

新课标中考数学

考点题库

• 主编 王继延

数学

新课标

中考数学考点题库

主 编 王继延

副主编 孙孝武 周建勋 周伟扬

上海遠東出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标中考数学考点题库/王继延主编. 上海:上海远东出版社,2007

ISBN 978-7-80706-460-2

I. 新… II. 王… III. 数学课-初中-习题-升学参考资料 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 066881 号

责任编辑:储成连 丁是玲
封面设计:李 廉

新课标中考数学考点题库

主 编 王继延

出版:上海世纪出版股份有限公司远东出版社

地址:中国上海市仙霞路 357 号

邮编:200336

网址:www.ydbook.com

发行:新华书店上海发行所 上海远东出版社

制版:南京前锦排版服务有限公司

印刷:昆山市亭林印刷有限公司

装订:昆山市亭林印刷有限公司

版次:2007 年 8 月第 1 版

印次:2007 年 8 月第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16

字数:470 千字

印张:23

印数:1—5100

ISBN 978-7-80706-460-2/G·738 定价:28.00 元

版权所有 侵权必究(举报电话:62347733)

如发生质量问题,读者可向丁厂调换。

零售、邮购电话:021-62347733-8855



编写说明

亲爱的读者,无论你是否是一位辛勤耕耘在教学第一线的教师,还是一位正在发奋学习的学生,你都会发现现在的数学课程,它的内容、思路 and 理念都发生着一些变化,你们的课堂教学和数学学习活动也都发生了良好的变化.随着这些变化,你们必然会注意到初中数学课程最后的中考评价,它的评价理念与方式,内涵与形式,等等各方面所发生的许多重要的变化.

本书为你提供一个丰富的试题库,给你展示近几年来中考所带来的一些新的面貌,你可以发现整个中考评价的面貌已经发生了极其良好的而且是健康的变化,基础和创新的结合已经得到了较好的体现.

那么而对这样的变化,我们应该采取怎么样的策略呢?

处于教学和评价第一线的教师与学生必须认真思考评价考试的出发点和着眼点,评价考试的关注点和趋势策略:

• 坚持基础性,注重数学课程核心内容和基本技能

义务教育阶段的数学课程最基本的特点是基础性、普及性和发展性.坚持基础性,关注义务教育阶段中最为基础的核心内容和基本技能,这是我们进行数学课程评价的基本出发点.与此同时,其考查形式已经不再完全是原来的那一套传统的算算证证,正呈现出一种全新的面貌.我们必须充分注意到这一新情况,紧紧抓住数学课程的核心内容和基本技能,以敏锐的数学思维,积极地应对目前所出现的新情况,真正达到数学新课程所要求的目标.

• 注重数学思维能力和终身发展所应具备的一般能力

数学思维能力和终身发展所应具备的一般能力,是我们所关注的.在现代这样一个充满竞争力的信息社会中,更显出它们的重要性.数学学科的基本能力,绝不完全是数学基础知识的符号或文字叙述形式的简单堆砌,不单纯是技能本身所蕴涵的技巧,而应该是运用这些数学知识所蕴涵的数学思想和方法解决问题的能力,是对具体情景中的数学信息做出合理的解释与选择,处理并做出合理推断的能力,是能用所学的数学知识刻画事物间的相互联系的能力,是初步的空间观念和几何直觉以及初步的演绎推理能力.平时的数学教学就应该牢牢抓住数学能力的培养的这条主线,这是我们终身发展所需要的立足之本.

• 注重学习过程,接受更多的挑战

数学新课程强调学生的数学学习活动应当是一个生动活泼的、主动的和充满个性的过程,因此各地区对于数学学习的评价,在关注学生学习的结果的同时,还普遍注重学生的数学学习过程.许多新颖的开放性、探究性、信息性、操作实验性等试题,让学生从实际情景获取数学信息,在操作实验过程中探究数学规律,改变了传统试题的封闭形式,数学课程的评价正在从只关注结果的原有状态逐渐转变成结果与过程并重的新状态,为学生的数学学习活动创造了一种充满活力、富有挑战性的新环境.

• 注重数学应用意识和建模能力的培养

数学新课程明确提出,数学教学应让学生经历知识的形成与应用的过程,从而更好地理解数学知识的意义,掌握必要的基础知识与基本技能,发展应用数学知识的意识与能力,增强学好数学



的愿望和信心,考查运用数学知识内容和技能分析解决各种实际应用问题,已经成为一种必然的趋势.解决实际应用问题的关键在于善于从所给问题中,俘获必要的数学信息,即问题中各个对象的数量关系,建立数学模型,这是最为根本的一点.

• 注重数学阅读和获取信息的能力,注重统计思想的运用

充满信息的时代需要我们具有很好的获取信息、收集、整理、描述信息,建立数学模型,进而解决问题的能力.数学课程的中考评价注重这方面的考查,特别是关于统计概率内容的考查,而其形式已经逐渐摆脱了原来单纯计算的模式,注重数学阅读和获取信息的能力,注重统计思想,善于处理各类问题,认真读图识图,分析数据及相关材料,获取数学信息,解决问题.涌现了一些较为新颖的试题形式,我们必须充分地注意到这样的变化.

• 正视差异,把握自我,充分发挥数学学习水平

数学新课程,其基本出发点是促进学生全面、持续、和谐地发展,因而以学生的发展为本,即以学生作为公民的数学素养和进一步学习对初中数学发展水平的要求作为选取有关考试内容和认知水平要求的依据,已经成为一种共识.那种所谓为了加强基础而人为地编造一些繁偏的试题,设置一个又一个的陷阱,超越学生的认知水平等等的做法越来越为大家所摒弃.

本书由王继延主编,孙孝武、周建勋、周伟扬为副主编,参与编写的有钱云祥、浦叙德、蒋网健、周荣伟、董建江、黄少华、寿宝良、金宗民、陈武、蔡亚雅、吴敏、潘家良、郭义刚、吴文丰、陈文、钟立清、林少娜等来自广大新课程实验区的命题研究专家和具有丰富实践经验的骨干教师,他们为本书的成功编制作出了大量工作,在此表示衷心的感谢.

愿本书能与你一起在中考评价中发挥良好的作用,一起得到更好的成长.



Contents

目 录

第1章 实数	1
测试题	18
参考答案	21
第2章 代数式	23
测试题	32
参考答案	33
第3章 方程与方程组	34
测试题	50
参考答案	50
第4章 不等式与不等式组	52
测试题	68
参考答案	69
第5章 函数	71
测试题	97
参考答案	99
第6章 二次函数	101
测试题	131
参考答案	133
第7章 点线面	135
测试题	156
参考答案	157
第8章 三角形	159
测试题	179
参考答案	182
第9章 四边形	186
测试题	224
参考答案	226



第10章 圆	230
测试题	259
参考答案	262
第11章 尺规作图与视图	267
测试题	279
参考答案	281
第12章 图形的变换	282
测试题	296
参考答案	298
第13章 图形的相似	300
测试题	316
参考答案	318
第14章 图形与证明	321
测试题	333
参考答案	335
第15章 统计概率	336
测试题	349
参考答案	352
第16章 课题学习	354
测试题	359
参考答案	361



第1章

实数

易 [0101] 有下列说法：①有理数和数轴上的点一一对应；②不带根号的数一定是有理数；③负数没有立方根；④ $-\sqrt{17}$ 是17的平方根，其中正确的有()。

- A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个

考点 实数的基本概念/筛选法

分析 和数轴上的点一一对应的数应是实数；不带根号的数不一定是有理数，如 π ，0.101 001 000 1...；负数有一个负的立方根；一个正数有两个平方根， $-\sqrt{17}$ 是17的其中一个平方根，所以④是正确的。

解答 B.

点评 如果④中题目改为17的平方根是 $-\sqrt{17}$ ，则是错误的；17的平方根应是 $\pm\sqrt{17}$ 。

易 [0102] 2004年全国国内生产总值按可比价格计算，比上年增长9.5%，达到136 515亿元，136 515亿元用科学记数法表示(保留4个有效数字)为()。

- A. 1.365×10^{12} 元 B. 1.3652×10^{13} 元 C. 13.65×10^{12} 元 D. 1.365×10^{13} 元

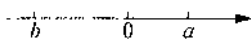
考点 科学记数法及有效数字的概念/筛选法

分析 136 515亿用科学记数法表示为 1.36515×10^{13} ，保留4个有效数字则为 1.365×10^{13} 。

解答 D.

点评 用科学记数法把一个数写成 $a \times 10^m$ (m 为整数)，其中 $1 \leq |a| < 10$ ；而有效数字则是从该数第一个不为零的数字起的所有数字(如： $100\ 515 = 1.00515 \times 10^5$ ，保留4个有效数字为 1.005×10^5)。

中 [0103] 实数 a 、 b 在数轴上的位置如图所示，那么化简 $|a-b| - \sqrt{a^2}$ 的结果是()。



- A. $2a - b$ B. b C. $-b$ D. $-2a + b$

考点 绝对值的概念及数的开方/数形结合

分析 从数轴上 a 、 b 的位置可知： $a > b$ ，且 $a > 0$ ，所以 $|a-b| = a-b$ ； $\sqrt{a^2} = |a| = a$ 。

解答 C.

点评 从实数在数轴上的位置，应该得到如下信息：① $a > 0$ 、 $b < 0$ ；② $|b| > |a|$ 。同时须注

意 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$ 应注意 $\sqrt{a^2}$ 与 $(\sqrt{a})^2$ ($a \geq 0$) 的区别。





★ **中** [0104] $-0.3^2 \div 0.5 \times 2 \div (-2)^2$ 的值是().

A. $-\frac{9}{100}$

B. $\frac{9}{100}$

C. $\frac{9}{400}$

D. $-\frac{9}{400}$

考点 有理数的运算/操练演算

分析 有理数的运算顺序为：先乘方、开方，然后乘除，最后加减；有括号的从小到大进行。

解答 A.

点评 运算时，如果是同级运算，应从左到右进行；本题还应注意 -0.3^2 与 $(-2)^2$ 中，底数的区别。

★ **中** [0105] 如图 1-1，小圆图表示网络的结点，结点之间的连线表示它们之间有网线相连，连线标注的数字表示该网线单位时间内可以通过的最大信息量。现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开经不同的路线同时传递，则单位时间内传递的最大信息量为().

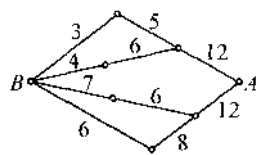


图 1-1

A. 19

B. 20

C. 24

D. 26

考点 阅读及分析能力/阅读分析

分析 由于每条网线规定了单位时间内能通过的最大信息量，所以从上到下四条网线能通过的最大信息量分别为：3、4、6、6。

解答 A.

点评 本题主要考虑到每条路线能通过的是最小信息量，同时还须注意支线的信息量不应超过干线信息量。

★ **难** [0106] 已知 x, y 为实数， $y = \frac{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-x^2} + 1}{x-2}$ ，则 $3x+4y$ 的值为().

A. -5

B. -7

C. 5

D. 7

考点 二次根式的基本概念及性质/操练演算

分析 $\because \sqrt{x^2-4}$ 和 $\sqrt{4-x^2}$ 都有意义， $\therefore x^2-4 \geq 0$ 且 $4-x^2 \geq 0$ ，

$\therefore x^2=4$ ， $\therefore x=\pm 2$ 。又 $\because x-2 \neq 0$ ， $\therefore x \neq 2$ ，

$\therefore x=-2$ 。把 $x=-2$ 代入原式，得 $y=-\frac{1}{4}$ ，

$\therefore 3x+4y=-7$ 。

解答 B.

点评 本题需注意： $\sqrt{a} + \sqrt{-a}$ 中，当二次根式中同时存在两个相反数时，被开方数只能为零，同时还应注意到分母不为零。

★ **难** [0107] 若实数满足下列关系式： $|a|+a=0$ ， $a \neq 0$ ， $|ab|=ab$ ， $|c|-c=0$ ，则 $\sqrt{b^2} - |a+b| - \sqrt{(c-b)^2} + |a-c|$ 的结果为().

A. $2a+b$

B. $2b-a$

C. b

D. $-b$

考点 绝对值与二次根式的概念/操练演算

分析 $\because |a|+a=0$ ， $a \neq 0$ ， $\therefore a < 0$ 。又 $\because |ab|=ab$ ， $\therefore b < 0$ ；由 $|c|-c=0$ 可得 $c \geq 0$ 。 $\therefore$ 原式 $= -|b| - |a+b| - (c-b) + |a-c| = -b + a + b - (c-b) - (a-c) = b$ 。

解答 C.



点评 本题应注意 $a \mid - \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ a, & a < 0. \end{cases}$ 同时 b 的范围需由 a 来推出.

难 [0108] 将正偶数按下表排成5列: 根据上面排列规律, 则 2004 应在().

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列
第一行		2	4	6	8
第二行	16	14	12	10	
第三行		18	20	22	24
.....			28	26	

- A. 第126行, 第2列 B. 第126行, 第3列
C. 第251行, 第3列 D. 第251行, 第2列

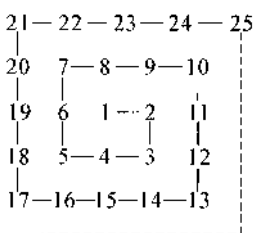
考点 分析及推理能力/阅读分析

分析 按表中排列可以看出每8个数占2行, 从2到2000共有1000个正偶数, 共占125个2行, 即250行, 所以2004在第251行第3列.

解答 C.

点评 由于在奇数行和偶数行中数的排列顺序不同, 所以按2行算比较方便.

超 [0109] 将自然数1, 2, 3, ...按右图1-2所示排列. 从1开始, 右边写2, 然而向下转弯写3, 再向左转弯写4, 5, 再向上转弯写6, 7 ... 这样第一次转弯的是2, 第2次转弯的是3, 第3次转弯的是5, 第4次转弯的是7. 问第20次转弯的是几? ()



- A. 109 B. 110
C. 111 D. 112

考点 分析、观察及推理能力/阅读分析

图1-2

分析 把转角上的数写出来: 2、3、5、7、10、13、17、21... 作相邻两数的差: 1、2、2、3、3、4、4、... 由此可见, 转角上的数有这样的规律, 每个转角上的数依次为:

第1个是 $2=1+1$; 第2个是 $3=2+1$; 第3个是 $5=2+1+2$; 第4个是 $7=2+1+2+2$;
第5个是 $10=2+1+2+2+3$, 依次类推, 第20个转角上的数是:

$$\underbrace{2+1+2+2+3+3+4+4+\cdots+9+9+10+10}_{20\text{个数}} = 1+2 \times (1+2+3+\cdots+10) = 1+2 \times 55 = 111.$$

解答 C.

点评 从本题可以看出, 解题时须仔细观察, 先由整体到部分, 再由部分到整体, 挖掘隐藏在题目里的数量关系和规律, 以选好解题的突破口.

易 [0110] 用科学记数法表示的近似数 2.30×10^5 有 _____ 个有效数字, 它精确到 _____ 位.

考点 有效数字及近似数的概念/操演演算

分析 $2.30 \times 10^5 = 230\,000$ 精确到的位数, 应先把它恢复成原数, 再进行计算, 而有效数字只需计算 $a \times 10^n$ 中 a 的部分即可.

解答 2.30×10^5 有3个有效数字, 精确到千位.





点评 有效数字并不是6个,精确到位数也不是百分位.

易 [0111] 请用“+、-、×、÷”或括号将4、5、6、10连成算式,使其结果为24:

考点 有理数的运算/实验操作

分析 此题取材于民间流行的“算24点”.主要通过四则运算或适当添加括号,特殊的也可能用到乘方运算,将四个数按适当的顺序排列,使得其结果为24.

解答 $24 = 4 \times 5 + 10 - 6$ (答案不唯一)

点评 本题为开放题,只要符合要求,答案可以有多种情况,如: $24 = (10 - 4) \times 5 - 6$ 等.

易 [0112] 如图1-3,是一个简单的数值运算程序,当输入 x 的值为-1时,则输出的数值为

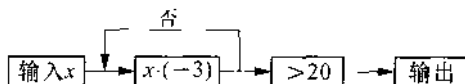


图1-3

考点 有理数的运算及看图分析能力/操练演算

分析 输入 x 后,经计算 $x \cdot (-3)$,如果数值小于或等于20,必须返回上一步重新计算 $x \cdot (-3)$.只有当结果大于20时,才能输出:当输入-1时第一次为3;第二次为-9;第3次为27时可以输出.

解答 27.

点评 利用计算机程序来设置考题,这类试题在近年中考题中比较常见,关键要看懂程序的设计规律.

中 [0113] 若 $|a-b+1|$ 与 $\sqrt{a+2b+4}$ 互为相反数,则 $(a-b)^{2005} =$ _____.

考点 非负数的性质/操练演算

分析 由题意可得 $|a-b+1| + \sqrt{a+2b+4} = 0$. 由于 $|a-b+1| \geq 0$, $\sqrt{a+2b+4} \geq 0$,
 $\therefore \begin{cases} a-b+1=0, \\ a+2b+4=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-2, \\ b=-1, \end{cases} \therefore (a-b)^{2005} = (-1)^{2005} = -1$.

解答 -1.

点评 利用非负数解题,经常碰到的是三种情况: $|a|$, $\sqrt{a}$, a^2 , 它们相加若是零,则只能是均为零的情况.

中 [0114] 观察下列各式: $\sqrt{1+\frac{1}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{2+\frac{1}{4}} = 3\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{3+\frac{1}{5}} = 4\sqrt{\frac{1}{5}}$, ...
 请你将猜想到的规律用自然数 $n(n \geq 1)$ 表示出来是_____.

考点 二次根式的化简及规律的寻找/数学归纳

分析 左边根号中有两项,其中第一项为1、2、3...,即为 n ;第二项为 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$...,分母为 $n+2$.而右边根号外的常数为2、3、4...,即为 $n+1$,根号里面的分数与左边分数相同.

解答 $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}} = (n+1) \cdot \sqrt{\frac{1}{n+2}}$.

点评 本题须在认真观察的基础上找出内在规律;同时还须特别留意起始项中 n 的取值.

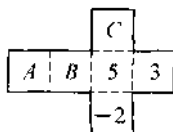


图1-4

中 [0115] 如图1-4所示是一个正方体纸盒展开图,按虚线折成正方体后,若相对面上的两数是互为相反数,则 $A+B+C =$ _____.





考点 动手操作及空间想象能力/实验操作

分析 从图中可以看出,折成正方体后, $A \rightarrow 5$, $B \rightarrow 3$, $C \rightarrow 2$, 所以 $A = -5$, $B = 3$, $C = 2$.

解答 -6 .

点评 本题可由动手操作直接获得结果.

中 [0116] 若 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|} = A$, 则 $A =$ _____.

考点 实数的分类讨论及绝对值的概念/分类讨论

分析 考虑到要去掉绝对值,则必须对 a 、 b 的正负情况进行讨论,由于 a 、 b 均不为零,故分三种情况: ① a 、 b 同正; ② a 、 b 同负; ③ a 、 b 一正一负.

解答 3 或 -1 .

点评 对 a 、 b 的符号进行讨论,要考虑各种情况,不能遗漏.

中 [0117] 利用计算器探索: 已知按一定规律排列的一组数, $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{20}}$,

如果从中选出若干个数,使它们的和大于 3,那么至少要选 _____ 个数.

考点 二次根式的运算/实验操作

分析 由于一个正数的分母越小,则这个数的倒数越大,所以应从左到右选取.

$\because 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \approx 1 + 0.707 + 0.577 + 0.5 = 2.784 < 3$, 而 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 1 + 0.707 + 0.577 + 0.5 + 0.447 = 3.231 > 3$, $\therefore$ 至少要从中选 5 个数.

解答 5 个.

点评 由于现在中考允许学生使用计算器,所以利用计算器探求规律也是中考的一个热点.

中 [0118] 观察下列分母有理化运算.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = -\sqrt{2} + \sqrt{3}; \quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = -\sqrt{3} + \sqrt{4}; \quad \dots;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}} = -\sqrt{2003} + \sqrt{2004}; \quad \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}} = -\sqrt{2004} + \sqrt{2005}.$$

利用上面的规律计算: $\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}} + \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}} \right) \cdot (1 + \sqrt{2005}) =$ _____.

考点 二次根式的运算/数学归纳

分析 利用题设规律可得: $\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}} \right) = (-1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2004} - \sqrt{2004} + \sqrt{2005}) = -1 + \sqrt{2005}$.

解答 2004.

点评 分母有理化主要分两种类型: ① $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 型: $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$; ② $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 型: $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} =$

$$\frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{a - b}.$$





★ 难 [0119] 探究数字“黑洞”：“黑洞”原指非常奇怪的天体，它体积小，密度大，吸引力强，任何物体到了它那里都别想再“爬”出来，无独有偶，数字中也有类似的“黑洞”，满足某种条件的所有数，通过一种运算，都能被它“吸”进去，无一能逃脱它的魔掌，例如：任意找一个3的倍数的数，先把这个数的每一个数位上的数字都立方，再相加，得到一个数，然后把这个新数的每一个数位上的数字再立方、求和，……重复运算下去，就能得到一个固定的数 T ——_____。我们称它为数字“黑洞”。

T 为何具有如此魔力？通过认真的观察、分析，你一定能发现它的奥秘！

考点 有理数的运算/阅读分析

分析 可以取一个3的倍数如63，按上面的规律运算如下：

$$6^3 + 3^3 = 216 + 27 = 243; 2^3 + 4^3 + 3^3 = 8 + 64 + 27 = 99; 9^3 + 9^3 = 729 + 729 = 1458;$$

$$1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 1 + 64 + 125 + 512 = 702; 7^3 + 0^3 + 2^3 = 351;$$

$$3^3 + 5^3 + 1^3 = 153; 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153; \dots; \text{继续下去，结果都为 } 153, \text{ 所以 } T = 153.$$

解答 $T = 153$.

点评 此类题目的阅读量较大，故需认真阅读，从中找出蕴含的信息，再用于解题。

★ 难 [0120] 用“ $\star$ ”、“ $\blacktriangle$ ”定义新运算：对于任意实数 a, b ，都有 $a \star b = a$ 和 $a \blacktriangle b = b$ 。例如： $3 \star 2 = 3$ ， $3 \blacktriangle 2 = 2$ ，则 $(2\ 006 \star 2\ 005) \star (2\ 004 \blacktriangle 2\ 003) =$ _____。

考点 有理数的实际应用/数学建模

分析 由已知条件可得： $2\ 006 \star 2\ 005 = 2\ 005$ ， $2\ 004 \blacktriangle 2\ 003 = 2\ 003$ ，而 $2\ 005 \star 2\ 003 = 2\ 005$ 。

解答 2 005.

点评 新运算的定义在考题中较为常见，须清楚这样运算只是人为规定的，关键要弄清它的规律。

★ 难 [0121] 在数学活动中，小明为了求 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ 的值（结果用 n 表示）设计了如图 1-5 所示的几何图形：

请你利用这个几何图形求

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} \text{ 的值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

考点 识图能力，有理数的运算/面积割补，数形结合

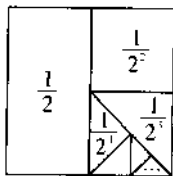


图 1-5

分析 此图为正方形，每分一次，面积就变为原来的 $\frac{1}{2}$ ，这样，一直到第 n

次，已经分出来的面积恰为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ，而此正方形最后剩下的一块面积为 $\frac{1}{2^n}$ ，所以：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

解答 $1 - \frac{1}{2^n}$.

点评 此题的难点在于算式要与面积联系起来，用面积来解题有时给人以耳目一新的感觉。

★ 难 [0122] 某超市推出如下优惠方案：(1)一次性购物不超过 100 元不享受优惠；(2)一次性购物超过 100 元但不超过 300 元一律九折；(3)一次性购物超过 300 元一律八折。小明两次购物



分别付款 80 元, 252 元. 如果小明一次性购买与上两次相同的商品, 则应付款_____元.

考点 有理数的实际应用/阅读分析

分析 根据优惠方案: 小明付款 80 元时, 他没有享受优惠; 小明付款 252 元时, 他有可能是买了 280 元物品而享受的九折优惠, 付了 252 元; 也可能是买了 315 元物品而享受的八折优惠, 同样也付了 252 元. 所以当他一次性购买上述物品时, 需付款有两种情况: ① $(80+280) \times 80\% = 288$ 元; ② $(80+315) \times 80\% = 316$ 元.

解答 288 元或 316 元.

点评 此题关键是 252 元有两种优惠的结果, 不要遗漏.

超 [0123] 油罐有 A、B 两条进油管, C、D、E 三条出油管. 要灌满空罐, 单开 A 管要 1.5 h, 单开 B 管要 2 h. 要排空一罐油, 单开 C 管要 3 h, 单开 D 管要 4 h, 单开 E 管要 4.5 h. 现在罐内有 $\frac{1}{4}$ 罐油, 按 A、C、D、B、E 的顺序打开油管, 每次每管单独开 1 h, 循环进行. 问多长时间后油罐灌满? 答: _____.

考点 有理数的应用/阅读分析

分析 设工作总量为 1, 则 A、B、C、D、E 的工作效率分别为: $\frac{1}{1.5}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4.5}$, 依题意按 A、C、D、B、E 的顺序打开油管各 1 h, 只能使油罐中的油增加 $\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4.5} = \frac{13}{36}$ 罐. 开始时油罐中有 $\frac{1}{4}$ 罐油, 可见第一轮循环时油罐一直没有满, 最后油罐中有 $\frac{1}{4} + \frac{13}{36} = \frac{11}{18}$ 罐, 此后再开 A 管 $(1 - \frac{11}{18}) \div \frac{1}{1.5} = \frac{7}{12}$ h, 油罐即满.

解答 $5\frac{7}{12}$ h.

点评 在工作类问题中, 常设总量为 1, 其中须注意: $\text{工作效率} = \frac{\text{工作总量}}{\text{工作时间}}$.

超 [0124] 阅读下列材料, 解答问题. 饮水问题是关系到学生身心健康的重要生活环节, 实验中学共有教学班 24 个, 平均每班有学生 50 人, 经估算, 学生一年在校时间约为 240 天(除去各种节假日), 春、夏、秋、冬季各为 60 天. 原来, 学生饮水一般都是购买纯净水(其他碳酸饮料或果汁价格更高), 纯净水零售价为 1.50 元/瓶, 每个学生春、秋、冬季平均每天要买 1 瓶纯净水, 夏季平均每天要买 2 瓶纯净水, 学校为了减轻学生消费负担, 要求每个班自行购买 1 台冷热饮水机. 经调查, 购买一台功率为 500 W 的冷热饮水机约为 150 元, 纯净水每桶 6 元, 每班春、秋两季, 平均每 1.5 天购买 4 桶, 夏季平均每天购买 5 桶, 冬季平均每天购买 1 桶, 饮水机每天开 10 h, 当地民用电价为 0.50 元/度. 问题:

- (1) 在未购买饮水机之前, 全班平均每个学生要花费_____元.
- (2) 购买饮水机解决学生饮水问题后, 每班一年购买纯净水花费_____元.
- (3) 这项便利学生的措施实施后, 实验中学一年为全体学生共节约_____元钱.

考点 有理数的应用/阅读分析

分析 (1) 购买饮水机前, 每个学生花费: $(180 + 2 \times 60) \times 1.5 = 450$ 元.

(2) 购买饮水机后, 一年每个班所需纯净水的桶数为: 春、秋两季, 每 1.5 天 4 桶, 则 120 天共要 $4 \times (120 \div \frac{3}{2}) = 320$ 桶. 夏天需: $60 \times 5 = 300$ 桶, 冬季需 60 桶, 所以全年共需 680 桶, 故购买



矿泉水费用为 $680 \times 6 = 4080$ 元; 使用电费为 $240 \times 10 \times \frac{500}{1000} \times 0.5 = 600$ 元. 所以全班全年共花费: $4080 + 600 + 150 = 4830$ 元.

(3) 一个学生省钱为 $450 - \frac{4830}{50} = 353.40$ 元, 全体学生共节省钱为 $353.40 \times 24 \times 50 = 424080$ 元.

解答 (1) 450. (2) 4830. (3) 424080.

点评 该题数量关系错综复杂, 需要仔细审题、理清关系、逐步求解.



易 [0125] 已知 $x-2$ 的算术平方根等于 4, $y+2$ 的立方根是 -3, 求 $x+y$ 的值.

考点 算术平方根及立方根的基本概念/操练演算

分析 由题意可得 $x-2=16$, $y+2=-27$, 从而可以求出 x 、 y .

解答 $\because x-2$ 的算术平方根为 4, $\therefore x-2=16$, $\therefore x=18$.

又 $\because y+2$ 的立方根为 -3, $\therefore y+2=-27$, $\therefore y=-29$,

$\therefore x+y=18+(-29)=-11$.

点评 此题须注意平方根与立方根的异同.



易 [0126] 计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 1 + (\sin 60^\circ)^0$.

考点 实数的运算/操练演算

分析 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, $-1 = -1$, 而 $(\sin 60^\circ)^0 = 1$.

解答 原式 $= 2 - 1 + 1 = 2$.

点评 负整数指数的意义为: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, 且 p 为整数), 零指数的意义为: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$).



易 [0127] 计算: $(-2)^{-2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 45^\circ + (-1)^{2000} - \sqrt[3]{-8} \div 2$.

考点 实数的运算/操练演算

分析 应注意的是 $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt[3]{-8} = -2$.

解答 原式 $= \frac{1}{(-2)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - (-2) \div 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{7}{4}$.

点评 此类运算中应特别小心各项的符号.



易 [0128] 若 a 、 b 互为相反数, c 、 d 互为倒数, m 的绝对值是 2, 求 $a^2 - b^2 + (cd)^0 - m^2$ 的值.

考点 有理数的运算/操练演算

分析 由 a 、 b 互为相反数, 则 $a+b=0$; c 、 d 互为倒数, 则 $cd=1$, m 的绝对值是 2, 则 $m=\pm 2$.

解答 由题意可得: ① $a+b=0$, ② $cd=1$, ③ $m=\pm 2$.

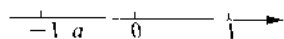
$\therefore$ 原式 $= (a+b)(a-b) + (cd)^0 - m^2 = 0 \cdot (a-b) + 1^0 - (\pm 2)^2 = 1 - 4 = -3$.

点评 相反数及倒数的意义的正确把握是解题的关键, 同时应注意 $m=\pm 2$.



易 [0129] 数 a 在数轴上的位置如图所示, 试把 a , a 的相反数, a 的倒数及 a 的倒数的绝对值从小到大用“ $<$ ”号连接起来: _____.

考点 有理数大小的比较/数形结合





分析 由于 a 的相反数是 $-a$, a 的倒数是 $\frac{1}{a}$, a 的倒数的绝对值是 $|\frac{1}{a}|$. 由图可知: 因为 $-1 < a < 0$, 所以, $0 < -a < 1$; $\frac{1}{a} < -1$, $|\frac{1}{a}| > 1$.

解答 $\frac{1}{a} < -a < a < |\frac{1}{a}|$.

点评 此类题采用特殊值法亦很方便.

易 [0130] 有资料表明: 某地区高度每增加 100 m, 气温下降 0.8°C . 小李和小明想出一个测量某山峰高度的方法: 小李在山脚, 小明在山顶. 他们同时在上 8 点整测得山脚和山顶的气温分别为 -0.2°C 和 -3.2°C . 你知道山峰有多高吗?

考点 有理数运算的实际应用/操练演算

分析 由题意可得, 山顶比山脚气温降低了 3°C , 从而可以求出山峰的高度.

解答 由题意可得, 山峰的高度为: $\frac{-0.2 - (-3.2)}{0.8} \times 100 = 375(\text{m})$.

点评 应注意山峰的高度每增加 100 m, 气温下降 0.8°C , 要弄清其中的比例关系.

易 [0131] 下列一组按规律排列的数: 1、2、4、8、16..., 第 6 个数是多少? 第 2 005 个数是多少? 第 n 个数呢? (n 为正整数).

考点 观察分析能力/数学归纳

分析 $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4 \dots$ 由此可得规律, 第 n 个数为 2^{n-1} (n 为正整数).

解答 由题意可得, 第 6 个数为 $2^5 = 32$, 第 2 005 个数为 2^{2004} , 第 n 个数为 2^{n-1} (n 为正整数).

点评 由于 n 是正整数, 所以 $n = 1, 2, 3 \dots$, 而第一个数为 2^0 , 所以第 n 个数为 2^{n-1} , 而非 2^n .

易 [0132] x 是怎样的实数时, 下列各式在实数范围内有意义?

(1) $\frac{\sqrt{1-x}}{x}$; (2) $\sqrt{x^2+1-2x}$; (3) $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{1-2x}}$; (4) $\sqrt{x+1} \cdot x^0$.

考点 实数的取值范围/操练演算

分析 求实数的取值范围, 主要考虑三种类型: ① $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$); ② $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$); ③ a^0 ($a \neq 0$).

解答 (1) $x \leq 1$ 且 $x \neq 0$; (2) x 取任意实数; (3) $-4 \leq x < \frac{1}{2}$; (4) $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$.

点评 当题中要考虑多种类型的情况时, 应该取各范围的公共部分.

易 [0133] 某股民上星期五买进某公司股票 1 000 股, 每股 57 元, 下表为本周内每日收盘该股票的涨跌情况(单位: 元):

星 期	一	二	三	四	五
每股涨跌	+4	+4.5	-1	2.5	-6

(1) 星期三收盘时, 每股是多少元?

(2) 本周内收盘价中每股最高价多少元? 最低价多少元?

考点 有理数的概念及基本运算/阅读分析

分析 从表中可以看出: “+”为涨, “-”为跌, 本周最高价为周二, 最低价为周五.

解答 (1) 到周三收盘时, 每股价为: $57 + 4 + 4.5 - 1 = 64.5$ 元.

(2) 收盘价中每股最高价为周二收盘时: $57 + 4 + 4.5 = 65.5$ 元;

每股最低价为周五收盘时: $57 + 1 + 4.5 - 1 - 2.5 - 6 = 56$ 元.

点评 股票的涨跌即为有理数的加减, 从表中还可以求出此股民本周的收益情况.

中 [0134] 甲对乙说: “有一个游戏规则是: 你先想好一个数, 把这个数乘以 2, 结果加上 8, 再除以 2, 最后减去你想的数, 此时, 我就知道最后的结果.” 请你解释甲为什么知道结果?

考点 有理数运算及分析能力/数学化归

分析 我们不妨取数 6, 根据规则, 计算过程为: $\frac{6 \times 2 + 8}{2} - 6 = 4$. 再取其他数, 计算结果也是 4, 这样我们就可从一般性情况着手去分析.

解答 在一般情况下, 任取数 x , 则由游戏规则, 计算过程为: $\frac{x \cdot 2 + 8}{2} - x = x + 4 - x = 4$. 这样, 不论取何数, 计算结果均为 4, 这就是秘密所在.

点评 此类题目往往蕴含规律, 找出其中的规律可遵循特殊到一般的方法进行.

中 [0135] 已知 a 是 $\sqrt{3}$ 的整数部分, b 是 $\sqrt{3}$ 的小数部分, c 是近似数 $1\ 802.5$ 精确到 1.80×10^3 的有效数字的个数, d 是 π 精确到百分位的近似值. 求 $\frac{\sqrt{c}}{2} - \frac{b}{a} + (d - 3.141\ 59)^0$ 的值.

考点 数的近似计算/操练演算

分析 要求一个数的小数部分, 往往先确定好它的整数部分, 然后原数减去整数部分即为它的小数部分.

解答 $\because \sqrt{3}$ 的整数部分 $a = 1$, $\therefore b = \sqrt{3} - 1$. 又 $\because 1.80 \times 10^3$ 的有效数字为 3 个, $\therefore c = 3$. 而 π 精确到百分位为 3.14,

$$\therefore \text{原式} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{1} + (3.14 - 3.141\ 59)^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + 1 + 1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

点评 求一个无理数的整数部分, 只需通过估计或借助于计算器亦可, 但求小数部分时, 不能近似.

中 [0136] 出租车司机小李某天下午营运全是在东西走向的人民大道进行. 如果规定向东为正, 向西为负, 他这天下午行车里程如下(单位: km):

$$+15, -3, +14, -11, +10, -12, +4, -15, +16, -18$$

(1) 将最后一名乘客送到目的地时, 小李距下午出发点的距离是多少千米?

(2) 若汽车耗油量为 0.06 L/km, 这天下午汽车共耗油多少升?

考点 有理数的实际应用/操练演算

分析 规定出发地为坐标轴原点, 向东为正, 向西为负, 则所有里程数之和的结果中可得出与出发点的距离. 若结果为正, 则在出发点东面; 反之, 在西面; 若为零, 则最后回到出发地.

解答 (1) 由于 $+15 + (-3) + 14 + \cdots + 16 + (-18) = 0$, $\therefore$ 小李将最后一名乘客送到目的地的同时, 也刚好回到出发地.

(2) 汽车行驶的里程总和为: $15 + 3 + 14 + \cdots + 18 = 118$ km.

共耗油 $118 \times 0.06 = 7.08$ L.

点评 应注意在计算第(1)题与第(2)题的区别, 在考虑方向时需带符号计算, 而求总里程数时不能带符号, 应计算实际行驶的距离.