数学物理方程

张渭滨 编著

清华大学出版社

数学物理方程

张渭滨 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是编者根据多年来为多个专业的学生讲授数学物理方程的教学经验编写而成的.全书共分11章,主要内容包括以正交函数族为主线的数学预备知识,数学物理方程的建立与各种解法,对勒让德多项式及贝塞尔函数在各种物理问题上的应用作了较深入的讨论,书末还附有近50种不同物理问题解的一览表.

本书可作为物理学科、电子学科、信息学科,以及其他工科本科生的教材,也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/张渭滨编著.—北京:清华大学出版社,2007.8
ISBN 978-7-302-15419-8

Ⅰ.数…　Ⅱ.张…　Ⅲ.数学物理方程　Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第085784号

责任编辑:刘　颖　王海燕
责任校对:焦丽丽
责任印制:何　芊

出版发行:清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机:010-62770175
投稿咨询:010-62772015
地　　址:北京清华大学学研大厦A座
邮　　编:100084
邮购热线:010-62786544
客户服务:010-62776969
印 刷 者:北京市清华园胶印厂
装 订 者:三河市春园印刷有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:185×230　**印　张**:23.5　**字　数**:486千字
版　　次:2007年8月第1版　**印　次**:2007年8月第1次印刷
印　　数:1～4000
定　　价:29.80元

　产品编号:024478-01

前　言

数学物理方程在理论物理、应用物理、力学、电子通信、天文、气象、地质、海洋科学和工程技术各个领域中均有广泛的应用，可以说在许多科学与技术领域中，研究深入到一定层次，数学物理方程是必不可少的数学工具. 由于它既是数学课程，又是物理课程，因此对于工科学生，尤其是对于在高等数学及大学物理的学习不太深入的学生而言，学习这门课程有一定的困难. 因此，编写一种适于工科学生学习的数学物理方程教材，使学生在学习过程中，既能在数学理论上不必花费过多精力，又能以较鲜明的物理思路去掌握这种数学工具并解决一些实际物理与工程问题，就显得十分必要.

20 多年来，作者经历了从物理专业到应用物理专业再到电子科学与技术专业三个专业的数学物理方程的教学工作，学生学习本课程的学时数也从 110 学时一再压缩到目前的 54 学时，深感缺乏一种适于少课时的数学物理方程教材. 本教材是作者在 20 多年从事数学物理方法、数学物理方程两门课程的教学与研究的基础上，结合国内外相关教材的优点编写而成. 作者努力的方向是使学生在较少的时间内学到该课程的基本知识，搭建起关于本课程的数学物理框架；同时，培养学生分析与解决一些实际问题的能力.

比较中国和美国的教育方法，中国教学强调推理和抽象思维，理论系统严谨，而美国的教学偏重整体框架的建构，鼓励学生独立思考，两种教学方法各有长处与短处. 作者力图在这两种方法的互相补充上作一些尝试. 比如按正交函数族展开的方法，在很多大学课程中都涉及（大学物理、线性代数、高等数学中的傅里叶级数、数学物理方程、信号与系统、电路分析、电动力学、量子力学，乃至群论等研究生课程），学生往往孤立地、单科性地学习，不善于融会贯通，建立起整体框架. 作者先后教授上述大部分课程，深感建立这种整体框架的重要性，因此着重在这种思想方法上面作些努力与尝试.

由于不同学校、不同专业要求相差较大，本书的另一个特点是给不同要求的教学提供较大的选择性. 全书选材适当，编排合理. 为便于少课时学生更深入的学习，教材中编入一些打星号（*）的内容. 对少课时的教学，跳过这些打星号的章节，并不影响教学内容的连贯性. 对于电子类工科学生，第 2,3 章内容已在信号与系统、自动控制原理等课程中学过，可让学生自己复习，不必再讲述.

本书还把一些物理问题的解分门别类列于附录中以便于查阅，同时也作为对由于课

时较少而不能全面讲授相关内容的一种补偿.

由于作者水平有限,错误与不当之处在所难免,恳请读者批评指正.

本书出版得到了华侨大学教材出版基金会资助,谨此致谢.

张 渭 滨

2007 年春写于泉州

目　　录

第 1 章　数学预备知识

1.1　数学物理方程简介

自 17 世纪牛顿、莱布尼茨发明微积分后，科学家在利用微积分处理力学、物理学中各种问题的过程中导出了大量的微分方程. 在这些微分方程中，有些是常微分方程，比如力学中质点的运动方程$\left(m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{f}\right)$，但更多的是偏微分方程. 欧拉、拉格朗日等科学家在研究流体力学、声音传播和膜振动等问题时，拉普拉斯在研究势函数和潮汐理论时，傅里叶在研究热传导以及麦克斯韦在研究电磁理论时都导出一些偏微分方程，近代量子力学中出现的波动方程也是偏微分方程. 我们把物理研究中出现的偏微分方程称为数学物理方程. 数学物理方程中的变量通常是多维空间的坐标与时间. 为了方便起见，本书采用以下偏微分记号：

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是直角坐标系 x,y,z 三个坐标轴正方向上的单位矢量，Δ 为拉普拉斯算子（或简称为拉氏算子）.

下面举几个常见的数学物理方程的例子.

（1）静电场中电势 u 满足拉普拉斯方程或泊松方程，即

$$\Delta u = 0 \tag{1.1}$$

或

$$\Delta u = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \tag{1.2}$$

方程(1.1)称为拉普拉斯方程，适于空间无自由电荷分布的情况；方程(1.2)称为泊松方程，适于空间有自由电荷分布的情况（电荷体密度分布为 ρ）.

（2）波动方程

$$u_{tt}-a^2\Delta u=0 \tag{1.3}$$

或

$$u_{tt}-a^2\Delta u=f(x,y,z,t). \tag{1.4}$$

方程(1.3)适于无力源的情况，是齐次方程；方程(1.4)适于有力源分布 $f(x,y,x,t)$ 的情况，是非齐次方程. 对于一维的情况，方程(1.3)和(1.4)简化为

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad 和 \quad u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t).$$

（3）热传导方程与扩散方程

$$u_t-a^2\Delta u=0 \tag{1.5}$$

或

$$u_t-a^2\Delta u=f(x,y,z,t). \tag{1.6}$$

方程(1.5)适于空间无热源分布的情况，是齐次方程；方程(1.6)适于空间有热源分布 $f(x,y,z,t)$ 的情况，是非齐次方程. 对于一维情况，方程(1.5)和(1.6)简化为

$$u_t-a^2u_{xx}=0 \quad 和 \quad u_t-a^2u_{xx}=f(x,t).$$

（4）描述电磁场运动的麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_0+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 为电位移矢量，$\boldsymbol{E}$ 为电场强度矢量，$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度矢量，$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度矢量，ρ 为空间自由电荷体密度分布，$\boldsymbol{j}_0$ 为传导电流密度矢量. $\nabla\cdot\boldsymbol{D}$ 表示电位移矢量的散度，$\nabla\times\boldsymbol{E}$，$\nabla\times\boldsymbol{H}$ 分别表示电场强度矢量与磁场强度矢量的旋度. 在直角坐标系中，散度定义为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(D_x\boldsymbol{i}+D_y\boldsymbol{j}+D_z\boldsymbol{k})=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}. \tag{1.7}$$

散度是一个标量.

而旋度定义为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{1.8}$$

旋度是一个矢量.

散度与旋度在其他正交坐标系中的表示式将在1.4节中介绍.

(5) 量子力学薛定谔波动方程

$$\mathrm{j}\,\hbar u_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta u = Vu. \tag{1.9}$$

该方程描述了微观粒子在势场 $V(x,y,z,t)$ 中的波函数 $u(x,y,z,t)$ 的变化规律. 式中 j 是虚数单位, $\hbar=\frac{h}{2\pi}$, h 为普朗克常数.

上面介绍的数学物理方程都是二阶线性偏微分方程. 关于数学物理方程更深入的讨论将在 4.1 节介绍.

1.2 正交函数族

函数分解成正交函数族线性组合的原理与几何空间中任意矢量可分解为正交基矢量线性组合的原理完全一样.

在二维空间,选定互相垂直的两个基矢量 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$,则二维空间中任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 都可以唯一地表示为这两个基矢量的线性组合,即

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j},$$

式中 x,y 分别是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在基矢量 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 方向上的投影,称 x,y 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在该坐标系中的坐标(分量). 这样,我们就建立了数组 (x,y) 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的一一对应关系. 换言之,在二维空间, $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 构成了正交完备的基矢量族,它可以无误差地表示二维空间上的任何矢量. 若取 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 的长度为一个单位,则称 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 是二维空间的一组正交归一完备的基矢量族.

同理,在三维空间中,若选定一组正交归一完备的基矢量族 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,则三维空间中任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 都可以唯一地表示为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的线性组合,即

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

在数学物理中,经常会碰到一些相互之间可以相加以及与数相乘的对象,例如齐次方程组的解、复数以及在分析中已经定义了加法和与数相乘运算的某个区间上的函数等,虽然这些对象与三维空间中的普通矢量在性质上毫无共同之处,但仍可以把这些对象称为矢量,并根据对加法与数乘的定义建立起 n 维线性空间的概念.

在 n 维线性空间中,若选定互为正交的 n 个基矢量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,则 n 维线性空间中任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可唯一地表示为基矢量族 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 的线性组合,即

$$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n,$$

$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在此正交坐标系中的坐标(分量). 至于正交的概念,在三维空间中,正交指两矢量相互垂直,比较直观,容易理解. 但 n 维空间($n>3$)并不存在于客观世界,不能再用互相垂直来定义正交. 在 n 维空间中,正交指内积(点乘)为零,即

$$\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = \begin{cases} k, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.10}$$

若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是归一矢量族，则式(1.10)改为

$$\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.11}$$

n 维矢量空间的概念可以推广到 n 维函数空间. 考虑在$[a,b]$上连续的两个函数$f(x)$与$g(x)$，它们的内积定义为

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f^*(x) g(x) \rho(x) \mathrm{d}x, \tag{1.12}$$

式中“$*$”表示共轭，$\rho(x)$为权函数. 内积为零，则称两函数相互正交.

设有 n 个在区间$[a,b]$上连续的函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$，若满足

$$(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \int_a^b \varphi_i^*(x) \varphi_j(x) \rho(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.13}$$

则称$\{\varphi_n(x)\}$为正交归一的函数族.

在 n 维函数空间中选定正交归一函数族 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$，若 n 维函数空间任一函数 $f(x)$均可唯一地表示为$\{\varphi_n(x)\}$的线性组合，即

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x), \tag{1.14}$$

则称$\{\varphi_n(x)\}$为 n 维函数空间中一组正交归一完备的基函数族. 若函数族$\{\varphi_n(x)\}$不是完备的，则式(1.14)不是等式，$\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$ 不能准确地表达 $f(x)$，而是存在误差

$$\varepsilon(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x).$$

除了 n 维空间外，在物理学中，特别是在量子力学中，还必须考虑无限维函数空间，其中最重要的是希尔伯特空间. 希尔伯特空间的元素是定义在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的平方可积的复数函数. 这里的正交函数概念仍是 n 维空间中正交函数族概念的推广，这种函数的一个重要例子是

$$\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}nx}\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

由于有

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}mx} \mathrm{e}^{\mathrm{j}nx} \mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad \rho(x) = 1$$

所以函数族$\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}nx}\}$是正交的，但不是归一的. 若选函数族为

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}nx} \right\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

则该函数族就是正交归一的函数族. 下面讨论函数族的完备性问题.