教材之一。

随着社会的进步、科技的发展和高等教育水平的不断提高，数学已经渗透到包括经济、信息、人文社科等各个领域。人们越来越深刻地认识到数学教育在成人高等教育中的重要作用。大学数学类课程不仅是理工类学生的必修课程，而且已经成为成人教育财经类专业教学计划中的重要基础课程。针对成人高等教育财经类专业学生的学习特点和需求，在多年教学实践的基础上，我们组织编写了这本《线性代数》教材。

在本书的编写过程中，我们特别注重了以下几个方面：

一、在保持理论严谨性的基础上，强调通俗性和直观性。对于一些理论性较强的内容，本教材着重分析基本概念、基本思路和基本方法，不过分强调严格的数学证明，而是着眼于培养学生的科学思维能力和分析、解决问题的能力。叙述上尽可能详尽而又突出重点，力求通俗易懂、深入浅出。在内容安排和概念引入等方面尽可能联系直观背景。

二、内容的编排更符合学生的思维习惯。本教材在内容的编排上注重循序渐进，使学生有一个由感性到理性的渐进过程。在内容的衔接等细微之处，注重顺应人们从具体到抽象的思维习惯，增加了教材的可读性，便于自学。

三、增加了利用计算机解决数学问题的内容。为了让学生更集中精力了解和熟悉运算规则，掌握基本概念和基本方法，尽管本书的例题和习题涉及的矩阵和行列式的阶数都比较低，数字也比较简单，但运算量也是比较大的。为此，本书增加了数学软件及其应用部分的内容，旨在使学生初步了解 Mathematica 软件，并学会利用它进行线性代数中的一些基本运算。本部分可作为选学内容，不影响本教材的体系和完整性。

另外，为方便学生对所学内容的巩固和自测，本书在每一章的习题中增加了客观性题目，包括填空题和单项选择题。

本教材既可用于成人高等教育、高职高专的教学，也可作为高等教育自学

考试的参考用书。

本课题项目负责人为山东财政学院硕士生导师韩庆华教授，教材编写人员由中国海洋大学、中国石油大学、山东科技大学、青岛大学、山东农业大学、山东财政学院、山东经济学院、青岛科技大学、莱阳农学院、山东经济管理干部学院等高校长期从事会计学、金融学专业教学实践的教授或副教授组成。

本教材主要由山东财政学院统计与数理学院以及继续教育学院部分分院任课教师分工撰写：马玉林撰写第 1 章，刘蒲凰、商力撰写第 2 章，刘纪芹、乔风新撰写第 3 章，郝秀梅撰写第 4 章，陈晓兰撰写第 5 章第 1、2、3 节，刘太琳撰写第 5 章第 4 节，韩建新、杨兆兴撰写第 6 章。本教材由统计与数理学院院长陈晓兰提出总体编写框架、统稿及审定。

在本书的编写过程中，我们参阅、借鉴了大量文献资料，并得到有关部门和有关专家、学者的指导与帮助，在此表示诚挚的谢意。特别感谢山东财政学院继续教育学院院长韩庆华教授和经济科学出版社吕萍女士的大力支持。

限于编者的学识水平，书中不当之处，诚请同行专家及读者不吝赐教。

编　者

2007 年 11 月

目录

第1章

行列式

在自然科学、工程技术和管理科学中，有许多问题往往归结为一个线性方程组，而线性方程组的理论和相关应用是线性代数研究的主要内容之一．历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的，是研究线性方程组的重要工具．另外，行列式还是本教材后续章节研究矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具．

本章主要内容有：行列式的定义、性质、计算方法以及解 n 元线性方程组的克莱姆法则．

§1.1 n 阶行列式

1.1.1 二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

考虑含有两个未知量 x_1，x_2 的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

在中学代数中提到过，可以利用加减消元法得到：

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了便于记忆，我们引入二阶行列式定义：

我们称符号 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为**二阶行列式**．它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，其中数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 叫做**行列式的元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表明该元素在第 i 行，第二个下标 j 表明该元素在第 j 列．在行列式里，把从左上角 a_{11} 处到右下角 a_{22} 处的对角线叫做**主对角线**，把右上角 a_{12} 处到左下角 a_{21} 处的对角线叫做**次对角线**．因此，二阶行列式的值等于主对角线上两个元素的乘积减去次对角线上两个元素的乘积．这就是二阶行列式的计算法则．二阶行列式的计算也可用图 1.1 所示**"对角线法则"**来记忆：

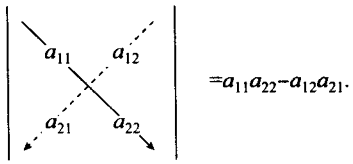

图 1.1

例 1.1.1 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2.$

利用二阶行列式的定义，式（1.2）可以表示为：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}. \tag{1.3}$$

其中，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

当 $D\neq0$ 时，式（1.3）即为二元一次线性方程组的唯一解．

例 1.1.2 解二元线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2=4, \\ x_1+2x_2=9. \end{cases}$$

解 由于 $D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times2-(-3)\times1=7\neq0$，方程组有唯一解．

又有：

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}=4\times2-(-3)\times9=35,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 9\end{vmatrix}=2\times 9-4\times 1=14.$$

因此，可得方程组的唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{35}{7}=5，\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{14}{7}=2.$$

2. 三阶行列式

对于含有三个未知量 x_1，x_2，x_3 的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1.4}$$

可以进行类似二元线性方程组的讨论，为此引入三阶行列式定义，

我们称符号 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 为**三阶行列式**，它表示代数和

$$a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\tag{1.5}$$

其中，行列式的横排、纵排分别成为它的行和列，a_{ij}称为行列式的元素（i，$j=1$，2，3）. 显然，三阶行列式的行数和列数相等，都是3，并且共含有 3^2 即9个元素.

由上述定义可知，三阶行列式表示6项的代数和，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠之以正负号，其规律性也可利用图 1.2 中的“对角线法则”来表示. 图中沿各实线相连的三个元素的积取正号；沿各虚线相连的三个元素的积取负号. 它们的代数和就是式（1.5）所表示的三阶行列式.

例 1.1.3 计算行列式：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}&=1\times 2\times 2+(-1)\times 1\times 3+0\times 0\times(-1)\\ &\quad-(-1)\times 2\times(-1)-0\times 1\times 2-1\times 0\times 3\\ &=-1.\end{aligned}$$

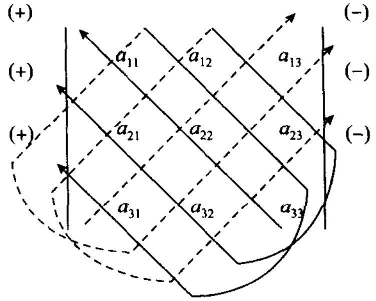

图 1.2

例 1.1.4 当 x 取何值时，$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & x\\4 & x & 0\\1 & 0 & x\end{vmatrix}=0.$

解 原方程可化为 $D=2x^2-4x=0$，解之得，$x=0$ 或 $x=2.$

利用加减消元法可求得方程组（1.4）的解，其结果同样可用三阶行列式表示：

当 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组（1.4）有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.6}$$

其中，$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\b_2 & a_{22} & a_{23}\\b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\a_{21} & b_2 & a_{23}\\a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\a_{21} & a_{22} & b_2\\a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$.

一般称 D 为方程组（1.4）的系数行列式．而 D_1 则是把 D 的第一列元素依次换成了常数项 b_1，b_2，b_3，同时其他各列保持不变所构成的三阶行列式；D_2，D_3 也有类似的特点．

比较二元线性方程组和三元线性方程组的求解式（1.3）和式（1.6），我们可以发现两者类似．在以后的学习中，我们将二元、三元线性方程组求解的结论推广到 n 元线性方程组的情况，也可以得到类似的结论，即克莱姆法则．

1.1.2 n 阶行列式

我们已经讨论了二阶、三阶的行列式．为了统一起见，定义 $|a_{11}|=a_{11}$，

并称其为一阶行列式（注意：这里不是绝对值）. 在此基础上，下面我们来定义 n 阶行列式.

定义 1.1.1 假定 $n-1$ 阶行列式已定义，则定义 n 阶行列式为：

$$D=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

其中，右端第一个行列式为将 a_{11} 所在的行和列划去后剩下元素所构成的 $n-1$ 阶行列式，第二个行列式为将 a_{12} 所在的行和列划去后剩下元素所构成的 $n-1$ 阶行列式，……，第 n 个行列式是将 a_{1n} 所在的行和列划去后剩下元素所构成的 $n-1$ 阶行列式，并且各 $n-1$ 阶行列式前所取符号由 $(-1)^{1+j}$，$(j=1, 2, \cdots, n)$ 决定，即各 $n-1$ 阶行列式前符号为正负相间.

当 $n=2$, 3 时，就得到二阶、三阶行列式，且与前面的定义相同.

这样，我们给出了任意阶行列式的定义. 与二阶、三阶行列式类似，行列式 D 中的数 a_{ij} 称为元素，将元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn} 所在的斜线称为 D 的**主对角线**，又把 $a_{1,n}$，$a_{2,n-1}$，$\cdots$，$a_{n,1}$ 所在的斜线称为 D 的**次对角线**.

注意：用数学归纳法可以证明 n 阶 $(n>1)$ 行列式 D 展开后共有 $n!$ 项，其中一半为正，一半为负，且每项都是 n 个不同元素的乘积，这 n 个元素位于 D 中不同的行和不同的列.