概率论与数理统计

（浙大三版）

学习指导

6

NEUPRESS

东北大学出版社

概率论与数理统计学习指导

（浙大三版）

主　编　高　春　吴素文　张　萍

副主编　吴　剑　徐美进

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/高春,吴素文,张萍主编. —沈阳:东北大学出版社,2007.10
ISBN 978-7-81102-455-5

Ⅰ.概…　Ⅱ.①高…②吴…③张…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 140934 号

出 版 者:东北大学出版社
地址:沈阳市和平区文化路3号巷11号
邮编:110004
电话:024—83687331(市场部)　83680267(社务室)
传真:024—83680180(市场部)　83680265(社务室)
E-mail:neuph@neupress.com
http://www.neupress.com
印 刷 者:沈阳市市政二公司印刷厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
幅面尺寸:140mm × 203mm
字　　数:240 千字
印　　张:9.25
出版时间:2007 年 10 月第 1 版
印刷时间:2007 年 10 月第 1 次印刷
责任编辑:赵　娜　刘宗玉　　责任校对:佳宁
封面设计:唐敏智　　责任出版:杨华宁

ISBN 978-7-81102-455-5　　定　价:15.00 元

前　　言

由高等教育出版社出版、浙江大学盛骤等编写的《概率论与数理统计》一书，是目前国内公认最好的概率论与数理统计教材之一，广泛使用于各高等院校. 该书结构严谨、逻辑清晰，并因为在使用过程中的不断修订而日臻完善，其中的第三版，是国内用量最多的概率论与数理统计教材之一.

为了帮助广大学生学好浙大三版《概率论与数理统计》，我们编写出这本《概率论与数理统计学习指导》. 之所以编写浙大三版《概率论与数理统计》的"学习指导"，主要考虑的是该书作为国家级优秀教材的权威性以及该书习题编排合理、难易适中，能体现出学习概率论与数理统计应达到的水平.《概率论与数理统计学习指导》以浙大三版《概率论与数理统计》为蓝本，给出前 8 章所有习题的详细解答，适合于使用浙大三版《概率论与数理统计》的学生们. 对于刚刚跨进大学校门的大学生，面对概念抽象、运算繁杂的概率论与数理统计，往往感到力不从心，而编写本书的宗旨恰恰是帮助学生们熟悉教材、做好习题，在需要的时候助一臂之力，起到课下辅导的作用. 同时，在每章最后，还给出补充练习若干，十分有利于本章的全面复习. 在书的最后，给出期末测试题 10 套，意在通过演练找出差距、总结提高，达到提高考试成绩之目的.

本书有下述三方面的特点.

1. 全面. 教材中前 8 章所有的习题，包括所有带 * 的习题，均有

解答.这主要是考虑到地域、学校之间的差别和学生基础不尽相同,各种问题可能都会遇到,加之学生对做过的习题需全部核对,所以对所有习题均给出解答,以满足学生的不同需求.

2. 详尽.这里主要是指解题过程详尽,使学生对解题过程有一个全面、清晰的了解,以加强对概念的理解和方法的掌握;详尽的另一方面是对有些习题给出多种解法.

3. 指导性.解题过程中特别注意对解题方法的叙述,对一些难题还给出解题思路及提示,并举一反三,意在使学生能理解概念、熟悉路径、掌握方法.结合作者多年的教学经验,对一些典型题,指出易犯的错误,并剖析原因,避免以后再犯类似错误.还特别介绍了一些方便快捷的解题方法与技巧,并力争给出最简解题方法.

4. "实战演练"作用.章后的补充练习和书后的期末测试题是我们在总结多年概率论与数理统计教学基础上,针对考生普遍存在的问题精心编写出来的,力求通过演练发现不足并及时调整,最终提高考试成绩.

同时应该指出的是,虽然本书可以说是学习浙大三版《概率论与数理统计》的工具书,但要合理使用.我们不赞成学生自己不动脑筋,只依赖于本书的解答.我们的忠告是,所有习题,学生首先应靠自己的力量去做.习题能独立完成的,做题后再与解答对照,并检查解题步骤是否存在繁复、方法是否最简等问题;对于做不出来的习题,认真思考后再看解答则会有更大的收获.

参加本书编写的还有李明芮、王学理等同志.由于编者水平有限,可能存在疏漏与不足,还望同仁及读者不吝赐教.如果本书能在节省学生们的宝贵时间、提高学习效率等方面有一点作用的话,我们将深感欣慰.

编　者

2007 年 3 月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

习题一

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1)记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分)；

(2)生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数；

(3)对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上“正品”,不合格的记上“次品”,如连续查出 2 个次品就停止检查,或检查 4 个产品就停止检查,记录检查的结果；

(4)在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

[解]　(1) 设 n 为小班的人数,依题意可知,该班在一次数学考试中的总成绩可能为 $0,1,\cdots,100n$, 平均分可能是 $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{100n}{n}$,即样本空间为

$$S=\{\frac{i}{n}\mid i=0,1,\cdots,100n\}.$$

(2) 样本空间 $S=\{10,11,\cdots\}$,S 中含有可数无限多个样本点.

(3)1 表示查到正品,则检查的所有可能结果,即样本空间为

$$S=\{00,100,0100,0101,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111\}.$$

(4) 设任取一点的坐标为(x,y),则样本空间为

$$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

2. 设A,B,C为三事件,用A,B,C的运算关系表示下列各事件:

(1)A发生,B与C不发生;

(2)A与B都发生,而C不发生;

(3)A,B,C中至少有一个发生;

(4)A,B,C都发生;

(5)A,B,C都不发生;

(6)A,B,C不多于一个发生;

(7)A,B,C中不多于两个发生;

(8)A,B,C中至少有两个发生.

[解] (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2)$AB\overline{C}$.

(3)$A\cup B\cup C$.

(4)ABC.

(5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6)A,B,C中不多于一个发生,即A,B,C中只有一个发生或A,B,C全不发生,故所求事件为

$$\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}.$$

(7)A,B,C中不多于两个发生,即为A,B,C全发生的对立事件,故所求事件为

$$\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}.$$

(8)A,B,C中至少有两个发生,即A,B,C中有两个发生或A,B,C全发生,故所求事件为

$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC=AB\cup AC\cup BC.$$

3. 设A,B是两事件且$P(A)=0.6,P(B)=0.7$,问:(1)在什么条件下$P(AB)$取到最大值,最大值是多少?(2)在什么条件下$P(AB)$取到最小值,最小值是多少?

［解］ (1) 由于$P(A)<P(B)\leqslant P(A\cup B)$，则当$P(A\cup B)=P(B)$时，$P(AB)$有最大值为

$$P(AB)=P(A)=0.6.$$

(2) 由于$0<P(A\cup B)\leqslant 1$，则当$P(A\cup B)=1$时，$P(AB)$有最小值为

$$P(AB)=P(A)+P(B)-1=0.3$$

4. 设A,B,C是三事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，求$A,B,C$至少有一个发生的概率.

［解］ 利用概率加法公式可知

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)\\&\quad+P(ABC)\\&=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8},\end{aligned}$$

其中，由于$ABC\subset AB$，可知$P(ABC)=0$.

5. 在一标准英语字典中有55个由两个不相同的字母所组成的单词. 若从26个英文字母中任取2个字母予以排列，求能排成上述单词的概率.

［解］ 第一个字母有26种取法，第二个字母有25种取法，共有$n=26\times 25$种取法，能排成上述单词有$k=55$种取法，则

$$P(A)=\frac{55}{26\times 25}=\frac{11}{130}.$$

6. 在房间里有10个人，分别佩戴从1号到10号的纪念章，任选3人记录其纪念章的号码. 求：(1) 最小号码为5的概率；(2) 最大号码为5的概率.

［解］ 10人中任取3人的组合数为C_{10}^{3}，即样本空间为

$$S=\{C_{10}^{3}=120\text{ 个基本事件}\}.$$

(1) 令事件$A=\{$最小号码为5$\}$，则其余两个号码从6,7,8,9,

10 五个号码中取出，有 C_5^2 种取法，则

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{10!}{3!7!}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}.$$

（2）令事件 $B=\{$最大号码为5$\}$，则其余两个号码从1，2，3，4中取出，有 C_4^2 种取法，则

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{3!7!}}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}.$$

7. 某油漆公司发出17桶油漆，其中白漆10桶、黑漆4桶、红漆3桶. 在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为4桶白漆、3桶黑漆和2桶红漆的顾客，能按所定颜色如数得到订货的概率是多少？

［解］ 总的取法有 $n=C_{17}^9$ 种，白漆、黑漆和红漆的取法分别有 C_{10}^4, C_4^3 和 C_3^2 种，有利取法 $k=C_{10}^4C_4^3C_3^2$ 种，则

$$P(A)=\frac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2431}.$$

8. 在1500个产品中有400个次品、1100个正品. 任取200个. 求：

（1）恰有90个次品的概率；

（2）至少有2个次品的概率.

［解］ （1）设 A 为"恰有90个次品"，则 $P(A)=\frac{C_{400}^{90}C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}.$

（2）设 B 为"至少有2个次品"，B_i 为"恰有 i 个次品"（$i=0,1,\cdots,200$），因为

$$B_iB_j=\varnothing,(i\neq j;i,j=0,1,\cdots,200),$$

所以
$$P(B)=P(\bigcup_{i=2}^{200}B_i)=\sum_{i=2}^{200}P(B_i),$$

因为 $P(\overline{B})=P(B_0\cup B_1)=P(B_0)+P(B_1)=\dfrac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}+\dfrac{C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$,

所以 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}-\dfrac{C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$.

9. 从5双不同的鞋子中任取4只,问这4只鞋子中至少有2只鞋子配成1双的概率是多少?

[解] 令事件 $A=\{4$ 只鞋子中至少有2只鞋子配成1双$\}$. 用逆事件,总的取法有 C_{10}^4,第1只鞋是从10只中任取1只,并将与其配成1双的另1只除掉,第2只鞋是从余下的8只中任取1只,再除掉与其配成1双的另1只,…,有利取法 $k=10\times8\times6\times4$,则

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}.$$

10. 11张卡片上分别写probability这11个字母,从中任意连抽7张,求其排列结果为ability的概率.

[解] 设 A 为"排列结果为ability",共有 $n=A_{11}^7$ 种取法,排列结果为ability的取法,一个个字母共有 $k=1\times2\times2\times1\times1\times1\times1=4$ 种取法,则

$$P(A)=\frac{4}{A_{11}^7}=0.0000024.$$

11. 将3个球随机地放入4个杯子中去,求杯子中球的最大个数分别为1,2,3的概率.

[解] 球选择杯子,总的放法为 $n=4^3$,设 A_k 为"杯子中球的最大个数是 k"($k=1,2,3$),则

(1) $P(A_1)=\dfrac{A_4^3}{4^3}=\dfrac{6}{16}$.

(2) 将3个球中的某2个捆绑在一起,看作将2个球随机放入不同的杯子中去,则

$$P(A_2)=\frac{C_3^2A_4^2}{4^3}=\frac{9}{16}.$$

(3) $P(A_3) = \dfrac{C_3^3 A_4^1}{4^3} = \dfrac{1}{16}$.

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

[解]　分别考虑铆钉的取法和部件的取法，根据乘法原理，有利方式为 $C_{10}^1 C_3^3$，则

$$P(A) = \frac{C_{10}^1 C_3^3}{C_{50}^3} = \frac{1}{1960}.$$

13. 已知 $P(\bar{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\bar{B}) = 0.5$，求条件概率 $P(B \mid A \cup \bar{B})$.

[解]　$$P(B \mid A \cup \bar{B}) = \frac{P(B \cap (A \cup \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(BA \cup B\bar{B})}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(AB)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})}.$$

其中，$B\bar{B} = \varnothing$. 因为 $P(A\bar{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) = 0.7 - P(AB) = 0.5$，

所以　$P(AB) = 0.2, P(A \cup \bar{B}) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8$，

$$P(B \mid A \cup \bar{B}) = \frac{0.2}{0.8} = 0.25.$$

14. 已知 $P(A) = \dfrac{1}{4}, P(B \mid A) = \dfrac{1}{3}, P(A \mid B) = \dfrac{1}{2}$，求 $P(A \cup B)$.

[解]　利用概率加法公式可知

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

而由概率乘法公式可知

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12},$$

再由概率乘法公式知 $P(AB) = P(B)P(A \mid B)$，则有

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A \mid B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6},$$

则所求概率为

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

15. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为7，求其中有一颗为1点的概率(用两种方法).

[解]　令事件 $A = \{$两颗骰子点数之和为7$\}$，事件 $B = \{$其中有一颗为1点$\}$，则所求概率为 $P(B \mid A)$.

解法1　样本空间 S 中的基本事件总数 $n = 36$，而事件 A 出现的可能情况有6种，即

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}.$$

又因为事件 AB 表示"两颗骰子点数之和为7，且其中有一颗为1点"，则事件 AB 出现的可能情况有2种，即

$$AB = \{(1,6),(6,1)\}.$$

再由条件概率的定义可知

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}.$$

解法2　已知事件 A 发生后，将事件 A 作为样本空间，其中有两个结果(1,6)和(6,1)，只有一颗骰子出现1点，则在缩减样本空间中求事件 B 发生的条件概率为

$$P(B \mid A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

16. 据以往资料表明，某三口之家患某种传染病的概率有以下规律：$P\{$孩子得病$\}=0.6$，$P\{$母亲得病$\mid$孩子得病$\}=0.5$，$P\{$父亲得病$\mid$母亲及孩子得病$\}=0.4$. 求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

[解]　令事件 $A=\{$孩子得病$\}$，事件 $B=\{$母亲得病$\}$，事件 $C=\{$父亲得病$\}$. 即

$$P(A)=0.6, P(B \mid A)=0.5, P(C \mid AB)=0.4.$$

若令事件 $D=\{$母亲及孩子得病但父亲未得病$\}$，则有 $D=AB\overline{C}$，而由概率乘法公式可知

$$\begin{aligned}P(D)&=P(AB\overline{C})\\&=P(\overline{C} \mid AB)P(AB)\\&=P(\overline{C} \mid AB)P(B \mid A)P(A).\end{aligned}$$

又因为 $P(\overline{C} \mid AB)=1-P(C \mid AB)$，则所求事件的概率为

$$\begin{aligned}P(D)&=[1-P(C \mid AB)]P(B \mid A)P(A)\\&=(1-0.4)\times 0.5\times 0.6\\&=0.18.\end{aligned}$$

17. 已知在 10 只产品中有 2 只次品，在其中取两次，每次任取一只做不放回抽样. 求下列事件的概率：

(1) 两只都是正品；

(2) 两只都是次品；

(3) 一只是正品，一只是次品；

(4) 第二次取出的是次品.

[解]　令事件 $A_i=\{$第 i 次取出正品$\}$，则其对立事件 $\overline{A}_i=\{$第 i 次取出次品$\}$，$i=1,2$.

(1) A_1A_2 表示“两只都是正品”，则

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{45}.$$

(2)$\overline{A}_1\overline{A}_2$ 表示“两只都是次品”,则

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}.$$

(3)$A_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1A_2$ 表示“一只是正品,一只是次品”,且 $A_1\overline{A}_2 \cap \overline{A}_1A_2 = \varnothing$,则

$$\begin{aligned} P(A_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1A_2) &= P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) \\ &= P(A_1)P(\overline{A}_2 \mid A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1) \\ &= \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{45}. \end{aligned}$$

(4) 同理 $\overline{A}_2 = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2$,且 $A_1\overline{A}_2 \cap \overline{A}_1\overline{A}_2 = \varnothing$,则

$$\begin{aligned} P(\overline{A}_2) &= P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2) \\ &= P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2) \\ &= P(A_1)P(\overline{A}_2 \mid A_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) \\ &= \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字,因而他随意地拨号,求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率. 若已知最后一个数字是奇数,那么此概率是多少?

[解] 令事件 $A_i = \{$第 i 次拨通电话$\}$,则事件 $\overline{A}_i = \{$第 i 次未拨通电话$\}$,$i = 1,2,3$. 令事件 $B = \{$拨号不超过三次而接通所需电话$\}$,则 $B = A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,且 $A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 是互不相容的事件,则所求事件 B 的概率为

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3) \\ &= P(A_1) + P(\overline{A}_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) \end{aligned}$$

$$= P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 \mid \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2)P(A_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$= P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 \mid \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)P(A_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10}.$$

拨号是从0,1,2,…,9中任取一个,则有10种取法.若第一次就拨通,则其概率为$P(A_1) = \frac{1}{10}$;若第一次未拨通,则其概率为$P(\bar{A}_1) = \frac{9}{10}$.而第二次拨号是从剩余的9个号码中任取一个,且第二次就拨通的概率为$P(A_2 \mid \bar{A}_1) = \frac{1}{9}$;依此类推,$P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) = \frac{8}{9}$,$P(A_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2) = \frac{1}{8}$.

令事件C = {已知最后一个数字是奇数}.拨号不超过三次而接通所需电话,则拨号是从1,3,5,7,9中任取一个,共有5种取法.同上方法,第一次就拨通的概率为$\frac{1}{5}$;第二次拨通的概率为$\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$;第三次拨通的概率为$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$.则所求事件$C$的概率为

$$P(C) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5}.$$

19.(1)设甲袋中装有n只白球,m只红球;乙袋中装有N只白球,M只红球.今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中,再从乙袋中任意取一只球.问取到白球的概率是多少?

(2)第一只盒子装有5只红球,4只白球;第二只盒子装有4只红球,5只白球.先从第一盒子中任取2只球放入第二盒中去,然后从第二盒子中任取一只球.求取到白球的概率.

[解] (1)令事件A = {从甲袋中取到白球},则

$$P(A) = \frac{n}{n+m}, P(\bar{A}) = \frac{m}{n+m},$$