普通高等教育“十一五”规划教材

概率论与数理统计

万星火　主　编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

概率论与数理统计

万星火　主　编

肖继先　檀亦丽　周丽晖　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书根据高等学校理工类专业概率论与数理统计课程教学大纲编写.力求简明扼要,便于教学与自学.突出体现了作者在教学第一线积累的丰富教学经验,注重对概率统计思想方法与思维模式的讲授,培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力.

全书共10章,内容包括随机事件与概率,随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征与极限定理,数理统计的基本概念,参数估计,假设检验,相关与回归分析,方差分析及SPSS统计软件包在概率论与数理统计中的应用.各章均配有适量的习题,书后附有参考答案.

本书可作为工科大学本科各专业"概率论与数理统计"课程的教材,也可作为准备报考工科硕士研究生的人员与工程技术人员的学习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/万星火主编.—北京:科学出版社,2007
(普通高等教育"十一五"规划教材)
ISBN 978-7-03-019640-8

Ⅰ.概… Ⅱ.万… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第126240号

责任编辑:韩 洁/责任校对:刘彦妮
责任印制:吕春珉/封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年8月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2007年8月第一次印刷 印张:20 1/4
印数:1—3 500 字数:460 000

定价:26.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换<海生>)
销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62138978-8203

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学学科，是高等学校工科本科各专业的一门重要的基础理论课. 通过本课程的教学，应使学生掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论及相应的处理随机事件的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力，为后续课程的学习以及从事工程技术工作和科研工作打下必要的概率统计理论基础. 针对这门课程的特点，本书编写的基本思路是：

(1)注重概念和理论的直观解释，尽量避免纯数学化的论证，同时又保持了内容的完整性和严谨性.

(2)注重概率统计方法及在各个领域的应用，侧重对概率统计方法的介绍，培养学生对基本概念的准确理解及对常用方法的熟练掌握.

(3)注重统计软件的应用，充分发挥 SPSS 统计软件包的作用，将统计方法和统计软件包相结合，给出各种统计方法的应用实例，增加可操作性.

(4)注意到课程内容与工科研究生数学的衔接与区别.

(5)加强对学生数学建模能力的培养. 教学中我们充分认识到，对工科学生而言，从实际问题中提取数学模型的能力尤为重要. 因此在教材编写中，我们将提高学生数学建模能力作为重要的教学目标. 教材中分别在概率论部分和数理统计部分介绍了相应的应用案例以及应用前景，以期取得良好效果.

(6)适用面广. 在编写过程中，我们尽量做到联系各学科的实际问题，注重应用，力求将概念叙述得清楚易懂，做到便于教学与自学，使本书既可作为工科各专业本科的教材，又可作为各类读者概率统计课程的入门教材.

本书是按照我国现行的工科大学本科“概率论与数理统计”课程教学基本要求和工学、经济学硕士研究生入学考试大纲编写的. 全书共 10 章，内容包括：随机事件与概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征与极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，相关与回归分析，方差分析，SPSS 统计软件包在概率论与数理统计中的应用. 每章后的综合练习题收录了较多的历年工学与经济学硕士研究生入学考试试题. 案例部分选用了近年全国大学生数学建模竞赛题目.

学习本书的学生需具备工科大学微积分的知识基础和线性代数的初步知识. 本书参考学时为：第 1～7 章约需 54 学时，第 8 章约需 6 学时，第 9 章约需 4 学时，第 10 章约需 2 学时. 如果只讲授概率论部分(前 4 章)，则只需 36 学时.

在编写本书过程中，我们得到了河北理工大学各级领导和许多教师的大力支持，在此对他们表示感谢.

参加编写的人员有：万星火(第 5、7、8、9 章)，肖继先(第 1、4 章)，檀亦丽(第 2、3 章)，周丽晖(第 6、10 章). 万星火最后进行了统稿.

我们力求使本书完善和成熟，但限于编者的水平，同时编写时间也比较仓促，纰缪之处在所难免，恳请同行和广大读者批评指正.

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　随机现象与随机试验

1.1.1　随机现象

在我们的日常生活和社会实践中，仔细观察容易看到这样两类现象.

一类现象是在一定的条件下进行某种试验(或观察)可以预料必然出现某种结果（或某种结果必然不出现）. 例如：

1）上抛的石子必然下落；

2）在没有外力作用的条件下，做等速直线运动的物体必然继续做等速直线运动；

3）以原点为圆心，2 为半径的圆的方程为 $x^2+y^2=4$；

4）函数 $f(x)=3x^2-2$，当 $x=0$ 时，$f(0)=-2$.

我们将上述诸现象称之为确定性现象或必然现象.

另一类现象是在一定的条件下进行某种试验(或观察)，其可能的结果有多个，事先无法确定到底哪个结果会出现. 例如：

1）购物抽奖问题，当顾客在商店购买了一定额度的商品后，可参加抽奖，奖项分为若干等级；

2）一个商店每天接待的顾客数；

3）股票每天的上证综指；

4）人民币每天对美元的汇率等.

我们将这一类现象称之为偶然性现象或随机现象. 对于随机现象，表面上看，是杂乱无章没有规律的. 但如果我们在相同的条件下，进行多次的重复试验，可以发现是有规律可循的(如出现机会的可能性大小). 比如，一门火炮在一定条件下进行射击，个别炮弹的弹着点可能偏离目标而有随机性的误差，但大量炮弹的弹着点则表现出一定的规律性，即一定的命中率和分布规律. 再比如，测量一物体的长度，由于仪器及观察受到环境的影响，每次测量的结果可能是有差异的. 但多次测量结果的平均值随着测量次数的增加会逐渐稳定于一常数，并且诸测量值大多落在此常数的附近，越远则越少，因而其分布状况呈现“两头小，中间大，左右基本对称”的规律.

这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有的规律性，我们称为统计规律性. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1.2　随机试验

定义 1.1　我们把对现象(包括必然现象和随机现象)进行一次观察或科学试验统称为一次试验. 而把具有下列性质的试验称为随机试验.

1）可重复性：可以在相同条件下重复进行；

2）可观测性：每次试验的所有可能结果不止一个，并且事先能明确知道试验的所有

可能结果.

3) 随机性：每次试验的结果事先不可预测，但是每次试验总是出现上述可能结果中的一个.

随机试验常用字母 E 表示. 以下我们所说的试验均指随机试验，也简称为试验. 例如

E_1：抛一枚质地均匀的硬币，观察正面 H 朝上，还是反面 T 朝上.

E_2：测试在同一工艺条件下生产出的灯泡的寿命.

E_3：从一副扑克牌(52 张) 中随机抽取 2 张，观察其点数之和.

E_4：观察一天当中进入某百货商场的顾客数.

E_5：测量一个班级学生的身高和体重.

E_6：测量一个工件的长度，记录测量结果与真实长度的误差.

1.2 样本空间与随机事件

1.2.1 样本空间

样本点：随机试验中出现的每一种最基本的结果称为样本点，用希腊字母 ω 表示.

在每次试验中，一定出现一个且只能出现一个样本点.

样本空间：由全体样本点组成的集合称为随机试验 E 的样本空间，用字母 Ω 表示. 即 $\Omega=\{\omega \mid \omega \text{ 为 } E \text{ 的可能结果}\}$. 1.1.2 小节例子中的样本空间分别为：

$$\Omega_1=\{H,T\}$$

$$\Omega_2=\{t \quad t\geqslant 0\}$$

$$\Omega_3=\{2,3,4,\cdots,26\}$$

$$\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots\}$$

$\Omega_5=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant A, b\leqslant y\leqslant B\}$，其中 x 表示身高，a 与 A 分别为该班学生的最低与最高身高；y 表示体重，b 与 B 分别为该班学生的最轻与最重体重

$\Omega_6=\{x\mid -d\leqslant x\leqslant d\}$，其中 $d\geqslant 0$ 为最大误差

1.2.2 随机事件

事件：样本空间 Ω 的子集称为试验 E 的随机事件，简称事件. 事件常用大写字母 A，B，C，$\cdots$ 等表示.

基本事件：只含有一个样本点的事件称为基本事件.

例如 Ω_1 中，出现正面 H，出现反面 T，就是两个基本事件.

复合事件：由两个或两个以上基本事件复合而成的事件为复合事件.

必然事件：在每次试验中必然发生的事件称为必然事件.

不可能事件：在每次试验中都不发生的事件称为不可能事件，记作$\varnothing$.

尽管不可能事件和必然事件不具有随机性，但为方便起见，我们还是将它们看成随机事件.

随机事件是由若干个基本事件组成的集合，或者也可以说成，随机事件是样本空间的子集. 在一次试验中，事件 A 发生的含义是，当且仅当 A 中一个样本点发生(或出现)时称为事件 A 发生.

如在掷骰子试验中，观察掷出的点数. 样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，事件 $A=\{$掷出的点数不小于4$\}$，事件 $B=\{$掷出的点数为奇数$\}$，$C=\{$出现的点数不小于7$\}$，则 $A=\{4,5,6\}$，$B=\{1,3,5\}$，而 C 为不可能事件，是一个空集. 若掷出的点数为3，我们说事件 B 发生了.

随机事件表示成由样本点组成的集合，可以将事件间的关系及运算归结为集合之间的关系和运算，这不仅对研究事件的关系和运算是方便的，而且对研究随机事件发生的可能性大小的数量指标——概率的运算也是非常有益的.

1.2.3 事件的关系与运算 (Venn 图)

在实际问题中，我们不但要考虑在同一试验当中的各个随机事件，还要详细分析各个事件之间的各种关系和运算，为计算事件的概率做准备. 下面我们讨论事件之间的关系和运算.

除非特殊声明，下面讨论的事件都是假定来自同一样本空间 Ω.

1. 子事件(事件的包含关系)

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点都包含在 B 中，则称事件 A 是事件 B 的子事件，或称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subseteq B$.

对任意事件 A，都有 $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$.

我们用维恩(Venn)图对这种关系给出直观的说明(在下面各图中，整个矩形表示样本空间 Ω，区域 A 与区域 B 分别表示事件 A 和事件 B). 区域 A 在区域 B 内，说明事件 A 包含在事件 B 中. 见图 1.1.

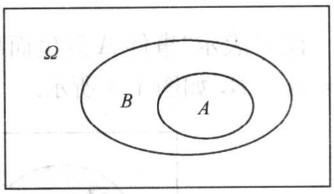

图 1.1

设 A、B、C 为任意三个事件，事件间的包含关系有下列性质：

(1) $A\subseteq A$(自反性)；

(2) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$(传递性).

2. 相等关系

如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称事件 A 与事件 B 相等，用 $A=B$ 表示.

3. 事件的和事件(并)

设 C 表示“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”这一事件，则称 C 为事件 A 与事件 B 的和事件，记作 $C=A\cup B$. 如果将事件用集合表示，则事件 A 与 B 的和事件 C 即为集合 A 与 B 的并，如图 1.2 所示.

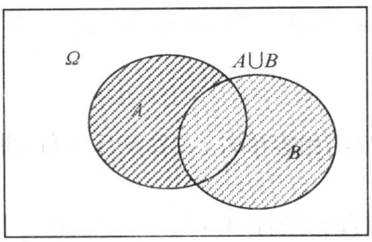

图 1.2

从图 1.2 可以看出，$A\cup B$ 包含三部分，A 发生 B 不发生，B 发生 A 不发生，A 与 B 同时发生.

事件的和可以推广到有限个或可数个事件的情况.

用 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生；

用 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生.

例如，设事件 $A=\{1,3,4,7\}$，事件 $B=\{2,4,5,8\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,8\}$.

4. 事件的积事件(交)

设 C 表示“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件，则称 C 为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 $C=A\cap B$，或记为 $C=AB$.

如果将事件用集合表示，则事件 A 与 B 的积事件 C 即为集合 A 与 B 的交，如图 1.3 所示.

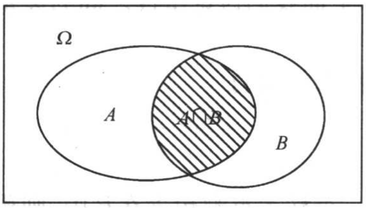

图 1.3

也可以将事件的积推广到有限个或可数个事件的情况.

用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生.

例如，设事件 $A=\{1,3,4,7\}$，事件 $B=\{2,4,5,8\}$，则 $A\cap B=\{4\}$.

5. 差事件

设 C 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件，则称 C 为 A 与 B 的差事件，记作 $C=A-B$，如图 1.4 所示.

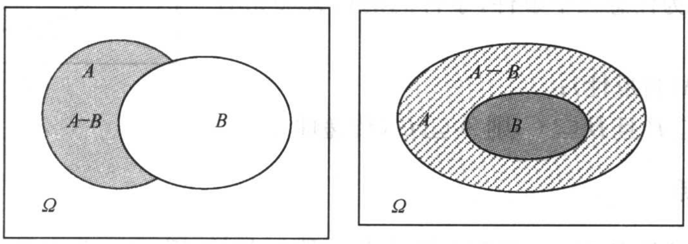

图 1.4

在上面的例子中，事件 $A=\{1,3,4,7\}$，事件 $B=\{2,4,5,8\}$，则 $A-B=\{1,3,7\}$.

由差事件的定义可知，对于任意的事件 A，$A-A=\varnothing$，$A-\varnothing=A$，$A-\Omega=\varnothing$.

6. 互不相容事件

如果两事件 A 与 B 不能同时发生，则称 A 与 B 是互不相容事件，或称互斥事件，此时有 $A\cap B=\varnothing$.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个都是不相容的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的.

在任意一个随机试验中，基本事件都是互不相容的. 还容易看出，事件 A 与 $B-A$ 是互不相容的. 若用集合表示事件，则 A、B 互不相容，即为 A 与 B 是不相交的，如图 1.5 所示.

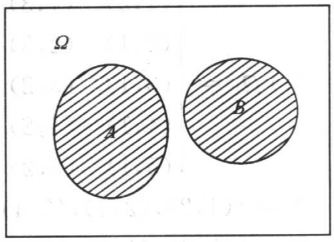

图 1.5

7. 逆事件(对立事件)

在一次试验中，事件 A 与事件 B 中必然有一个发生，且仅有一个发生，即事件 A 与 B 满足关系

$$A \cup B = \Omega \qquad A \cap B = \varnothing$$

则称事件 A 与事件 B 互逆，又称 A 是 B 的对立事件或逆事件(B 是 A 的对立事件，或逆事件)，记作 $A = \overline{B}(B = \overline{A})$. 显然，$\overline{B} = \Omega - B$.

注：互不相容事件和互逆事件既有联系又有区别. 首先互逆事件只涉及两个事件；而互不相容事件可涉及 $n(n \geqslant 2)$ 个事件. 两个事件互逆必互不相容；反之，不一定成立.

8. 事件的运算

可以验证事件间的运算满足如下关系：

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) 分配律　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) 重余律　$\overline{\overline{A}} = A$

(5) 幂等律　$A \cup A = A, A \cap A = A$

(6) 差化积　$A - B = A\overline{B} = A - (AB)$

(7) 德·摩根律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

上述结果可推广到有限个与可数个的情况：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

【例 1.1】 某工人加工了 5 个机器零件，其中一级品和二级品各 2 个，合格品 1 个，从中任意抽取 2 个，考虑下面的抽取方式：

(1) 从中任取一个零件后，不再放回原处，再从剩下的零件中任取一个.

(2) 第一次取出记录等级后放回原处，再作第二次抽取.

(3) 从 5 个零件中一次抽取 2 个. 写出试验的样本空间.

对于第一种抽取方式写出下列事件：$A = \{2$ 个零件是同一等级产品$\}$；$B = \{$至少有一个零件是一级品$\}$，并求 $A \cup B, A \cap B, \overline{B}$.

【解】 为讨论方便，我们给 5 个零件编号，2 个一级品分别编号为 1,2 号，2 个二级品分别编号为 3,4 号，合格品编号为 5 号. 3 次试验的样本空间分别记为 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. 且用记号(1,2)表示先取到 1 号产品，后取到 2 号产品，[1,2]表示同时取到 1 号，2 号产品，则

$$(1)\ \Omega_1=\begin{Bmatrix}(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5)\\(2,1) & (2,3) & (2,4) & (2,5)\\(3,1) & (3,2) & (3,4) & (3,5)\\(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,5)\\(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4)\end{Bmatrix}$$，样本点个数为 20 个.

$A=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$

$B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),$
$(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$

则

$$A\cup B=B, A\cap B=A, A-B=\{(3,4),(4,3)\}$$

$\overline{B}=\{(3,4),(3,5),(4,3),(4,5),(5,3),(5,4)\}$

$$(2)\ \Omega_2=\begin{Bmatrix}(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5)\\(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5)\\(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5)\\(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5)\\(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5)\end{Bmatrix}$$，样本点个数为 25 个.

$$(3)\ \Omega_3=\begin{Bmatrix}[1,2] & [1,3] & [1,4] & [1,5]\\ & [2,3] & [2,4] & [2,5]\\ & & [3,4] & [3,5]\\ & & & [4,5]\end{Bmatrix}$$，样本点个数为 10 个.

注：(1) 类似于例 1.1 这样的问题可以帮助我们弄清试验方式，这对于以后计算概率是必要的.

(2) 以上的 3 个试验在后面要学习的古典概型问题中很具代表性.

【例 1.2】 某工程队承包建造 3 栋楼房，设事件 $A_k=\{$第 k 栋楼房合格$\}$，试用事件 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1) $B_1=\{$只有第 1 栋楼房合格$\}$

(2) $B_2=\{$恰有 1 栋楼房合格$\}$

(3) $B_3=\{$至多有 1 栋楼房合格$\}$

【解】 易知事件 $\overline{A}_k=\{$第 k 栋楼房经验收不合格$\}$，$(k=1,2,3)$.

(1) 只有第 1 栋楼房合格，其含义是第 1 栋楼房合格，但第 2、3 栋楼不合格，因此事件 B_1 与 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 等价，因此 $B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(2) 恰有 1 栋楼房合格，并没有指明究竟是哪 1 栋楼房合格，因此可能是第 1 栋或第 2 栋或第 3 栋楼房合格，而其余两栋都不合格，所以 $B_2=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(3) $B_3=\{$至多有 1 栋楼房合格$\}$ 与下列两个互不相容事件的和事件等价.

$\{$恰有 1 栋楼房合格$\}$与$\{$3 栋楼房全不合格$\}$ 因此所求事件 B_3 可以表示成

$$B_3=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

【例 1.3】 在书架上随意抽取一本书，事件 A 表示数学书，B 表示中文书，C 表示平装书. 解释下面事件的含义：$AB\overline{C}$，$\overline{C}\subseteq B$，$\overline{A}=B$.

【解】 $AB\overline{C}$ ——抽取的是精装中文版数学书.