

21 世纪高等学校规划教材
Textbook Series of 21st Century

运筹学

雷 渝 杜金玲 李永福 主编



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>



21 世纪高等学校规划教材
Textbook Series of 21st

022/109

2007

运筹学

雷 渝 杜金玲 李永福 主编
任海英 主审



中国电力出版社
<http://jc.cepp.com.cn>

内 容 提 要

本书是21世纪高等学校规划教材。书中全面地介绍了运筹学的主要分支和基本方法,内容包括线性规划、运输问题、整数规划、动态规划、网络计划、预测方法、决策技术、对策分析、库存理论、设备更新、排队论等。本书深入浅出,重点突出,简明扼要,通俗易懂,避免抽象的数学符号和繁琐的数学推导,采用简洁通俗的语言,着重介绍了运筹学的基本内容和运作方法,并配有大量例题来说明计算过程和步骤,以便读者较快地理解和掌握。

本书可作为高等院校管理专业的教材,也可供各类管理人员、工程技术人员自学或参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/雷渝主编. —北京:中国电力出版社,2007

21世纪高等学校规划教材

ISBN 978-7-5083-5869-7

I. 运... II. 雷... III. 运筹学—高等学校—教材 IV. 022

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第094332号

中国电力出版社出版、发行
(北京三里河路6号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>)
北京市同江印刷厂印刷
各地新华书店经售

*

2007年8月第一版 2007年8月北京第一次印刷
787毫米×1092毫米 16开本 9.75印张 234千字
印数 0001—3000册 定价 16.00元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签,加热后中心图案消失
本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版 权 专 有 翻 印 必 究

前 言

运筹学是 20 世纪 40 年代初期产生的新兴学科,近几十年来得到了迅速发展。作为一种定量分析方法和优化技术,运筹学正在成为各类管理人员进行科学决策的有效工具,因而在经济管理、工程技术、科学研究以及国防事业等许多领域得到越来越广泛的重视和应用。

运筹学的研究建立在较深的数学理论基础之上,涉及到多方面的数学知识。但这并不意味着运筹学的基本知识和运作方法难以在管理工作的实践中普及推广,只要抓住重点,从应用的角度入手来学习,广大读者一定能够理解和掌握这门学科的知识。本书是为了满足从事不同专业的工程技术人员和高校师生,以及从事管理工作的各类人员学习和教学的需要,以推广应用运筹学知识为宗旨而编写的。为此,编者在编写过程中力求简明扼要,深入浅出,避免抽象的数学符号和繁琐的数学推导,尽量采用简洁通俗的语言,着重介绍运筹学的基本内容和运作方法,并配有大量例题来说明计算过程和步骤,以便读者较快地理解和掌握。

本书第一章到第六章由雷渝编写,第七章到第十章由李永福编写,第十一章到第十四章由杜金玲编写。全书由雷渝统一修改定稿。

由于编者水平有限,书中难免存在缺点和不足之处,敬请广大读者指正,编者将不胜感谢。

编者

2007 年 5 月



目 录

前言	
第一章 概论	1
习题一	5
第二章 线性规划问题及其数学模型	6
第一节 线性规划问题的举例	6
第二节 线性规划数学模型的一般形式	10
习题二	10
第三章 线性规划模型的图解法	13
第一节 图解法的基本步骤	13
第二节 无限多最优解与无确定最优解情况	14
第三节 优化后的分析(敏感性分析)	15
习题三	16
第四章 线性规划模型的单纯形解法	18
第一节 线性规划模型的标准型	18
第二节 单纯形法的求解步骤	19
第三节 标准型中不包含可行基模型的讨论	23
第四节 单纯形法求解中的特殊情况	26
习题四	33
第五章 运输问题的求解方法	34
第一节 运输问题数学模型的特点	34
第二节 运输问题的表上作业法	35
第三节 运输问题的特殊情况	40
习题五	43
第六章 整数规划	45
第一节 整数规划问题	45
第二节 分枝定界法	46
第三节 0—1型整数规划	48
第四节 分配问题	51
习题六	56
第七章 动态规划	58
第一节 多阶段决策问题和动态规划原理	58
第二节 动态规划的数学模型	60
第三节 动态规划的应用	62
习题七	68
第八章 网络计划	70
第一节 什么是网络计划	70

第二节	网络计划图	71
第三节	网络图的时间参数计算	76
第四节	网络图的调整与优化	82
习题八		88
第九章	预测方法	90
第一节	定性预测方法	90
第二节	指数平滑法	94
第三节	一元线性回归法	99
习题九		103
第十章	决策技术	104
第一节	决策问题的条件和分类	104
第二节	非确定性决策方法	105
第三节	风险性决策方法	108
第四节	边际损益分析方法	112
习题十		113
第十一章	对策分析	115
第一节	单纯策略的两人零和对策	115
第二节	混合策略的 2×2 阶两人零和对策	117
第三节	混合策略的 $m \times n$ 阶对策	119
习题十一		121
第十二章	库存理论	123
第一节	库存费用方程	123
第二节	经济订货批量的确定	124
第三节	货物均匀连续达到时的经济订货批量	125
第四节	有订货价格折扣时的库存问题	126
第五节	随机型存储问题	127
习题十二		129
第十三章	设备更新理论	130
第一节	设备的使用费用	130
第二节	设备最优更新期	131
第三节	更新设备的选择	133
第四节	设备的费用方程	136
习题十三		138
第十四章	排队论	139
第一节	排队系统的分类	139
第二节	普阿松分布的几种排队系统模型	140
第三节	排队系统的最优化	144
习题十四		147
参考文献		149

第一章 概 论

系统工程是当代正在迅速发展和逐步完善的一门组织和管理技术，它是以系统为研究对象，把要研究和管理的事物视作系统，进而采用系统工程的理论和方法，求得系统技术上先进，经济上合算，时间上最省，运行中可靠的最佳效果。

近 50 多年来，国外对系统工程的研究有了重大发展，形成了比较完善的理论体系。并且在国民经济和社会各个领域都有着广泛的应用，取得了显著的经济效益和社会效益。国内最近几年对系统工程的兴趣越来越浓，在工程、工业、交通、能源、经济以及社会等领域，人们对它寄予越来越大的希望，希望通过应用系统工程的理论和实际应用，对于组织管理水平的现代化，国民经济的科学规划，企业经营管理水平的提高与进步，以及科研、教育、军事和社会等的研究发展，都有着十分重要的意义，系统工程正在逐步成为我国社会主义现代化建设的有力工具。

运筹学是系统工程重要的基础理论之一，是系统工程用于实践活动的重要方法和手段。

一、系统工程概述

21 世纪，现代科学技术活动的规模有了很大扩展，现代经济建设的规模更加庞大复杂，现代社会的发展出现很多问题。人民从效果出发，迫切需要以最短的时间，最少的人力、物力和资金，最有效地利用最新科学技术成就来完成生产、科研、工程等各项任务。要完成这样规模巨大的任务，只依靠某些特点的技术和某个学科的知识，以及人们现有的组织管理的技能和经验是不能很好地解决的。要用各个学科的最新成就，综合地、科学地、定量地处理问题，才能适应时代的发展。

当今人类社会活动的一个重要特点是各个领域、各个学科之间存在着相互影响，相互渗透，相互依存的关系。无论是工程技术问题还是社会问题都必须综合解决，正如有的科学家所说：“现在已经进入了如不考虑和制定相互关系的计划，所有的问题都不能解决的时代。”系统工程就是在这种客观形式下产生和发展起来的一个大门类的组织管理技术。

系统工程的一般理论基础包括：运筹学、控制论、信息论和大系统理论。

运筹学是研究系统在给定条件下，统筹规划，合理安排，以求得最优效果的数学方法。

控制论是研究控制系统的状态、功能、行为方式及其变动趋势，使系统按预定的目标去行动的技术科学。

信息论是运用信息的观点，把系统看作是借助于信息的获取、传送、加工、处理而实现其有目的性行动的研究方法。

大系统论是系统工程中解决大系统整体与部分、整体与外界环境之间的相互关系，以达到最佳控制的研究方法。

系统工程在 20 世纪产生于美国，20 世纪 70 年代基本形成体系。系统工程的发展大体经过了三个阶段。

1. 萌芽阶段

这一阶段的特点是：个别研究和简单应用。例如，在 1940 年，美国贝尔电话公司在实践中总结出“系统接近法”，按时间顺序把工作分为五个阶段，即规划、研究、发展、工程

应用研究、通用工程，对技术和运用网络进行了综合考虑。后来该公司研究所成立了系统工程研究部。

在1940~1945年期间，美国制造了原子弹的“曼哈顿”计划就采用了系统工程，即实行规划、计划、多方案选优，确定“五个方案”同时上马，用系统工程方法进行论证协调，最后取得了成功。

2. 发展阶段

这一阶段的特点是：自觉地运用，在理论和方法上得到发展。

例如，1957年，美国密西根大学的歌德和麦克霍尔著《系统工程》一书，对系统工程在理论上进行了初步阐述。

1958年，美国海军研制北极星导弹，产生了计划评审技术（PERT），结果提前两年完成研制。

1962年，美国国防部采用PPBS系统（即规划、计划预算系统）对三军联合起来统一预算，运用系统工程技术，共节约百亿美元。

3. 基本成熟并继续发展阶段

例如，1965年，美国出版了《系统工程手册》。手册中阐述了系统工程理论、系统技术、系统数学、系统环境、系统元件等，基本上概括了系统工程各方面的内容。这是系统工程理论基本成熟的一个重要标志。

1972年“阿波罗”登月计划成功。这项计划历时11年，全国有42万人、120所大学和研究所、2万多家企业参加，投资300亿美元，被他们称为“系统工程的辉煌顶点”。

系统工程基本研究方法具体说就是以系统为对象，把要组织和管理的对象，用概率、统计、运筹、模拟等方法，求得系统最佳效果。简言之，就是用搞工程的方法搞组织管理。

系统工程的过程和步骤可用三维结构来表示，如图1-1所示。

逻辑维（思维过程）：①摆明问题；②目标选择；③系统综合；④系统分析；⑤最优化；⑥决策；⑦实施计划。

时间维（工作阶段）：①规划阶段；②拟定方案；③分析阶段；④运筹阶段；⑤系统实施；⑥运行阶段；⑦更新阶段。

知识维（专业知识）：①计算机；②数学；③医学；④法律；⑤工程技术；⑥社会科学。

钱学森同志将系统工程的专业学科基础划分为14项，如表1-1所示。

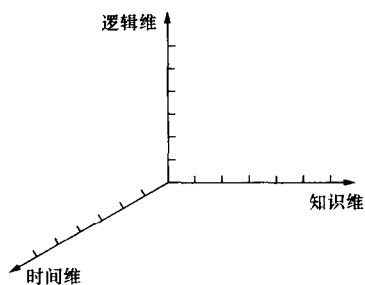


图1-1 系统工程的过程与步骤

表1-1 系统工程的专业学科基础

系统工程专业	专业的特有学科基础
工程系统工程	工程设计
科研系统工程	科学学
企业系统工程	生产力经济学
信息系统工程	信息学、情报学
军事系统工程	军事科学
经济系统工程	政治经济学
环境系统工程	环境科学
教育系统工程	教育学
社会系统工程	社会学、未来学
计量系统工程	计量学
标准化系统工程	标准学
农业系统工程	农事学
行政系统工程	行政学
法治系统工程	法学

系统工程涉及的理论基础包括：运筹学、图论、概率论、统计学、模糊数学、计算机科学、系统论（包括控制论、信息论）、仿真技术、经济学、哲学、心理学等。

二、运筹学的产生和发展

运筹学（Operations Research, OR）产生于第二次世界大战期间。当时德国凭借空中优势向英国发动进攻，为了对付德军的空袭，英国发明了雷达。但后来发现虽然用雷达可以及时有效地使用空军，但不能及时部署高炮和飞机来对付敌机。为了更有效地使用空军、防空部队和雷达这一系统，英国国防部在 1940 年 8 月成立了一个跨学科的 11 人小组，称为 OR 小组，由物理学家布赖克特领导。这个小组卓有成效，使其成为战争中不可缺少的组织。

英国 OR 小组的工作成就与经验使得美国感到有必要成立类似的机构。1942 年美国海军反潜部队成立了以物理学家摩尔斯为首的 17 人小组，主要成员是数学家和物理学家。

二次大战时，德军用潜艇封锁英国，当时英国用护卫舰护送商船。面临的问题是组成大规模商船队，才能使商船损失率为最小。应用对策论研究结果是：采用大型商船队运输，使得英国商船的损失率从 60% 下降到 20% 以下。

在反潜战中，为了制定指标量度一架载雷达飞机的搜索效果，数学家库普曼提出“扫率”，目的是要确定如何部署机截雷达搜索的范围、架次，使得搜索到敌潜艇的效率为最大。这一研究后来发展成为搜索论。

二次大战期间，美国为了研究军需品的运输问题，由库普曼（T. C. Koopmans）和康托洛维奇（Л. В. Канстoич）一起建立线性规划。后来由丹捷格（G. Dantzig）发明了线性规划的单纯形法。

在大战期间，运筹学成功地解决了许多重要作战问题，显示了科学的巨大物质威力，为以后运筹学发展铺平道路。20 世纪 50 年代以后，运筹学开始在和平领域发展，其各个分支逐渐形成一套理论，它包括规划理论、决策论、排队论、存储论、图与网络、博弈论、模拟等分支。

20 世纪 50 年代以来，生产规模空前扩大，科学技术迅猛发展，社会的需求日益多样化，生产与服务的专业分工愈来愈细，出现了许多亟待解决的问题，如交通拥挤、能源和物资短缺、环境污染等。这一切表明，人们必须寻求新的科学的方法来运行社会的各个系统，这个方法就是运筹学。

20 世纪 50 年代纽约桥梁和隧道的车流交通拥挤现象严重，埃迪应用电话排队的理论，研究发现收款亭放在车道左侧时的拥堵情况比放在右侧的情况好，以后采用了左侧亭收费的方法，基本消除了纽约港桥梁与隧道的车辆排队现象。

美国堪萨斯城环境管理部门规定所有工厂减少其污染一半，这样才能将污染控制在允许标准之下，此计划需要花费 2600 万美元。希奇领导的 OR 小组研究了这个问题，提出只要将钢铁、铸造工业的污染减少 98%，化学工业减少 38%，则可达到标准要求，只需花费 700 万美元，使原计划得到改进。

20 世纪 50 年代出现了管理科学（Management Science），实际上它是运筹学渗透到管理工程领域的结果。二者有时很难区分，人们有时用 OR/MS 表示这是一回事。

当前，运筹学已发展为指导和管理工作、农业、商业、政府和国防方面有关人员、设备、物资以及资金的大系统中所发生的各种问题，提供和改进管理决策基础的一种科学的、

系统的、定量的方法、运筹学正在日益广泛、深入地发挥作用。

三、运筹学的研究对象和主要内容

运筹学作为一门新兴学科，目前还没有一个统一的定义。比较普遍的说法是：运筹学是应用系统的、科学的、数学分析的方法，通过建立和求解数学模型，在有限资源的条件下，计算和比较各个方案可能获得的经济效益，以协助工商企业、事业和机关管理人员作出最优的决策选择。简单地说，运筹学是一门研究如何以有限的资源，完成最大的任务，取得最优的经济效果的科学。

运筹学研究和解决问题时，立足于总体的概念，要求从整体的各部分联系中寻找最优方案，而不是孤立地考虑某个问题的局部最优。运筹学注重从定性到定量的分析，它不仅能提供方向性的决策意见，而且能够提供定量研究的分析方法和手段。

运筹学研究和解决问题的一般过程为：明确问题及其条件、要求和相互关系，确定决策目标和方案选择标准，建立数学模型，选择合适的求解方法，求出模型的最优解，制定问题的决策方案。

运筹学包含许多分支，其中较系统的理论有以下几个方面。

(1) 规划理论（又称数学规划）。它是运筹学中发展比较成熟、应用也最广泛的一个重要分支，它主要研究如何有效利用有限资源，合理分配生产任务，选择最佳生产布置以及合理安排物资调运方案，以求得最好的经济效益等问题。数学规划包括：线性规划、非线性规划和动态规划等。

(2) 网络分析理论。它是通过把研究的问题构成网络模型，然后再加以数学或数量的分析，以获得最优的决策效果。这个理论已经成功地解决了工程项目的计划安排问题。

(3) 库存理论。它是应用数学方法，研究在一定的采购、运输条件下，使材料、物资保持合适的库存水平，在保证生产或经销活动能连续进行的前提下，使材料、物资的库存总费用达到最小。

(4) 更新理论。更新理论就是应用数学方法研究设备的合理（最优的）更新期限，以使设备的总费用达到最小。

(5) 排队理论。排队理论是用数学方法研究如何确定最适当的服务人员和服务设施数目，达到服务质量最好，服务费用最低的目的。

(6) 质量控制理论。它是应用数理统计的原理和方法，研究在一定的质量要求条件下，如何控制产品的质量，以及选用什么样的产品抽样检验方法，才能使总的检验时间或费用最小。

(7) 决策理论。它主要是通过对各种客观条件可能出现的概率进行调查分析和对各种方案的经济效益进行计算，研究方案的合理选择问题，使企业能因此获得最优的经济效益。

(8) 对策理论。从企业管理角度来说，运筹学就是研究处于竞争状态下，企业双方（或多方）可能采取的策略行动，每一策略行动给对方可能带来的经济效益等问题，并通过数学分析，确定应取哪一对策，才能使企业活动最大（或损失最小）。对策理论也称为博弈理论。

(9) 预测理论。预测理论就是研究怎样应用市场调查和数理统计的方法，根据历史的和当前的数据资料，对未来的发展趋势和情况作出尽可能可靠的当量估计。

(10) 模拟技术。它是利用一种依预先统计分析得到的概率分布而产生的随机数，来模拟企业管理中实际可能出现的工作情况，观察其在各种决策、各种客观条件变化情况下的各

种可能结果，经过许多次的模拟，从中选择一个结果最为满意的决策方案。

总之，近几十年来，运筹学以及现代管理科学发展十分迅速，内容也十分丰富。它们以科学管理理论为基础，吸收了自然科学和社会科学的许多学科的研究成果而发展、成熟起来，并还将继续得到发展和完善。尤其是随着计算机技术的发展和普及，运筹学和管理科学的理论和方法在经济管理中获得广泛的实际应用，成为解决经济管理问题的有效工具。它们必将在我国的经济建设中发挥应有的作用。

习 题 一

1. 简述系统工程的主要发展历程。
2. 简述运筹学的主要分支。

第二章 线性规划问题及其数学模型

线性规划问题是运筹学中应用较为广泛的一个主要分支。它所研究的问题主要有两类：一是一项任务确定后，如何统筹安排才能使得完成任务所消耗的人力、物力、财力资源最少；二是已有一定数量的人力、物力、财力资源，怎样合理地使用它们才能使完成的任务量最多。其实这两类问题可归结为一个问题，就是如何消耗最少量的资源，完成尽可能多的任务，获得最好的经济效益。

在经济领域里，这种问题很多，下面通过一些例子来介绍线性规划问题的数学模型。

第一节 线性规划问题的举例

下面通过一些具体例子所给定的条件和问题，建立它们的线性规划问题的数学模型。

一、物资调运问题

【例 2.1】 某物资要从 A_1 、 A_2 、 A_3 这 3 个地区调往 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 这 4 个地区，调运平衡表和运价表如表 2-1 所示。问如何调运才能使总运费最少？

解：这是个物资的合理调运问题。平衡表中 x_{ij} 表示从发地 A_i 运往收地 B_j 的物资数量。例如 x_{11} 表示从发地 A_1 运往收地 B_1 的物资数量， x_{23} 表示从发地 A_2 运往收地 B_3 的物资数量……

根据问题所给条件和要求，可以列出其线性规划数学模型。

应满足的约束条件为：

(1) 各发地的可发量与运出量应达到平衡，故应满足下列方程：

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 7(\text{对 } A_1) \quad (2-1)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 4(\text{对 } A_2) \quad (2-2)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 9(\text{对 } A_3) \quad (2-3)$$

表 2-1

调运平衡表(吨)

运价表(元/吨)

收地 发地	B_1	B_2	B_3	B_4	可发量	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	7	3	11	3	12
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	4	1	9	2	8
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	9	7	4	10	9
需要量	3	6	5	6	20				

(2) 各收地需要量与供应量应达到平衡，故应满足下列方程：

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3(\text{对 } B_1) \quad (2-4)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6(\text{对 } B_2) \quad (2-5)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5(\text{对 } B_3) \quad (2-6)$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 6(\text{对 } B_4) \quad (2-7)$$

(3) 物资调运量应大于或等于零, 即

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4) \quad (2-8)$$

(4) 问题的目标是使运输的总费用最小, 即

$$\begin{aligned} \min Z = & 3x_{11} + 11x_{12} + 3x_{13} + 12x_{14} + x_{21} + 9x_{22} \\ & + 2x_{23} + 8x_{24} + 7x_{31} + 4x_{32} + 10x_{33} + 9x_{34} \end{aligned} \quad (2-9)$$

这就是此问题的数学模型, 其中 x_{ij} 是需要确定的各发地运到各收地的运量, 称为决策变量; 式 (2-1) ~ 式 (2-8) 是对各发地的可发量和各收地的需要量的限制或要求, 称为约束条件; 式 (2-9) 是此运输问题的目标要求, 称为目标函数。

在上述数学模型中, 决策变量 x_{ij} 在约束条件和目标函数中都以一次幂的形式出现, 即约束条件和目标函数都是决策变量的一次 (线性) 函数; 同时这类问题都带有事先计划和安排的意义, 因此这类问题的数学模型称为线性规划数学模型。

二、生产的组织与计划问题

【例 2.2】 某工厂在计划期内要安排生产 I、II 两种产品, 这些产品分别需要在 A、B、C、D 共 4 种不同设备上加工。按工艺规定, 产品 I 和 II 在各设备上所需要的加工台时数见表 2-2。已知各设备在计划期内有效台时数分别是 12、8、16、12, 每生产一件产品 I 可得利润 2 万元, 生产一件产品 II 可得利润 3 万元。如何安排生产计划才能得到最大利润?

表 2-2

产品 \ 设备	A	B	C	D	利润/ (万元/件)
I	2	1	4	0	2
II	2	2	0	4	3
台时	12	8	16	12	

解: 试列出此问题的数学模型。

现设 x_1 、 x_2 分别为计划期内产品 I 和 II 的产量。可根据问题所给条件和要求, 列出下列约束条件。

设备 A 的有效台时数为 12, 限制了产品 I 和 II 在 A 设备上的总加工台时数不能超过 12, 即有下列约束不等式:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12$$

类似地, 对设备 B、C 和 D 有下列约束不等式:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$$4x_2 \leq 12$$

由于产品产量不可能为负数, 还必须要有非负条件, 即

$$x_1, x_2 \geq 0$$

该厂目标是利润最大, 利润 Z 可由下式表示:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \text{ (最大化)}$$

综上所述, 此问题的线性规划模型可整理为

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

三、合理下料问题

【例 2.3】 某工序需用 2.9m 长的坯料 100 根, 2.1m 长的 100 根, 1.5m 长的 200 根。现库房里有 7.4m 的长料, 问需要多少根长料才能满足生产需要, 同时使截下的料头最少? 试列出数学模型。

解: 先找出各种可能截取方法, 列在表 2-3 中, 共有 6 种截法。

表中第一行表示用截法 I 截长料, 可截得 2.9m 的坯料一根, 1.5m 的坯料 3 根。坯料总长为 7.4m, 料头为 0。其他各行同理。

设 x_i 为第 i 种截法所用长料的根数, 则各种坯料根数应满足下列约束条件:

$$x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 100(\text{根}) \quad (\text{对 } 2.9\text{m 的坯料})$$

$$2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 100(\text{根}) \quad (\text{对 } 2.1\text{m 的坯料})$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_6 = 200(\text{根}) \quad (\text{对 } 1.5\text{m 的坯料})$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

各种截法所余料头总长度为

$$Z = 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5 + 0.9x_6, \text{ 要求 } Z \text{ 取最小值。}$$

表 2-3

截法	坯料尺寸/m			总长/m	料头/m
	2.9	2.1	1.5		
I	1	0	3	7.4	0
II	2	0	1	7.3	0.1
III	0	2	2	7.2	0.2
IV	1	2	0	7.1	0.3
V	0	1	3	6.6	0.8
VI	1	1	1	6.5	0.9

四、配料问题

【例 2.4】 某养鸡场配制混合饲料, 要求每百公斤饲料含钙量 0.8~1.2kg, 蛋白质大于 22kg, 纤维质小于 5kg, 现有 3 种饲料石灰、玉米、豆饼, 每千克其营养物含量及每千克售价见表 2-4。试求配料费用最低的配比。

表 2-4

配料	钙/kg	蛋白质/kg	纤维质/kg	售价/(角/kg)
石灰	0.380	0.00	0.00	6
玉米	0.001	0.09	0.02	18
豆饼	0.002	0.50	0.08	36

解：设每配制 100kg 混合饲料加石灰 x_1 kg，玉米 x_2 kg， x_3 kg，则对问题中各种条件和要求有如下约束条件。

$$\text{对含钙量: } 0.380x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \leq 1.2$$

$$0.380x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \geq 0.8$$

$$\text{对含蛋白质量: } 0.009x_2 + 0.50x_3 \leq 22$$

$$\text{对含纤维质量: } 0.2x_2 + 0.08x_3 \leq 5$$

$$\text{对混合饲料总量: } x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$\text{营养物含量为非负: } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

每百千克混合饲料的总费用为

$$Z = 6x_1 + 18x_2 + 36x_3, \text{要求 } Z \text{ 值达到最小。}$$

五、布局问题

【例 2.5】 某乡有平原、丘陵、洼地 3 种土地，数量分别为 800 亩、1200 亩、650 亩，各种土质不同粮食作物有不同亩产量，据统计得各种土地不同作物的亩产量如表 2-5 所示。

本年度计划要求种高粱 900 亩，谷子 400 亩，玉米 1350 亩，如何根据不同土质确定种植计划，使粮食总产量达到最大？试列出此问题的数学模型。

解：设 x_{ij} 表示 i 种土地种第 j 种作物的亩数。 i 和 j 分别表示表 2-5 中行和列的序号，例如 $i=1, j=2, x_{12}$ 表示平原（第 1 行）种谷子（第 2 列）的亩数。根据题目要求可得到下列约束条件。

土地约束条件如下。

$$\text{平原: } x_{11} + x_{12} + x_{13} = 800$$

$$\text{丘陵: } x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1200$$

$$\text{洼地: } x_{31} + x_{32} + x_{33} = 650$$

计划种植面积约束条件如下。

$$\text{高粱: } x_{11} + x_{21} + x_{31} = 900$$

$$\text{谷子: } x_{12} + x_{22} + x_{32} = 400$$

$$\text{玉米: } x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1350$$

表 2-5

土地	作物	高粱	谷子	玉米	土地数/亩
	亩产量/kg				
平原		400	260	550	800
丘陵		300	210	400	1200
洼地		250	150	350	650
计划/亩		900	400	1350	2650

此问题要求使粮食总产量最大, 即

$$\begin{aligned} \max Z = & 400x_{11} + 260x_{12} + 550x_{13} + 300x_{21} + 210x_{22} \\ & + 400x_{23} + 250x_{31} + 150x_{32} + 350x_{33} \end{aligned}$$

第二节 线性规划数学模型的一般形式

上节的几个例子虽然描述了不同的线性规划问题, 但是它们的数学模型却有着共同的特征, 由此可以归纳出线性规划数学模型的一般形式: \max (或 \min) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 满足于

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

式中: x_i 为决策变量; c_j 、 a_{ij} 、 b_i ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$) 是由具体问题提供的常数, 称为模型参数, 它们在实际问题中常表现为已知数, 即可以通过调查研究或统计资料获得。

线性规划模型具有下列一些数学特征。

1. 比例性

由于决策变量 x_i 在目标函数或约束条件表达式中都是以一次幂的形式出现, 所以在模型的目标函数或约束条件中, 每个变量的收益或消耗的数量都应与变量 x_i 值成线性比例。例如生产一个产品可获得利润 10 元, 那么生产两个产品就可获得 $10 \times 2 = 20$ 元利润。

2. 确定性

在线性规划数学模型中, 所有参数 (a_{ij} , b_i , c_j) 都是已知的常数, 在实际问题中, 这些参数都可以通过调查研究或从统计资料中获得, 因而一般情况下, 问题及其解答都是确定的。

习 题 二

1. 写出线性规划数学模型的一般形式。
2. 试建立下述问题的线性规划数学模型。

(1) 某厂生产 A、B 两种产品, 都需要经过 I、II 两道工序, 每件产品在每道工序加工的机时, 每道工序可供使用的机时及每件产品可获得的利润如表 2-6 所示。问应该如何安排生产计划, 才能获得总利润最大?

表 2-6

机时 工序	产品 消耗	A	B	可供使用机时
		I	7	
II		4	2	32
		55	20	

(2) 某建筑工地有一批长为 10m 的钢筋 (型号相同), 要截成长度为 3m 的钢筋 9 根, 长度为 4m 的钢筋 6 根。问应该如何下料, 才使所用的原料最节省?

(3) 若有耕地 900 亩, 这些土地根据不同条件可分为 3 类, 现在要在这 3 类土地上种植 3 种作物; 各类土地数, 计划播种面积以及不同作物在各类土地上能得到的单位产量如表 2-7 所示。问应该如何安排种植, 才能使作物总产量最高?

(4) 某工厂要用 3 种原料 1、2、3 混合调配出两种不同规格的产品甲、乙, 产品的规格要求、产品的单价、每天能供应的原材料单价如表 2-8 和表 2-9 所示。问应该如何安排生产, 才能使利润最大?

表 2-7

土地 作物	A	B	C	播种面积/亩
	I	700	500	
II	850	700	600	400
III	400	300	500	400
土地数/亩	300	200	400	

表 2-8

产品名称	规格要求	单价/(元/kg)
甲	原材料 1 不少于 50% 原材料 2 不少于 25%	50
乙	原材料 1 不少于 25% 原材料 2 不少于 50%	35

表 2-9

原材料名称	每天最多供应量/kg	单价/(元/kg)
1	100	65
2	100	25
3	60	35

(5) 某公司从两个产地 A、B 将物品运往 3 个销地 I、II、III, 各产地的产量、各销地的销量和各产地运往各销地的每件物品的运费如表 2-10 所示。应如何调运, 才能使总运费最小?