全国高协组织教材研究与编写委员会审定

高等数学

经济类（下册）

祝成虎　主　编
郑镇汉　谢日新　副主编

中国科学技术出版社

全国高协组织教材研究与编写委员会审定

高等数学

经济类（下 册）

祝成虎 主 编

郑镇汉 谢日新 副主编

中国科学技术出版社

·北 京·

前 言

随着知识经济时代的到来，我国的高等教育正面临新的发展契机，高职高专教育作为高等教育的重要组成部分，必须关注市场的变化，树立以就业为导向的教育理念，以便更好地适应21世纪社会对应用型人才的需求。

本套教材为培养高职高专经济与管理类专业应用型人才而编写，其中包括《高等数学》经济类（上册）与《高等数学》经济类（下册）。在编写过程中，参考了国内外许多优秀教材，突出以应用为目的，以专业够用为尺度，对一些概念、定理尽可能用简单的语言来描述，使老师易于讲授，学生易于理解。本教材具有以下几个特点：

第一，强调数学基本理论在经济管理中的应用，把数学与经济管理紧密结合，介绍数学理论在经济管理中的应用，指明经济管理模型的数学依据，突出经济数学教材的特色。

第二，本教材在每节后编写了习题，每章后有小结与复习题，使学生能够由浅入深、先易后难，达到综合运用的目的。

第三，本教材注重对概念、定理的应用，省略了某些定理的未证过程，注重与相关专业课程的接轨，为专业课的学习打下基础。

本教材编写组成员：苏万春、祝成虎、郑镇汉、姚党辉、谢日新、陈燕龙、雷泽雄。

限于编写组的学识和经验，书中难免有不妥之处，恳请同行和读者批评指正。

编 者

2006年5月于广州

目 录

第一章　行列式

在生产经营管理活动和科学技术研究中，遇到的许多问题都可以直接或近似地表示成一些变量之间的线性关系，因此，研究线性关系是重要的．行列式是研究线性代数的重要工具．本章引进了二阶、三阶和n阶行列式的概念，进而讨论n阶行列式的基本性质和计算方法，最后给出求解n元线性方程组的克莱姆法则．

第一节　行列式的定义

1.1　二阶行列式

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

式中b_1、b_2是常数项，x_1、x_2是未知量，a_{ij}是x_j的系数$(i,\ j=1,2)$．

我们利用加减消元法求解方程组(1.1)．

（1）$\times a_{22}-$（2）$\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

（2）$\times a_{11}-$（1）$\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

若$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组(1.1)有唯一的一组解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了进一步揭示上面公式的规律，引入二阶**行列式**的概念．

定义 1　记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

二阶行列式中横排的称为**行**，竖排的称为**列**. $a_{ij}(i, j=1,2)$ 称为该二阶行列式第 i 行第 j 列的**元素**；从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**次对角线**. 这样，二阶行列式的值等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积，可以用图 1-1 表示二阶行列式的计算法则.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

图 1-1

例 1 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\times4-3\times1=5$

例 2 $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2\times4-5\times0=-8$

引入了二阶行列式，线性方程组（1.1）的解就可以由行列式来表示，有如下定理：

定理 1 若线性方程组（1.1）的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

则线性方程组（1.1）有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则方程组（1.1）的解，在 $D \neq 0$ 的条件下表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1.2}$$

例 3 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 11 = 0 \end{cases}$$

解 先把方程组标准化

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 11 \end{cases}$$

因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

所以方程组有解，且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 21, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 7$$

由公式（1.2）知，方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = 1$$

1.2 三阶行列式

考虑三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

同样我们可以利用消元法求解，也有相类似的结果.

若 $D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$，则方程组（1.3）有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}) \\ x_3 = \dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}) \end{cases}$$

为了揭示上面公式的规律，引入三阶行列式的概念.

定义 2 记号 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为**三阶行列式**，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

根据上述定义，图 1-2 给出三阶行列式的如下对角线计算法则.

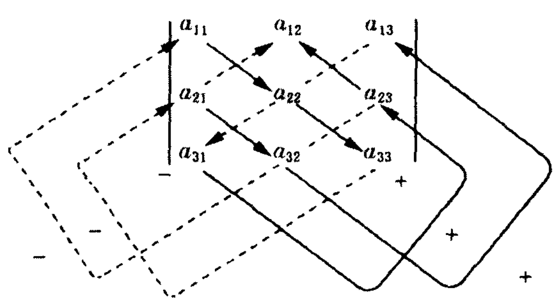

图 1-2

例 4 $$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=1\times2\times(-2)+2\times0\times3+(-4)\times4\times(-2)-1\times0\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times3$$
$$=44$$

引进了三阶行列式，线性方程组（1.3）的解可以由行列式来表示，有如下定理:

定理 2 若线性方程组（1.3）的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组（1.3）有唯一解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}}{D},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}}{D}$$

若记

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

则方程（1.3）的解，在$D\neq 0$的条件下表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.4}$$

例 5　求解三元线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\x_1+x_2-x_3=0\\2x_1+x_3=-1\end{cases}$$

解　因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\2&0&1\end{vmatrix}=1\times1\times1+1\times0\times1+1\times(-1)\times2-1\times1\times2-1\times1\times1-0\times(-1)\times1=-4\neq 0$$

所以方程组有解，且

$$D_1=\begin{vmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}=4,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&0&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=-8,\quad D_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&0\\2&0&-1\end{vmatrix}=-4$$

由公式（1.4）知，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

在此，特别强调：图 1-1、图 1-2 所示的二阶、三阶行列式的计算法则，只适用于二阶、三阶行列式，对于四阶以及四阶以上的行列式没有类似于图 1-1、图 1-2 的计算法则.

将定理 1、定理 2 所反映的规律推广到有唯一解的 n 元线性方程组的情形. 要求 n 元

线性方程组，就要解决n阶行列式的计算问题.

1.3 n阶行列式的定义

我们先分析三阶行列式的定义式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

可见，三阶行列式D可用三项来表示，首先由三阶行列式D中第 1 行的三个元素a_{11},a_{12},a_{13}分别乘上三个二阶行列式，而所乘的二阶行列是D中划去该元素所在的第 1 行与第j列元素后余下的元素所组成；其次，每一项之前都要乘以一个$(-1)^{1+j}$，1 和j正好是元素a_{1j}的行标和列标，其中$j=1, 2, 3$.

按照这一规律，我们可用三阶行列式定义四阶行列式，以此类推，在已定义了$n-1$阶行列式之后，便可得n阶行列式的定义.

定义 3 用n^2个数a_{ij}（$i, j=1,2,\cdots, n$）组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示数值

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**．这种用低阶行列式定义高一阶行列式的方法，称为**递推式定义法**．

定义 4　在 n 阶行列式 D 中划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素后，剩下的元素按原来相对位置所组成的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

这样，n 阶行列式的递推式可表示为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \tag{1.5}$$

式（1.5）称为 n 阶行列式按第 1 行元素的**展开式**．

规定：单元素的行列式就等于该元素，即

$$D=|a_{11}|=a_{11}$$

注意，这里 $|\cdots|$ 并不表示绝对值，而是行列式的符号．

例 6　求四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 5\\1 & 0 & -2 & 3\\2 & 1 & -3 & 0\\1 & -5 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式，并计算行列式的值.

解　元素 a_{23} 的余子式即为划去第 2 行和第 3 列后的三阶行列式

$$M_{23}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\2 & 1 & 0\\1 & -5 & 2\end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\2 & 1 & 0\\1 & -5 & 2\end{vmatrix}$$

又

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & -2 & 3\\1 & -3 & 0\\-5 & 4 & 2\end{vmatrix}=0+12+0-45+4-0=-29$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & -3 & 0\\1 & 4 & 0\end{vmatrix}=-(-6-0+24+9-0+8)=-35$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 1 & 0\\1 & -5 & 2\end{vmatrix}=2+0-30-3-0+0=-31$$

$$A_{14}=(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\2 & 1 & -3\\1 & -5 & 4\end{vmatrix}=-(4-0+20+2-15-0)=-11$$

所以

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$$

$$=2\times(-29)+(-1)\times(-35)+1\times(-31)+5\times(-11)=-109$$

例 7 计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 利用n阶行列式的定义，依次降低其阶数，故有

$$D=a_{11}A_{11}+0\cdot A_{12}+\cdots+0\cdot A_{1n}=a_{11}A_{11}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{44} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

此例所给出的行列式只有在对角线上有非零元素，称为**对角行列式**. 其值等于主对角元素的乘积.

例 8 计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 利用n阶行列式的定义，依次降低其阶数，故有

$$D=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

此例所给出的行列式主对角线上侧的元素全为零，称为**下三角行列式**，其值等于主对角元素的乘积.

习题 1.1

1．计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ b & c & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}$　　（3）$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$

2．利用三阶行列式解三元一次方程

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

3．设四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

（1）写出 D 中元素 a_{13}, a_{23} 的代数余子式；

（2）计算行列式 D 的值.

第二节　n 阶行列式的性质与计算

n 阶行列式的性质

定义 5　将行列式 D 的行与列互换后，所得的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}.

即设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

（证明从略）.

由性质 1 可知，行列式中，行与列的地位相同. 因此，在行列式中，凡对行成立的性质对列也都成立.

例 1 计算行列式 D 的值

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（此行列式主对角线下侧元素全为零，称为**上三角行列式**）

解 由性质 1 得

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

性质 2 互换行列式的任意两行（列），行列式的值变号.

（证明从略）.

如二阶行列式，交换两列，有

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}=a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}$$

$$=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

例 2　设

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&0\\6&7&8\end{vmatrix}=-30$$

互换第 1 行与第 2 行后，得

$$\overline{D}=\begin{vmatrix}4&5&0\\1&2&3\\6&7&8\end{vmatrix}=30$$

推论　如果行列式 D 中有两行的对应元素相等，则 $D=0$.

证明　交换行列式 D 中对应元素相等的两行，得到的行列式仍是 D . 由性质 2 知，行列式的值应变号，得 $D=-D$ ，所以 $D=0$.

例如，下面行列式交换第 1 行和第 2 行，由性质 2 得

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\5&6&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\5&6&7\end{vmatrix}=-D$$

从而 $D=0$.

性质 3　n 阶行列式的值等于其任意一行（列）所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik},(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj},(j=1,2,\cdots,n)$$

（证明从略）.

例如，下面三阶行列式交换第 1 行和第 2 行，然后按第 1 行元素展开

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=-\left[a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\right]$$

$$=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$