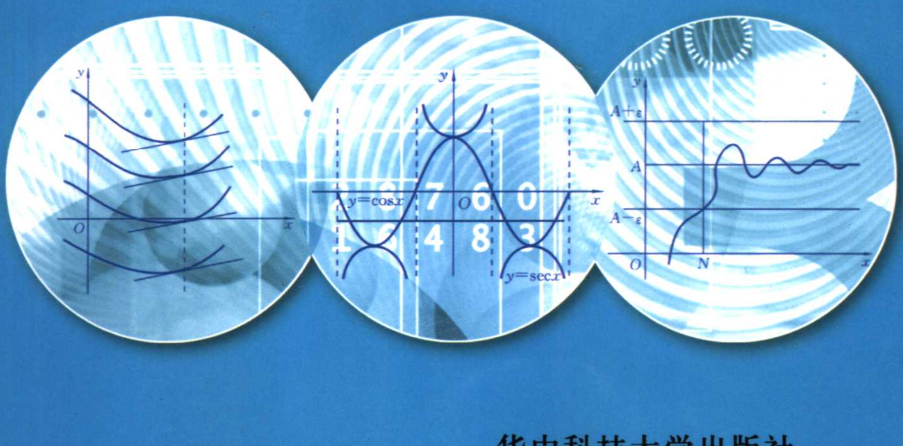
21世纪高职高专公共基础课规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

□ 刘先树 冯影影 主编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

21 世纪高职高专公共基础课规划教材

高等数学

主　编　刘先树　冯影影
副主编　钟鹤鸣　陈晓莉
　　　　韩红曼　杨　戟
参　编　蒋　磊

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘先树　冯影影　主编.—武汉:华中科技大学出版社,2007年8月
ISBN 978-7-5609-4080-9

Ⅰ.高…　Ⅱ.①刘…　②冯…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第086910号

高等数学　　刘先树　冯影影　主编

责任编辑:张　毅　　封面设计:刘　卉
责任校对:刘　竣　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:荆州市今印印务有限公司

开本:787mm×960mm　1/16　印张:11.75　字数:210 000
版次:2007年8月第1版　印次:2007年8月第1次印刷　定价:19.00元
ISBN 978-7-5609-4080-9/O·416

内 容 简 介

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数与微分的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等内容。带“*”的章节，供不同专业选学。每节后配有习题，并在书后附有习题答案。附录含有常用数学公式、基本初等函数导数与微分公式表、基本积分公式以及简易积分表，便于学生复习和自学。

本书根据高职高专院校的培养目标编写，适当减少了理论知识，注重了数学思想与方法的培养，强调数学知识的应用，顺应了高职高专教育的改革和发展，适合作为高等职业技术学院及同等层次的其他院校教材。

前　言

为了适应高职高专教学改革的新形势，落实教育部关于高职高专高等数学课程教学的基本要求，根据“必需、够用”的原则，我们编写了这本《高等数学》。

本书遵循数学的基本规律，简略了不必要的理论推导，有些重要定理的证明仅供教学者参考，重点放在实际应用、习题训练方面，在叙述中力求简明易懂、深入浅出，配有相应的例题和习题以及参考答案。

本书由随州职业技术学院刘先树（编写第 1 章及附录）担任主编并统稿，武汉信息传播职业技术学院冯影影（编写第 5～7 章），随州职业技术学院钟鹤鸣（编写第 2 章）、陈晓莉（编写第 3 章）、韩红曼（编写第 4 章）担任副主编，杨戟、武汉信息传播职业技术学院蒋磊参与了编写本教材的部分章节内容。

本书在编写的过程中，得到了武汉信息传播职业技术学院、随州职业技术学院的领导和老师以及华中科技大学出版社的大力支持，本教材还参考并吸收了有关教材及著作的成果，在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中差错在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

2007 年 6 月

目　　录

第 1 章　函　　数

函数是近代数学的基本概念之一，是描述运动变化中变量间相互依存关系的数学模型. 高等数学就是以函数为主要研究对象的一门课程.

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

在 17 世纪之前，函数一直与公式紧密关联. 到了 1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805—1859) 提出了直至今日仍为人们易于接受，并且较为合理的函数概念.

1. 函数的定义

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个非空数集，若当变量 x 在集合 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f，有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中，变量 x 称为自变量，变量 y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$，通过对应规律 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应，则称 y_0 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记为

$$y_0 = y\big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

所有函数值的集合，称为函数的值域，记为 M.

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素.

(1) 对应规律.

例 1　设函数 $f(x)=x^2+3x-2$，求其对应规律.

解　$f(x)=x^2+3x-2$ 是一个特定的函数，f 确定的对应规律为

$$f(\quad)=(\quad)^2+3(\quad)-2.$$

例 2　设 $y=f(x)=\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x}$，求 $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

解　$y\Big|_{x=\frac{2}{\pi}}=f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\pi\sin\frac{\pi}{2}=\pi.$

例 3　设 $f(x-1)=x^2-3x$，求 $f(x)$.

解　令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，所以

$$f(t)=(t+1)^2-3(t+1)=t^2-t-2.$$

故

$$f(x)=x^2-x-2.$$

(2) 定义域.

使函数有定义的自变量的取值范围称为函数的定义域.

例 4　求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解　这是两个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域，然后求其公共部分即可.

$\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域必须满足 $x^2-x-6\geqslant 0$，即

$$(x-3)(x+2)\geqslant 0,$$

解得

$$x\geqslant 3\quad 或\quad x\leqslant -2.$$

而 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域是 $\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，即

$$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7,$$

解得

$$-3\leqslant x\leqslant 4.$$

于是，原函数的定义域是 $[-3,-2]\cup[3,4]$.

人们通常用不等式、区间或集合形式表示定义域. 其中有一种不等式，以后会常遇到.

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$，点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径.

因为 $|x-a|<\delta$ 相当于 $a-\delta<x<a+\delta$，所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

它就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，a 是这个开区间的中心，δ 是这个开区间的长度的一半(见图 1-1).

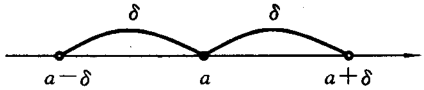


图 1-1

如果仅研究变量在某一点邻近的变化情况，就需要用到邻域，有时需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里，$0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

例 5　下列函数是否相同，为什么？

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(2) $w=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$.

解　(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数，因为它们的定义域不同.

(2) $w=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 是相同的函数，因为对应规律与定义域均相同.

3. 函数的表示法

函数的表示方法，常用的有公式法、表格法和图示法三种.

(1) 公式法.

公式法就是用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法，如 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$，$s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 等. 有些函数在其定义域内要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范围内用不同式子表示的函数称为分段函数. 例如

符号函数
$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，如图 1-2 所示.

又如绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，如图 1-3 所示.

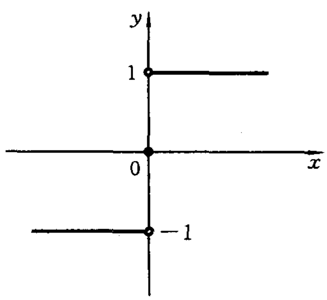


图 1-2

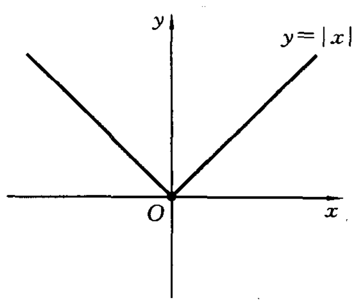


图 1-3

求分段函数的函数值时,应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ -x+1, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(4)$, $f(-4)$ 和 $f(0)$.

解 $f(4)=\sqrt{4}=2$, $f(-4)=-(-4)+1=5$, $f(0)=\sqrt{0}=0$.

(2) 表格法.

将一系列的自变量值与对应的函数值列成表,这种表示函数的方法称为表格法. 如平方表、三角函数表等都是用表格法表示函数的例子.

例 7 据统计,某地 9 月 19 日至 29 日每天的最高气温如表 1-1 所示.

表 1-1

日期 t(9 月)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温 N/℃	28	28	27	25	24	26	27	25	23	22	21

在上表中,对于每个日期 t,都有一个与之对应的唯一最高气温 N.

(3) 图示法.

在坐标系中用点、直线或曲线表示函数的方法称为图示法.

例 8 王先生到郊外去观景,他匀速前进,离家不久,他发现一骑车人的自行车坏了,他帮助这个人把自行车修好,随后又上路了. 请把王先生离家的距离关于时间的函数用图形描述出来.

解 王先生离家的距离关于时间的函数图形如图 1-4 所示.

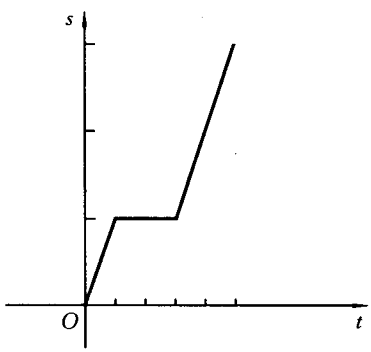


图 1-4

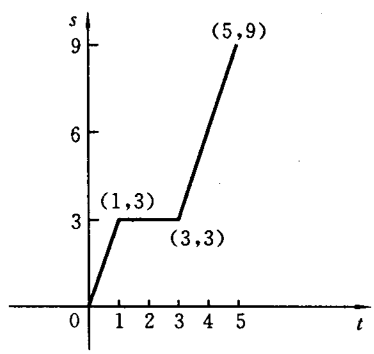


图 1-5

如果给图 1-4 标明具体的数值(见图 1-5),则可由解析表达式表示为

$$f(x)=\begin{cases}3x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3, & 1<x\leqslant 3,\\ 3x-6, & 3<x\leqslant 5.\end{cases}$$

例 9　作出下列分段函数的图形.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

解　该分段函数的图形如图 1-6 所示.

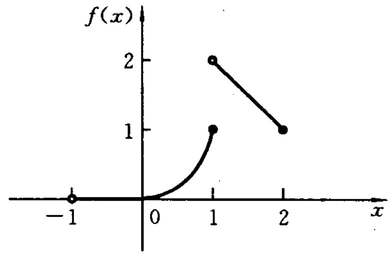


图 1-6

1.1.2　函数的几种特性

1. 有界性

定义 1.2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 M，使得在区间 D 上 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

例如，$x\in\mathbf{R}$ 时，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 内是有界函数. 又如 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$f(x)=\arctan x$ 在它们的定义域内是有界的，而 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界函数.

有的函数可能在定义域的某一部分有界，而在另一部分无界. 例如 $f(x)=\tan x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上是有界的，而在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的.

2. 奇偶性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，$f(x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，其图（见图 1-7））关于 y 轴对称.

又如，$f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，其图（见图 1-8）关于原点成中心对称.

例 10　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=(x^2+1)\cos x$；　　　(2) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

解　(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，是关于原点对称的区间，且

$$f(-x)=[(-x)^2+1]\cos(-x)=(x^2+1)\cos x=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为$(-1,1)$，是关于原点对称的区间，且

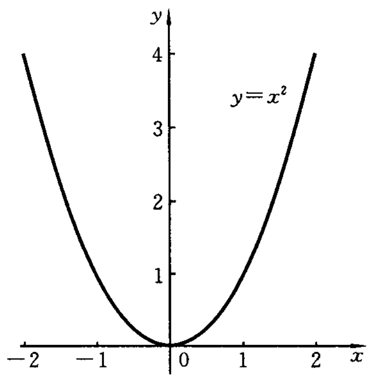


图 1-7

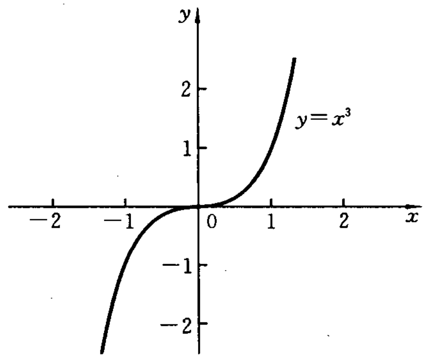


图 1-8

$$f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}$$
$$=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x).$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

3. 函数的单调性

定义 1.4 设 x_1 和 x_2 为区间(a,b) 内的任意两个数.

若当 $x_1<x_2$ 时,函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称该函数在区间(a,b) 内单调增加,或称递增;

若当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称该函数在区间(a,b) 内单调减少,或称递减.

例如,$y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内递增,$y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上递增.

又例如,在 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$ 内递减,$y=\sin x$ 在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上递减.

函数的递增、递减统称函数是单调的.单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的(见图 1-9);单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的(见图 1-10).

类似地,可以定义无穷区间上的单调函数.

4. 函数的周期性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,若存在正数 T,使得对于一切实数 x,都有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为周期函数,T 称为函数 $y=f(x)$ 的周期.

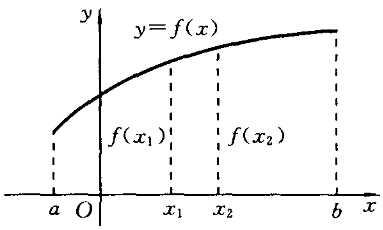


图 1-9

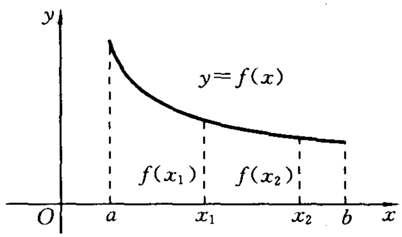


图 1-10

对于每个周期函数来说，定义中的T有无穷多个，通常说的周期指的是最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 的周期为 2π.

定理 1.1　设函数 $f(x)$ 是以 ω 为周期的周期函数，则函数 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\frac{\omega}{a}$ 为周期的周期函数.

例如，函数 $\sin 2x$ 的周期为 π，$\cos\frac{x}{2}$ 的周期为 4π.

函数 $y=|\sin x|$ 的图形(见图 1-11) 每隔长度为 π 的相邻区间上有相同的形状.

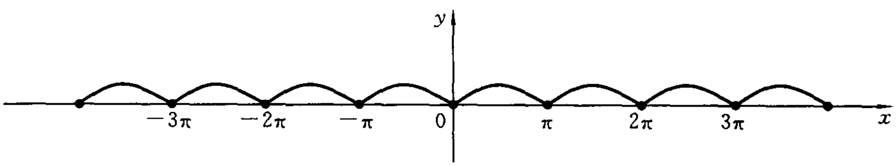


图 1-11

1.1.3　反函数

定义 1.6　设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，如果把 y 当成自变量，x 当成函数，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

习惯上总是用 x 表示自变量，而用 y 表示函数，因此往往把 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$，称为 $y=f(x)$ 的矫形反函数，记为

$$y=f^{-1}(x).$$

所以，通常称函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(x)$ 为直接反函数.

例 11　求函数 $y=\frac{1}{1-x}(x\neq 1)$ 的反函数，并写出它的定义域.

解　由 $y=\frac{1}{1-x}$ 解出 x，得 $x=\frac{y-1}{y}$；将 x，y 分别换成 y，x，得 $y=\frac{x-1}{x}$. 故所求反函数为 $y=\frac{x-1}{x}$，其定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.