

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

高等数学 习题全解指南

上册 同济·第六版

同济大学数学系 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

高等数学习题全解指南

同济·第六版（上册）

同济大学数学系 编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》第六版相配套的学习辅导书,由同济大学数学系的教师编写.本书内容由三部分组成,第一部分是按《高等数学》(上册)的章节顺序编排,给出习题全解,部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳,有的提供了多种解法;第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解,所选择的试题以工学类为主,少量涉及经济学类试题;第三部分是同济大学高等数学考卷选编以及考题的参考解答

本书对教材具有相对的独立性,可为学习高等数学的工科和其他非数学类专业学生以及复习高等数学准备报考硕士研究生的人员提供解题指导,也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习题全解指南:同济·第6版·上册/同济大学
数学系编. —北京:高等教育出版社, 2007.4

ISBN 978-7-04-020745-3

I. 高… II. 同… III. 高等数学-高等学校-解
题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 027908 号

策划编辑 王 强 责任编辑 崔梅萍 封面设计 王凌波 责任绘图 杜晓丹
版式设计 张 岚 责任校对 朱惠芳 责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京汇林印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2007 年 4 月 第 1 版
印 张	23.5	印 次	2007 年 4 月 第 1 次印刷
字 数	430 000	定 价	24.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 20745-00

前 言

本书是同济大学数学系编写的《高等数学》(第六版)的配套用书,主要是为学习高等数学的大学生以及复习高等数学准备报考硕士研究生的人员提供一本解题指导的参考书,也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

本书内容由三部分组成,第一部分是《高等数学》(第六版)的习题全解,包括各章的习题与总习题及解答。在解答中,有的题在解答之后,以注释的形式对该类题的解法作了归纳小结,有的题提供了常用的具有典型意义的多种解法。第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解,按照函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,微分方程,空间解析几何与向量代数,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数的顺序,每一部分选编的题量控制在25题左右,在每道试题的前面都注明了试题的年份及类别,如(1998. I)表示为1998年第一类考题(1987—1996年考题共分为五类,1997年以后只分为四类)。所选择的试题以工科类为主,少量涉及经济学类试题,每道试题都给了解题的思路与方法,有的还给出了多种解法,以供读者参考。第三部分是同济大学期中、期末考试《高等数学》试卷选编。按上、下册内容,选了期中、期末各两套试卷,并提供了试题的参考解答。

本书由同济大学数学系的教师编写,其中第一部分第一、九章,第二部分(一)、(二)、(六)由邱伯驹完成;第一部分第二、三、八章由徐建平完成;第一部分第四、五、六章,第二部分(三)由朱晓平完成;第一部分第七、十二章,第二部分(四)、(八)由应明完成;第一部分第十、十一章,第二部分(五)、(七)由郭镜明完成;第三部分由应明、朱晓平完成。

本书中存在的问题,欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编 者

二〇〇六年十二月



《高等数学》(第六版)上册习题全解

第一章 函数与极限	3
习题 1-1 映射与函数	3
习题 1-2 数列的极限	11
习题 1-3 函数的极限	14
习题 1-4 无穷小与无穷大	18
习题 1-5 极限运算法则	21
习题 1-6 极限存在准则 两个重要极限	25
习题 1-7 无穷小的比较	27
习题 1-8 函数的连续性与间断点	29
习题 1-9 连续函数的运算与初等函数的连续性	33
习题 1-10 闭区间上连续函数的性质	36
总习题一	38
第二章 导数与微分	45
习题 2-1 导数概念	45
习题 2-2 函数的求导法则	51
习题 2-3 高阶导数	58
习题 2-4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	62
习题 2-5 函数的微分	69
总习题二	74
第三章 微分中值定理与导数的应用	82
习题 3-1 微分中值定理	82
习题 3-2 洛必达法则	86
习题 3-3 泰勒公式	89
习题 3-4 函数的单调性与曲线的凹凸性	93
习题 3-5 函数的极值与最大值最小值	103

习题 3-6	函数图形的描绘	111
习题 3-7	曲率	115
习题 3-8	方程的近似解	119
总习题三		121
第四章	不定积分	130
习题 4-1	不定积分的概念与性质	130
习题 4-2	换元积分法	135
习题 4-3	分部积分法	142
习题 4-4	有理函数的积分	146
习题 4-5	积分表的使用	152
总习题四		156
第五章	定积分	166
习题 5-1	定积分的概念与性质	166
习题 5-2	微积分基本公式	172
习题 5-3	定积分的换元法和分部积分法	178
习题 5-4	反常积分	186
* 习题 5-5	反常积分的审敛法 Γ 函数	188
总习题五		190
第六章	定积分的应用	202
习题 6-2	定积分在几何学上的应用	202
习题 6-3	定积分在物理学上的应用	213
总习题六		218
第七章	微分方程	222
习题 7-1	微分方程的基本概念	222
习题 7-2	可分离变量的微分方程	224
习题 7-3	齐次方程	231
习题 7-4	一阶线性微分方程	237
习题 7-5	可降阶的高阶微分方程	245
习题 7-6	高阶线性微分方程	252
习题 7-7	常系数齐次线性微分方程	258
习题 7-8	常系数非齐次线性微分方程	263
* 习题 7-9	欧拉方程	272
* 习题 7-10	常系数线性微分方程组解法举例	276
总习题七		283



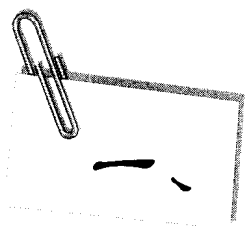
全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解

(一) 函数 极限 连续	299
(二) 一元函数微分学	309
(三) 一元函数积分学	321
(四) 微分方程	332

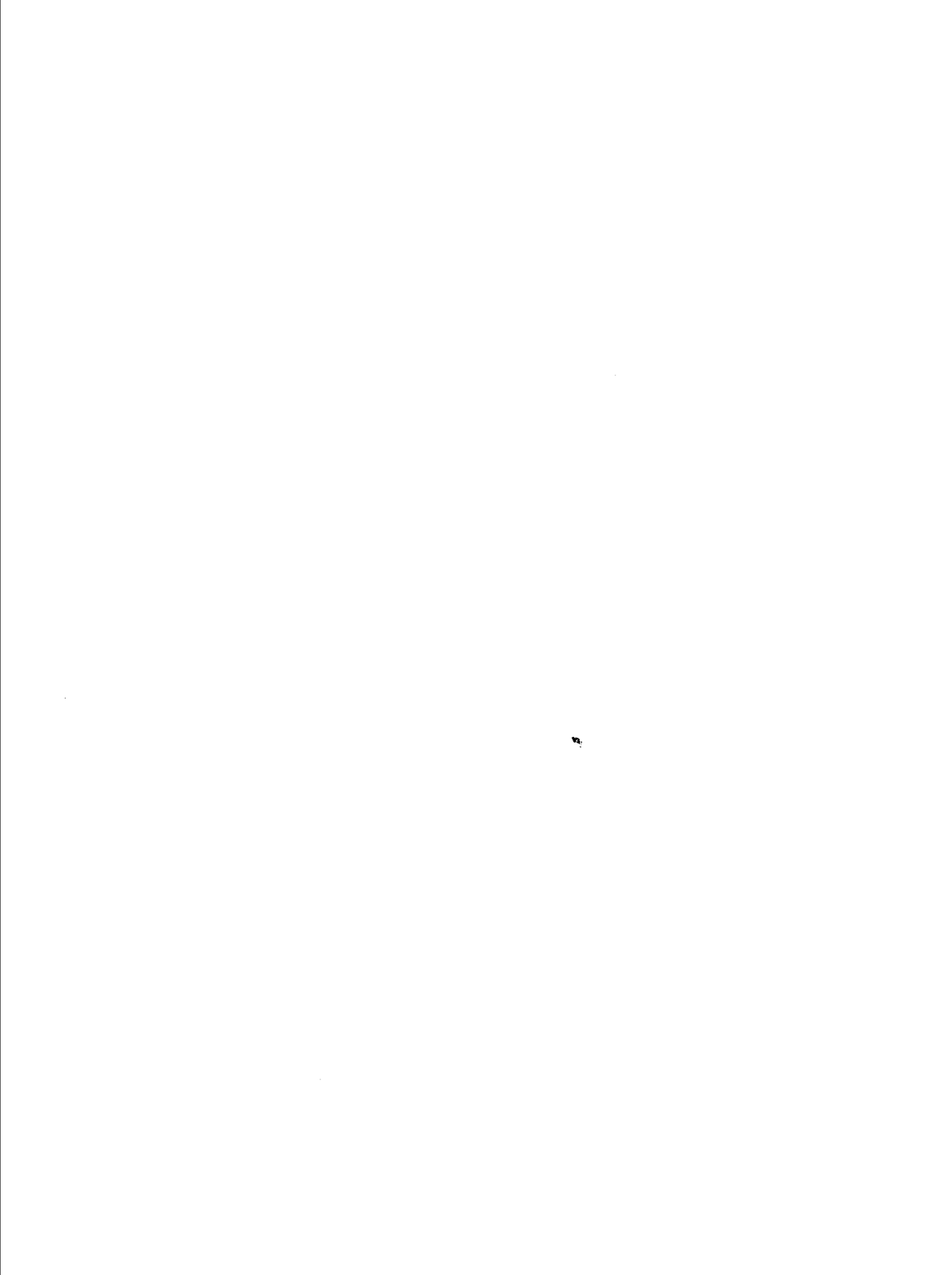


同济大学高等数学试卷选编

(一) 高等数学(上)期中考试试卷(I)	347
试题	347
参考答案	348
(二) 高等数学(上)期中考试试卷(II)	351
试题	351
参考答案	352
(三) 高等数学(上)期末考试试卷(I)	355
试题	355
参考答案	356
(四) 高等数学(上)期末考试试卷(II)	360
试题	360
参考答案	362



《高等数学》(第六版)
上册习题全解



第一章 函数与极限

习题 1-1 映射与函数

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3]$, 写出 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \setminus B)$ 的表达式.

解 $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$, $A \cap B = [-10, -5]$,
 $A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$, $A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5]$.

注 $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

2. 设 A, B 是任意二个集合, 证明对偶律: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

证 $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$.

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset X$. 证明

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

证 (1) $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B, y = f(x) \Leftrightarrow \exists x \in A$ 或 $x \in B, y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(A)$ 或 $y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$.

(2) $y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B, y = f(x) \Rightarrow y \in f(A)$ 且 $y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.

注意: 反之, 由 $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ 且 $y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in A, y = f(x); \exists x' \in B, y = f(x')$. 由于 f 不一定是单射, 未必有 $x = x'$. 例如, 函数 $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}, A = (-\infty, 0], B = [-1, +\infty), A \cap B = [-1, 0], f(A \cap B) = [0, 1]$, 但 $f(A) \cap f(B) = [0, +\infty)$.

4. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y = \sqrt{3x+2}$;

(2) $y = \frac{1}{1-x^2}$;

(3) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5) $y = \sin \sqrt{x}$;

(6) $y = \tan(x+1)$;

$$(7) y = \arcsin(x-3); \quad (8) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \ln(x+1); \quad (10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

解 (1) $3x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$, 即定义域为 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$.

(2) $1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$, 即定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) $x \neq 0$ 且 $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \neq 0$ 且 $|x| \leq 1$, 即定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) $4-x^2 > 0 \Rightarrow |x| < 2$, 即定义域为 $(-2, 2)$.

(5) $x \geq 0$, 即定义域为 $[0, +\infty)$.

(6) $x+1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 即定义域为 $\left\{ x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - 1, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

(7) $|x-3| \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$, 即定义域为 $[2, 4]$.

(8) $3-x \geq 0$ 且 $x \neq 0$, 即定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$.

(9) $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$, 即定义域为 $(-1, +\infty)$.

(10) $x \neq 0$, 即定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

注 本题是求函数的自然定义域, 一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域, 再求出这些定义域的交集, 即得所求定义域. 下列简单函数及其定义域是经常用到的:

$$y = \frac{Q(x)}{P(x)}, P(x) \neq 0;$$

$$y = \sqrt[n]{x}, x \geq 0;$$

$$y = \log_a x, x > 0;$$

$$y = \tan x, x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbf{Z};$$

$$y = \cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z};$$

$$y = \arcsin x, |x| \leq 1;$$

$$y = \arccos x, |x| \leq 1.$$

5. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x$;

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

解 (1) 不同, 因为定义域不同.

(2) 不同, 因为对应法则不同, $g(x) = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

(3) 相同,因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同,因为定义域不同.

6. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

解 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}, \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(-2) = 0.$$

$y = \varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

7. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1);$

(2) $y = x + \ln x, (0, +\infty).$

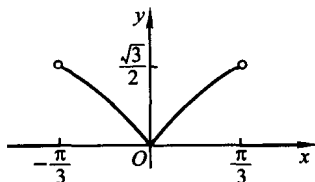


图 1-1

证 (1) $y = f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}, (-\infty, 1).$

设 $x_1 < x_2 < 1$. 因为

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{1-x_2} - \frac{1}{1-x_1} = \frac{x_2 - x_1}{(1-x_1)(1-x_2)} > 0,$$

所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 内单调增加.

(2) $y = f(x) = x + \ln x, (0, +\infty).$

设 $0 < x_1 < x_2$. 因为

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 + \ln x_2 - x_1 - \ln x_1 = x_2 - x_1 + \ln \frac{x_2}{x_1} > 0,$$

所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

8. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证 设 $-l < x_1 < x_2 < 0$, 则 $0 < -x_2 < -x_1 < l$, 由 $f(x)$ 是奇函数, 得 $f(x_2) - f(x_1) = -f(-x_2) + f(-x_1)$. 因为 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 所以 $f(-x_1) - f(-x_2) > 0$, 从而 $f(x_2) > f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇

函数的乘积是奇函数.

证 (1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 则 $f_1(-x) = f_1(x), f_2(-x) = f_2(x)$. 令 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 于是

$$F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 是奇函数, 则 $g_1(-x) = -g_1(x), g_2(-x) = -g_2(x)$. 令 $G(x) = g_1(x) + g_2(x)$, 于是

$$G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 则 $f_1(-x) = f_1(x), f_2(-x) = f_2(x)$. 令 $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. 于是

$$F(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) f_2(x) = F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数, 则 $g_1(-x) = -g_1(x), g_2(-x) = -g_2(x)$. 令 $G(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$. 于是

$$\begin{aligned} G(-x) &= g_1(-x) \cdot g_2(-x) = [-g_1(x)][-g_2(x)] \\ &= g_1(x) \cdot g_2(x) = G(x), \end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 则 $f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$. 令 $H(x) = f(x) \cdot g(x)$, 于是

$$\begin{aligned} H(-x) &= f(-x) \cdot g(-x) = f(x)[-g(x)] \\ &= -f(x) \cdot g(x) = -H(x), \end{aligned}$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

10. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y = x^2(1-x^2)$;

(2) $y = 3x^2 - x^3$;

(3) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4) $y = x(x-1)(x+1)$;

(5) $y = \sin x - \cos x + 1$;

(6) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$.

解 (1) $y = f(x) = x^2(1-x^2)$, 因为

$$f(-x) = (-x)^2[1-(-x)^2] = x^2(1-x^2) = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $y = f(x) = 3x^2 - x^3$, 因为

$$f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3,$$

$$f(-x) \neq f(x), \text{ 且 } f(-x) \neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

$$(3) y=f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}, \text{ 因为}$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

$$(4) y=f(x)=x(x-1)(x+1), \text{ 因为}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)[(-x)-1][(-x)+1] \\ &= -x(x+1)(x-1) = -f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

$$(5) y=f(x)=\sin x - \cos x + 1, \text{ 因为}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1, \\ f(-x) &\neq f(x) \text{ 且 } f(-x) \neq -f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

$$(6) y=f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}, \text{ 因为 } f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 为偶函数.}$$

11. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

$$(1) y=\cos(x-2);$$

$$(2) y=\cos 4x;$$

$$(3) y=1+\sin \pi x;$$

$$(4) y=x \cos x;$$

$$(5) y=\sin^2 x.$$

解 (1) 是周期函数, 周期 $l=2\pi$.

(2) 是周期函数, 周期 $l=\frac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数, 周期 $l=2$.

(4) 不是周期函数.

(5) 是周期函数, 周期 $l=\pi$.

12. 求下列函数的反函数:

$$(1) y=\sqrt[3]{x+1};$$

$$(2) y=\frac{1-x}{1+x};$$

$$(3) y=\frac{ax+b}{cx+d} (ad-bc \neq 0);$$

$$(4) y=2\sin 3x \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right);$$

$$(5) y=1+\ln(x+2);$$

$$(6) y=\frac{2^x}{2^x+1}.$$

分析 函数 f 存在反函数的前提条件为: $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射. 本题中所给出的各函数易证均为单射, 特别(1)、(4)、(5)、(6)中的函数均为单调函数, 故都存在反函数.

解 (1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$, 即反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 解得 $x = \frac{1-y}{1+y}$, 即反函数为 $y = \frac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$, 即反函数为 $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y = 2\sin 3x \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right)$ 解得 $x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{y}{2}$, 即反函数为 $y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}$.

(5) 由 $y = 1 + \ln(x+2)$ 解得 $x = e^{y-1} - 2$, 即反函数为 $y = e^{x-1} - 2$.

(6) 由 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$, 即反函数为 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

13. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

解 设 $f(x)$ 在 X 上有界, 即存在 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq M, x \in X,$$

故

$$-M \leq f(x) \leq M, x \in X,$$

即 $f(x)$ 在 X 上有上界 M , 下界 $-M$.

反之, 设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1 , 下界 K_2 , 即

$$K_2 \leq f(x) \leq K_1, x \in X.$$

取 $M = \max\{|K_1|, |K_2|\}$, 则有

$$|f(x)| \leq M, x \in X,$$

即 $f(x)$ 在 X 上有界.

14. 在下列各题中, 求由所给函数构成的复合函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}$;

(2) $y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}$;

(3) $y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2$;

(4) $y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1$;

(5) $y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1$.

解 (1) $y = \sin^2 x, y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{3}{4}$.

(2) $y = \sin 2x, y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = 1$.

(3) $y = \sqrt{1+x^2}, y_1 = \sqrt{2}, y_2 = \sqrt{5}$.

(4) $y=e^{x^2}, y_1=1, y_2=e$.

(5) $y=e^{2x}, y_1=e^2, y_2=e^{-2}$.

15. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;

(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a) (a>0)$;

(4) $f(x+a)+f(x-a) (a>0)$.

解 (1) $0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$.

(2) $0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow x \in [2n\pi, (2n+1)\pi], n \in \mathbf{Z}$.

(3) $0 \leq x+a \leq 1 \Rightarrow x \in [-a, 1-a]$.

(4) $\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1, \\ 0 \leq x-a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$ 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $x \in [a, 1-a]$; 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 定义域为 \emptyset .

16. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的图形依次如图 1-2, 图 1-3 所示.

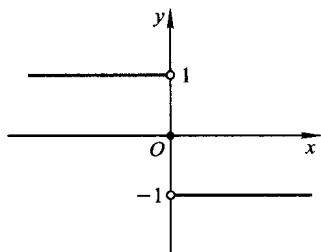


图 1-2

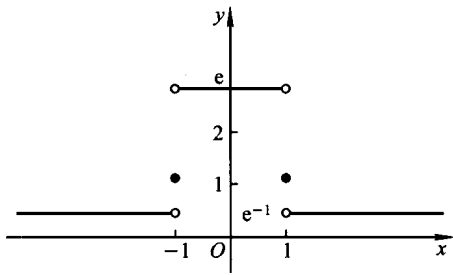


图 1-3

17. 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角 $\varphi=40^\circ$ (图 1-4). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 $L (L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式, 并指明其定义域.

解 $AB=CD=\frac{h}{\sin 40^\circ}$, 又

$$S_0 = \frac{1}{2}h[BC + (BC + 2\cot 40^\circ \cdot h)],$$

得 $BC = \frac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h,$

所以 $L = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h,$

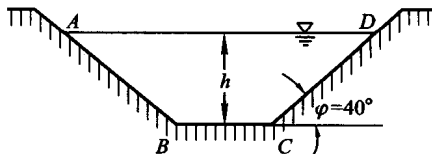


图 1-4

而 $h > 0$ 且 $\frac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h > 0$, 因此湿周函数的定义域为 $(0, \sqrt{S_0 \tan 40^\circ})$.

18. 收音机每台售价为 90 元, 成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 100 台以上的, 每多订购 1 台, 售价就降低 1 分, 但最低价为每台 75 元.

- (1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;
- (2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;
- (3) 某一销售商订购了 1000 台, 厂方可获利润多少?

解 设订购 x 台, 实际售价每台 p 元, 厂方所获利润 P 元. 则按题意, 有当 $x \in [0, 100]$ 时, $p = 90, P = (90 - 60)x = 30x$;

当 $x > 100$ 时, 超过 100 台的订购量为 $x - 100$, 售价降低 $0.01(x - 100)$, 但最低价为 75, 即降价数不超过 $90 - 75 = 15$, 故

$$0.01(x - 100) \leq 15 \Rightarrow x \leq 1600,$$

于是, 当 $x \in (100, 1600]$ 时,

$$p = 90 - 0.01(x - 100) = 91 - 0.01x,$$

$$P = (91 - 0.01x - 60)x = 31x - 0.01x^2;$$

当 $x \in (1600, +\infty)$ 时, $p = 75, P = (75 - 60)x = 15x$.

因此, 有

(1)

$$p = \begin{cases} 90, & x \in [0, 100], \\ 91 - 0.01x, & x \in (100, 1600], \\ 75, & x \in (1600, +\infty). \end{cases}$$

(2)

$$P = \begin{cases} 30x, & x \in [0, 100], \\ 31x - 0.01x^2, & x \in (100, 1600], \\ 15x, & x \in (1600, +\infty). \end{cases}$$

(3) $x = 1000, P = 31 \times 10^3 - 0.01 \times 10^6 = 21 \times 10^3$ (元).

19. 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式, 并求

- (1) 90°F 的等价摄氏温度和 -5°C 的等价华氏温度;
- (2) 是否存在一个温度值, 使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的?