最新成人高考复习指导丛书

数学

文史财经类

主　编　涂政健
副主编　晏美林
涂泽宁
徐坤明

北京理工大学出版社

前　　言

为了满足成人在短期内通过业余学习，达到适应全国成人高考的要求，我们根据国家教委最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，组织了各有关学科的专家、中学特、高级教师及长期从事成人高考辅导工作、具有多年教学经验的骨干教师精心编写了本套丛书。丛书包括政治、语文、数学（分文、理）、英语、物理、化学、历史、地理 8 科，共 9 本。可供参加各类成人高等学校（包括广播电视大学、职工高等学校、农民高等学校、管理干部学院、教育学院、教师进修学院、独立设置的函授学院和普通高等学校举办的成人高等学历教育等）招生考试的考生使用。

丛书为了更好地让成人考生通过自学尽快掌握成人高考考试的方向，结合成人考生的特点，每一章都按单元进行了编写，内容包括以下几个部分：

[考试大纲] 旨在让考生更好地理解、掌握考试大纲中各知识点的范围和应达到的程度。

[知识要点] 意在帮助考生理解本章节的内容，把握本单元的重点，在学习的方式和方法上进行点拨，同时它也是教材的精髓。

[典型例题] 精选了部分例题，为基础知识的运用作了示范，有利于帮助考生掌握各类题型的解题思路、方法、规律和技巧。

[近年考点分析] 通过分析近几年的考点及考题，旨在使考生对本章节的测试范围、能力要求、考查特点、测试分值及方向，有一个综合的把握。

[练习及答案] 每章节都配有针对性训练，题型新颖、灵活、题量适中；每册书后都附有全真模拟题和近几年全国成人高考试题，且均有习题答案或提示，可供考生参考。

这套丛书的编写出版，得益于各方的大力支持，在此，向鼎力支持这项工作的广大同仁表示衷心的感谢，并向为这项工作付出辛勤汗水的各位编委致以崇高的敬意！

本套丛书由全国优秀教师刘建杰任主编，由全国特级教师黄磊等多位特、高级教师审稿，在此一并表示感谢！

由于编写工程浩大，虽竭尽全力，不足之处仍在所难免，恳请广大读者批评指正。

编委会

2001 年 4 月

目　　录

第一部分　代　数

第二部分　三　角

第三部分　平面解析几何

第一部分　代　　数

第一章　数、式、方程和方程组

【考试大纲要求】

1. 理解有理数、实数及数轴、绝对值、倒数、算术平方根等概念，并会进行有关计算。

2. 理解有关根式、分式、二次根式的概念，掌握它们的一些性质和运算法则。

3. 掌握一元一次方程、一元二次方程的解法，能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题。

4. 会解有惟一解的二元一次方程组、三元一次方程组；会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解简单的由两个二元二次方程组成的方程组。

【内容提要】

一、数

1. 实数系的分类

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\left.\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\right\}\text{有限小数或循环小数}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}
$$

注：实数可以把范围扩展为复数。

2. 实数的有关概念

(1) *数轴*　规定了原点、正方向、单位长度的直线叫数轴，它把实数与数轴上的点建立了一一对应的关系，且在数轴右边的点所表示的数，总比左边的大（如图 1-1)。

(2) *相反数*　只有符号不同的两个数，叫做互为相反数。

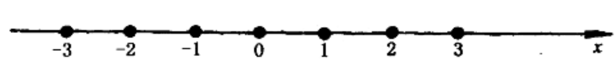

图 1-1

(3) *倒数*　乘积是 1 的两个数互为倒数。

(4) *绝对值*　一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。即

$$|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}\qquad \text{或}\ |a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0)\\-a(a<0)\end{cases}$$

3. 实数的运算

(1) 基本运算：

实数间可以进行加、减、乘、除、乘方、开方运算，但要注意：除法运算时，除数不能为 0；任何实数都可以开奇数次方，只有非负实数才能开偶次方；运算结果仍然是实数。

(2) 运算法则：

加法：同号两数相加，取原来的符号，并把绝对值相加，异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值，一个数与零相加仍得这个数。

减法：减去一个数，等于加上这个数的相反数。

乘法：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘，零乘以任何数都得零。

除法：两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除，零除以任何一个不为零的数等于零，任何数除以一个不为零的数，等于乘以这个数的倒数，零不能作除数。

乘方：正数的任何次幂是正数；负数的偶次幂是正数，奇次幂是负数；零的正数次幂等于零。

开方：正数的奇次方根是一个正数，正数的偶次方根有两个，它们互为相反数，零的 n 次方根都是零。负数的奇次方根只有一个，它是一个负数；在实数范围内，负数没有偶次方根。

(3) 运算律　设 a，b，c 为任意实数，则有：

运　算　律	加　　法	乘　　法
交　换　律	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
结　合　律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
分　配　律	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	

(4) 运算顺序　先乘方、开方，再乘、除，最后做加、减，有括号的，先算里层括号中的，逐层去括号，但有时为简化计算，可根据运算律，改变它们的运算顺序。

二、式

1. 代数式的概念

(1) 代数式　用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数或表示数的字母连结而成的式子叫代数式，单独的一个数或者一个字母也是代数式。

(2) 代数式的值　用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做代数式的值。

(3) 代数式的分类：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

2. 整式

(1) 整式的有关概念　由数与字母的积构成的代数式，叫做单项式；几个单项式的和叫做多项式；单项式和多项式统称整式。

(2) 整式的运算　整式能进行加、减、乘的运算，整式加、减、乘的结果仍是整式，整式的运算符合交换律、结合律、分配律。

幂的运算法则：

①同底数幂相乘，即：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

②同底数幂相除，即：$a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a\neq 0, m>n)$

③幂的乘方，即：$(a^m)^n = a^{mn}$

④积的乘方，即：$(ab)^n = a^n b^n$

常用的乘法公式：

①完全平方和(差)公式：$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

②平方差公式：$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

③立方和(差)公式：$(a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

(3) *因式分解* 就是把一个多项式化为几个整式的积的形式，常用的方法有：提公因式法；公式法；分组分解法；十字相乘法；求根公式法等。

3. 分式

设 A, B 表示两个整式，如果 B 中含有字母，式子 A/B 就叫做分式（注意分母 B 的值不能为零，否则分式没有意义），分子与分母没有公因式的分式，叫做最简分式。

(1) *分式的基本性质* 分式的分子、分母都乘以（或除以）同一个不等于 0 的整式，分式的值不变，即

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M},\quad \frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}\quad \text{（其中 } M \text{ 是不等于零的整式）}$$

(2) *分式的符号法则* 分式的分子、分母与分式本身的符号，改变其中的任何两个，分式的值不变。

(3) *分式的运算*：

加、减运算：$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

乘法运算：$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

除法运算：$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

乘方运算：$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

4. 二次根式

(1) *二次根式概念* 我们知道，一个负数没有平方根，而一个正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数，其中正的平方根叫做算术平方根，记作 $\sqrt{a}$，零的平方根是零。把 $\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$ 叫做二次根式。

(2) *二次根式的性质有* $(\sqrt{a})^2 = a$ $(a\geqslant 0)$ $\qquad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a>0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

(3) *二次根式的有关概念*

最简二次根式：被开方数的每一个因式的指数都小于根指数 2，且开方数不含分母的二次根式，叫做最简二次根式。

同类二次根式：几个二次根式化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，这几个二次根式就叫做同类二次根式。

(4) *二次根式运算*

二次根式的加减：先把各个二次根式化为最简二次根式，再合并同类根式；

二次根式的乘法：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　　　　$(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$

二次根式的除法：$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　　　　$(a\geqslant 0,\ b>0)$

(5) *分母有理化*　把分母中的根号化去的过程。方法是运用分式的基本性质在分式的分子、分母同时乘以一个有理化因式；其中 $a\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{b}$ 互为有理化因式；$a\pm\sqrt{b}$ 与 $a\mp\sqrt{b}$ 互为有理化因式；$a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}$ 与 $a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}$ 互为有理化因式。

三、方程和方程组

1. 方程

(1) *方程的有关概念*　含有未知数的等式叫做方程。能使方程左右两边相等的未知数的值，叫做方程的解，求方程的解的过程叫做解方程。

(2) *方程的同理原理*

方程的两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，所得方程与原方程是同解方程。

方程的两边都乘以（或都除以）不等于零的同一个数，所得方程与原方程是同解方程。

(3) *一元一次方程*　只含有一个未知数，且未知项的最高次数是 1 的方程（未知数系数不为 0），它的标准形式为：$ax+b=0$（其中 $a\neq 0$），它的解为 $x=-\dfrac{b}{a}$。

注意：当 $a=0$ 时，$ax+b=0$ 不是一元一次方程，此时若 $b=0$，则任何实数都是它的解；若 $b\neq 0$，则方程无解。

(4) *一元二次方程*　形如 $ax^2+bx-c=0$ 的方程叫做一元二次方程。

判别式 $\Delta=b^2-4ac$

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根。

它的解为：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　　（其中 $b^2-4ac\geqslant 0$）

根与系数的关系：设 x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两个根，则有 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$。

反之，若 p，q 为一个一元二次方程的两根，则此方程为：$x^2-(p+q)x+pq=0$。

2. 方程组

(1) *一次方程组*　由几个一次方程组成并含有两（三）个未知数的方程组，叫做二（三）元一次方程组。

二元一次方程组的解法有：代入消元法；加减消元法等。

三元一次方程组的解法是用代入消元法或加减消元法，通过“消元”使其转化为二元一次方程组来解。

(2) *二元二次方程*　含有两个未知数，且未知项的最高次数是二的方程叫二元二次方程。

二元二次方程组：由一个二元二次方程和一个二元一次方程，或由两个二元二次方程组

成的方程组，叫做二元二次方程组。

由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的二元二次方程组，可用代入法来解；由两个二元二次方程组成的方程组只限于解几种特殊的方程组。

第一节 数

【复习要求】

1. 理解什么是有理数，实数及数轴，相反数，绝对值，算术平方根；知道有理数，实数之间的关系；会进行实数的大小的比较；会求一个数的绝对值；会求一个数的倒数，知道算术平方根一定是非负数。

2. 会熟练地进行实数的加、减、乘、除，乘方的运算，会进行非负实数的开方的运算。

【例题讲解】

例 1 a 是实数，下列说法对吗？若不对，应附加什么条件才能使之成立？

(1) $-a$ 是负数　(2) $2a$ 是偶数　(3) $|a|$ 是正数　(4) $3a>2a$　(5) $|a|=|-a|$

(6) $|a|=a$　(7) $a^2>0$　(8) $(-a)^2=-a^2$　(9) $(-a)^3=-a^3$

解：(1) 不对，当 $a>0$ 时成立；(2) 不对，当 a 是整数时才成立；(3) 不对，当 $a\neq 0$ 时才成立；(4) 不对，当 $a>0$ 时才成立；(5) 对的；(6) 不对，当 $a\geqslant 0$ 时才成立；(7) 不对，当 $a\neq 0$ 时才成立；(8) 不对，只有 $a=0$ 时才成立；(9) 对的。

【评析】 对概念的理解要全面、准确，并注意思维的严密性。

例 2 (1) 两个无理数的和（　　）

A. 一定是有理数　B. 一定是无理数　C. 一定是实数　D. 不会是 0

(2) 在下面 4 个命题中：

①相反数是本身的有理数只有 0；

②立方等于本身的数只有 1 和 0；

③只有负数的绝对值是它的相反数；

④一个数的倒数等于它本身的只有 1。

正确的命题有（　　）个。

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

解题分析：判断一个结论是否成立，通常用特殊值法来否定。

解：(1) 选 C　(2) 选 A

例 3 (1) 当 $1<a<5$ 时，化简：$\sqrt{(a-1)^2}+|5-a|$

(2) 化简：$\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}$

解题分析：化简含 $|a|$ 和 $\sqrt{a^2}$ 的式子，必须先判断式中 a 的符号才能进行。

解：(1) $\because 1<a<5$　$\therefore a-1>0,\ 5-a>0$　$\therefore \sqrt{(a-1)^2}+|5-a|=a-1+5-a=4$

(2) $$\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}=\begin{cases}-x-(x-1)=-2x+1 & x<0\\ x-(x-1)=1 & 0\leqslant x<1\\ x+x-1=2x-1 & x\geqslant 1\end{cases}$$

【评析】 化简含 $|a|$ 和 $\sqrt{a^2}$ 的式子，关键在判断式中 a 的符号，若不能直接判断时，应分类讨论。

例 4 已知 $x>0$，$y<0$，$|y|>|x|$，用不等号连接 x，y，$|y|$，$-x$

解：$\because x>0$，且 $|y|>|x|$　　$\therefore |y|>x>0$　　而 $y<0$　　$\therefore -y>x$　即 $y<-x<0$

$\therefore y<-x<x<|y|$

【评析】 实数大小比较，可利用数轴性质，绝对值性质，作差方法来处理。

例 5 计算

(1) $-40\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2\div 0.5\div\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times[(-2)^2-2^2]$

(2) $[-(-2\sqrt{2})^2-(-1)^2]\times\frac{1}{-0.3^2}\div\left(3\frac{1}{3}\right)+|\sqrt{2}-2|$

解：(1) 原式 $=-40\frac{1}{2}\times\left(-\frac{17}{12}\right)^2\div 0.5\div\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times[4-4]$

$=-\frac{81}{2}\times\frac{289}{144}\times 2\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}-0$

$=-289$

(2) 原式 $=(-8-1)\times\left(-\frac{100}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2-(\sqrt{2}-2)$

$=-9\times(-1)-\sqrt{2}+2$

$=11-\sqrt{2}$

【评析】 算式中分数、小数并存时，常将小数化为分数：在幂运算中，底数是带分数的要化成假分数；底数是小数的化为分数较为方便；注意合理运用运算律，常可使运算简便。

【练习】

1. 选择题

(1) 如果 $|x|+|y|=0$，那么 x，y 的值是（　　）

A. 互为相反数　　B. 互为倒数　　C. $x=0$，$y=0$　　D. $x>0$，$y<0$

(2) 两个无理数的差（　　）

A. 一定是无理数　　B. 可能为有理数　　C. 一定是有理数　　D. 不会为零

(3) 如果 $|-a|>-a$，那么（　　）

A. $a>0$　　B. $a<0$　　C. $a<-1$　　D. $-1<a<0$

(4) 下列说法错误的是（　　）

A. 正数的偶数次幂是正数　　B. 负数的偶数次幂是正数

C. 负数的奇次幂是负数　　D. 任何数的偶次幂都是正数

(5) 绝对值小于 4 的所有非负整数的和是（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 9　　D. 10

2. 填空题

(1) 如果 $-|a|=-a$，那么 a ______ 0；如果 $-|a|=a$，那么 a ______ 0；如果 $|a|>a$，那么 a ______ 0。

(2) 当 $a\leqslant 2$，$\sqrt{(2-a)^2}=$______；当______时，$\sqrt{(2-a)^2}=a-2$。

(3)______的相反数是它本身，______的倒数是它本身，______的绝对值是它本身；______的平方是它本身，______的立方是它本身。

(4) 如下图，已知实数 a，b，c 在数轴上对应点如下图，化简 $\sqrt{(a+b)^2}-|c-b|-|a+c|$

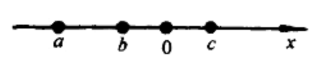

图 1－2

3. **计算下列各题**

(1) $-2\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}\div(-7)\div\left(-1\frac{2}{3}\right)\times 1.5$

(2) $\left\{4\frac{1}{2}+\left[(-5)^2\times\left(-\frac{1}{25}\right)-0.8\right]\right\}\div 5\frac{2}{5}$

(3) $\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{2^3}{3}\div|-3|\times\frac{1}{3}+(-0.25)^3\div\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

【参考答案】

1. 选择题：

(1) C　　(2) B　　(3) A　　(4) D　　(5) B

2. 填空题：

(1)$\geqslant$　$\leqslant$　$<$　(2)$2-a$　$a\geqslant 2$　(3)0　1或-1　非负数　0或1　0,1或-1　(4)0

3. 计算题：

(1) $-\frac{1}{4}$　　(2) $\frac{1}{2}$　　(3) $-\frac{1}{3}$

第二节　式

【复习要求】

1. 理解什么叫单项式、多项式、整式、分式，对给定的有理式会判断它是整式还是分式；
2. 能熟练地进行整式的四则运算，灵活运用幂的运算法则及乘法公式；
3. 掌握常用的多项式因式分解的方法；
4. 能熟练运用分式的基本性质，对分式进行四则运算；
5. 理解二次根式的定义，在运算时能灵活运用有关的性质。
6. 在对根式进行化简与运算时，会将一个二次根式化成最简根式；会对二次根式进行四则运算；会利用分母有理化进行除法运算。

【例题讲解】

例 1　计算

(1) $(x^3+6x-5)+(2x+4x^2)-(4x^2-7x-6x^3)$

(2) $(a+3b)^2(a^2-3ab+9b^2)^2-(a-3b)^2(a^2+3ab+9b^2)^2$

(3) $(2x+3y-1)(2x-3y+1)$

(4) $\left(1-\frac{x}{x+1}\right)-\frac{x+3}{x^2-1}\div\left(1+\frac{6x+2}{x^2-2x+1}\right)$

解题分析：整式与分式的四则运算，就是根据法则和乘法公式对其化简。

解：(1) 原式 $=x^3+6x-5+2x+4x^2-4x^2+7x+6x^3$

$=(x^3+6x^3)+(4x^2-4x^2)+(6x+2x+7x)-5$

$=7x^3+15x-5$

(2) 原式 $=[(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)]^2-[(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)]^2$

$=(a^3+27b^3)^2-(a^3-27b^3)^2$

$=a^6+54a^3b^3+729b^6-(a^6-54a^3b^3+729b^6)$

$=108a^3b^3$

(3) 原式$=[2x+(3y-1)][2x-(3y-1)]$

$$=(2x)^2-(3y-1)^2$$
$$=4x^2-(9y^2-6y+1)$$
$$=4x^2-9y^2+6y-1$$

(4) 原式$=\dfrac{x+1-x}{x+1}-\dfrac{x+3}{x^2-1}\div\dfrac{6x+2+x^2-2x+1}{x^2-2x+1}$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\div\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+1}$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\div\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\times\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2}{(x+1)^2}$$

【评析】整式的加减运算就是合并同类项，多项式的乘法运算要注意符号的确定：分式的加减运算通常是对分母通分，分式的乘除运算中，分子分母能分解因式的，宜先分解，最后结果化成最简分式或整式。

例 2 (1) 已知 $x+\dfrac{1}{x}=2$， 求：①$x^2+\dfrac{1}{x^2}$；②$x-\dfrac{1}{x}$

(2) 已知 $x=\dfrac{1}{3}$，求$\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)\div\left[1\div\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4x^2}\right)\right]\div\left(1-\dfrac{2}{2x+1}\right)$

解题分析：代数式的求值问题通常是先化简，后求值或将代数式化为含已知等式的形式。

解：(1) ①$\because x+\dfrac{1}{x}=2$ $\therefore\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=4$ 即 $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=4$ $\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$

②$\because\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=0$ $\therefore x-\dfrac{1}{x}=0$

(2) $\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)\div\left[1\div\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4x^2}\right)\right]\div\left(1-\dfrac{2}{2x+1}\right)$

$$=\frac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}\div\left[1\div\frac{4x^2-4x+1}{4x^2}\right]\div\frac{2x+1-2}{2x+1}$$
$$=\frac{8x}{(2x-1)(2x+1)}\div\frac{4x^2}{(2x-1)^2}\div\frac{2x-1}{2x+1}$$
$$=\frac{2}{x}$$

当 $x=\dfrac{1}{3}$时，原式$=6$。

例 3 在实数范围内分解因式

(1) x^2-y^2+2y-1

(2) x^6-y^6

(3) $(2x+3y)^2-3(2x+3y)-4$

(4) $(x^3-y^3)-(x-y)-xy(y-x)$

解题分析：对多项式进行因式分解常用的方法有：提取公因式法、分组分解法、十字相

乘法、公式法，可化为 $x^2+(a+b)x+ab$ 型的二次三项因式分解法、拆项法等，分解因式要根据多项式的特点灵活地运用相应的方法。

解：(1) 原式 $= x^2-(y^2-2y+1)=x^2-(y-1)^2$

$= (x+y-1)(x-y+1)$

(2) 原式 $= (x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

(3) 原式 $= [(2x+3y)-4][(2x+3y)+1]=(2x+3y-4)(2x+3y+1)$

(4) 原式 $= (x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)+xy(x-y)$

$= (x-y)[(x^2+xy+y^2)-1+xy]$

$= (x-y)(x^2+2xy+y^2-1)=(x-y)[(x+y)^2-1]$

$= (x-y)(x+y+1)(x+y-1)$

【评析】要掌握因式分解的基本方法，使用提取公因式法时，提出的因式是各项中相同因式的最低次幂；用公式法时，要注意观察多项式的特点，看其是否符合公式，灵活运用公式。

例 4 化简：

(1) $\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{1}{18}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-7\sqrt{\frac{1}{98}}$ (2) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-2x$

解题分析：

(1) 根式的加减运算必须将各项先化为最简根式，然后合并同类项；

(2) 直接通分计算较为复杂，可先对分母进行分母有理化。

解：(1) 原式 $= \frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$= \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}=\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

(2) 原式 $= \frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})-\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}-2x$

$= \frac{x+1+\sqrt{x(x-1)}-\sqrt{x(x+1)}+x}{x+1-x}-2x$

$= 2x+1-2x=1$

【练习】

1. 选择题：

(1) $-(x-2y)(x+2y)$ 是下列哪个多项式分解的结果（ ）

A. x^2-4y^2 B. $-x^2+4y^2$ C. $-x^2-4y^2$ D. x^2+4y^2

(2) 下列根式中，最简根式是（ ）

A. $\sqrt{27a}$ B. $\sqrt{4+a^2}$ C. $\sqrt{\frac{1}{a}}$ D. $\sqrt{3a^2b}$

(3) 把 $a\cdot\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 的根号外的 a 移入根号内得（ ）

A. $\sqrt{a}$ B. $-\sqrt{a}$ C. $\sqrt{-a}$ D. $-\sqrt{-a}$

(4) 已知 $a=1+\frac{1}{b}$，$b=1+\frac{1}{a}$，且 $a\neq0$，$b\neq0$，那么 b 等于（　　）

A. $a-1$　　B. $1-a$　　C. $1+a$　　D. a

(5) 已知 $y=ax^5+bx^3+cx-6$ 且当 $x=2$ 时，$y=6$，那么当 $x=-2$ 时 y 的值等于（　　）

A. -18　　B. -12　　C. 12　　D. 18

2. 填空题

(1) 一个多项式除以 $x-1$ 商 $x+y+1$，余 1，那么这个多项式为______。

(2) 当 x ______时，$\frac{x}{\sqrt{x-3}}$没有意义。

(3) $(xy-1)^2\ (x^2y^2+xy+1)^2=$______。

(4) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=$______。

(5) 若 x,y 为实数且 $(5x+3)^2+|y-2|=0$，则 $x=$ ______ $y=$ ______。

3. 把下列各式分解因式

(1) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$　　(2) $3m^2+4m-4$

(3) $3(a-b)^2+4(a-b)-15$　　(4) $3y^2-8xy+4x^2$

4. 已知 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求下列各式的值。

(1) x^2-xy+y^2　　(2) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$

【参考答案】

1. 选择题：

(1) B　(2) B　(3) D　(4) D　(5) A

2. 填空题：

(1) x^2+xy-y　(2) $\leqslant3$　(3) $x^6y^6-2x^3y^3+1$　(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$　(5) $-\frac{3}{5}$，2

3. (1) $(x-y)^2(x+y)$　(2) $(3m-2)(m+2)$　(3) $(3a-3b-5)(a-b+3)$

(4) $(2x-3y)(2x-y)$

4. (1) 9　(2) 10

第三节　方程和方程组

【复习要求】

1. 会用方程的同解原理，熟练地解一元一次方程；

2. 会熟练运用一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式，并会用因式分解法和配方法求一元二次方程的解，会根据判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，判断方程实根的个数，会灵活运用根与系数的关系解有关问题。

3. 掌握代入消元法和加减消元法，通过消元来求二元一次方程组，三元一次方程组的惟一解。

4. 会用代入消元法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组，会解某几种特殊类型的由两个二元二次方程组成的方程组（用加减消元法可以消去某个未知数的，可以消去二次项的，以及至少有一个方程可以分解成两个一次方程的）。

【例题讲解】

例 1　解下列一元二次方程：

(1) $3x^2-5x-8=0$　　(2) $x^2-2x=5$

解：

(1)（公式法）　因为　$a=3$，$b=-5$，$c=-8$

由求根公式，得　$x_{1,2}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-8)}}{2\cdot 3}=\dfrac{5\pm 11}{6}$

所以　$x_1=\dfrac{8}{3}$，$x_2=-1$

此题也可用因式分解法

原方程化为　$(3x-8)(x+1)=0$

得　$3x-8=0$ 或 $x+1=0$

所以　$x_1=\dfrac{8}{3}$，$x_2=-1$

(2) 将原方程配方得　$(x-1)^2=6$

两边开方，得　$x-1=\pm\sqrt{6}$

所以　$x_1=1+\sqrt{6}$，$x_2=1-\sqrt{6}$

【评析】解一元二次方程时，能迅速因式分解的用因式分解法，否则用求根公式法，配方法主要用于证明。

例 2　当 m 为何值时，方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有　(1) 两个不相等的实数根；(2) 两个相等的实数根；(3) 没有实数根。

解：判别式 $\Delta=(2m+1)^2-4m^2\cdot 1=4m+1$

(1) 当 $\Delta=4m+1>0$，即 $m>-\dfrac{1}{4}$ 且 $m\neq 0$ 时，原方程有两个不相等的实数根，

(2) 当 $\Delta=4m+1=0$，即 $m=-\dfrac{1}{4}$ 时，原方程有两个相等的实数根，

(3) 当 $\Delta=4m+1<0$，即 $m<-\dfrac{1}{4}$ 时，原方程没有实数根。

【评析】判别式仅对一元二次方程而言，对含有字母系数的一元二次方程，不要忽略了二次项系数不等于零的条件。

例 3　已知方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根为 α，β，不解方程，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$

解题分析：由根与系数的关系得：$\alpha+\beta=-3$，$\alpha\cdot\beta=1$，只需将 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$，$\alpha^3+\beta^3$ 化成含两根之和与两根之积的形式，代入就可求其值。

解：由根与系数的关系知：$\alpha+\beta=-3$，$\alpha\cdot\beta=1$

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-3}{1}=-3$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)[\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]$

$=(-3)[(-3)^2-3\cdot 1]=-18$

例 4　m 为何值时，方程 $2x^2+(m-2)x+m-5=0$ 的一根大于 2，另一根小于 2。

解题分析：因为方程有两个不等实根，应先考虑判别式 $\Delta>0$，若直接用求根公式求出两

根，再根据条件得到不等式求解，较复杂，可灵活运用根与系数的关系。

解：由判别式 $\Delta=(m-2)^2-4\times2(m-5)=m^2-12m+44=(m-6)^2+8\geqslant8$

$\therefore$方程有两个不相等的实根，又设方程两根为 x_1,x_2，依题意有 $(x_1-2)(x_2-2)<0$

即 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+4<0$

由根与系数关系得：

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{m-2}{2}\\ x_1x_2=\dfrac{m-5}{2}\end{cases}\quad \text{则有}\quad \frac{m-5}{2}+\frac{2(m-2)}{2}+4<0$$

解之得：$3m-1<0$ 即 $m<\frac{1}{3}$。

【评析】根与系数的关系的应用就是不通过解一元二次方程而得到两个根的和与积的值。

例 5 (1) 已知 $x^2-2x+q=0$ 两根的差为 8，求 q 的值。

(2) 已知方程 $3x^2+5x-1=0$，不解方程，求作一个一元二次方程，使它的两根分别等于已知方程两根的 2 倍。

解：(1) 设 $x^2-2x=q=0$ 的较小的一根为 a，另一根为 $a+8$，由根与系数的关系知：

$$\begin{cases}a+(a+8)=2 & ①\\ a\cdot(a+8)=q & ②\end{cases}$$

由①可得 $a=-3$，代入②，得 $q=-15$

(2) 设所求方程为 $y^2+py+q=0$，两根分别为 y_1，y_2；

又设方程 $3x^2+5x-1=0$ 的两根分别为 x_1，x_2，

则：$x_1+x_2=-\frac{5}{3}$，$x_1\cdot x_2=-\frac{1}{3}$

又 $y_1=2x_1$，$y_2=2x_2$。

$\therefore p=-(y_1+y_2)=-(2x_1+2x_2)=-2(x_1+x_2)=\frac{10}{3}$，

$q=y_1\cdot y_1=2x_1\cdot 2x_2=4x_1\cdot x_2=-\frac{4}{3}$

所以所求方程为 $y^2+\frac{10}{3}y-\frac{4}{3}=0$，即 $3y^2+10y-4=0$

【评析】写新方程时，要注意一次项系数的符号。

例 6 解下列方程组

(1) $\begin{cases}2x-y=1 & \cdots\cdots①\\ x^2-4y^2+x+3y-1=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x^2+2y^2-x+y=12 & \cdots\cdots①\\ x^2+y^2-x=6 & \cdots\cdots②\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+y^2=5 & \cdots\cdots①\\ 2x^2-3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x^2+2xy=y^2=9 & \cdots\cdots①\\ (x-y)^2-3x+3y-1=9 & \cdots\cdots②\end{cases}$

解题分析：

(1) 这个方程组是由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组，可以用代入消元法来解。

(2)注意到这个方程组中的两个方程的 x 的对应项系数比例对应在比例$\left(\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}\right)$，因此①－②，可以消元。

(3) 这个方程组中方程②的左边可以分解成两个一次因式的积，而右边是 0，故方程②可

化为两个二元一次方程 $2x+y=0$，$x-2y=0$，分别与方程①组成方程组，从而化为方程(1) 类型。

(4)注意到这个方程组中两个方程都可以化为两个二元一次方程，所以原方程组化为 4 个二元一次方程组，解这 4 个二元一次方程组，就可得到原方程组的所有的解。

解：(1) 由①得 $y=2x-1$ ③

把③代入②，得 $x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)-1=0$

整理，得 $15x^2-23x+8=0$ 解得 $x_1=1$ 或 $x_2=8/15$

分别代入③，得 $y_1=1$ 或 $y_2=1/15$

所以原方程组的解为：$\begin{cases}x_1=1\\y_1=1\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\dfrac{8}{15}\\y_2=\dfrac{1}{15}\end{cases}$

(2) 由①－②得 $y^2+y-6=0$ 解之得 $y=2$ 或 -3

代入①得 $x_1=2$ 或 -1 ∴方程的解为 $\begin{cases}x_1=2\\y_1=2\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1\\y_2=2\end{cases}$

(3) 因方程②可化为 $(2x+y)(x-2y)=0$

∴原方程组为 $\begin{cases}2x+y=0\\x^2+y^2=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-2y=0\\x^2+y^2=5\end{cases}$

解之得原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=1\\y_1=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1\\y_2=2\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=2\\y_3=1\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-2\\y_4=-1\end{cases}$

(4) 由方程①可得 $(x+y-3)\cdot(x+y+3)=0$ 即 $x+y=3$ 或 $x+y=-3$

由方程②得：$(x-y-5)(x-y+2)=0$ 即 $x-y=5$ 或 $x-y=2$

∴原方程组变为四组方程组：

$\begin{cases}x+y=3\\x-y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=3\\x-y=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-3\\x-y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-3\\x-y=-2\end{cases}$

分别解之得原方程组的解为：

$\begin{cases}x_1=4\\y_1=-1\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2}\\y_2=2\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=1\\y_3=-4\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-\dfrac{5}{2}\\y_4=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

【评析】解二元二次方程组，首先根据方程组的特点判断方程组的类型，再用相应的方法求解。

【练习】

1. 填空题

(1) 已知方程 $3x^2-3x+1=0$ 的两个根为 α，β，则 $\alpha+\beta=$________，$\alpha\beta=$________。

(2) 已知方程 $x^2+px+3p-5=0$ 有两个实数根，若两根之差为 3，则 $p=$________。

(3) 若 x_1x_2 为方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两根，则 $x_1^2+x_2^2=$________，$(x_1-x_2)^2=$________，$x_1^3+x_2^3=$________。

(4) 已知方程 $5x^2+mx-6=0$ 的一个根是 3，那么它的另一根是________，m 的值是________。

(5) 若 a，b 为实数，且 $(5a+6)^2+(b-3)^2=0$，则 $\dfrac{a}{b}=$________。