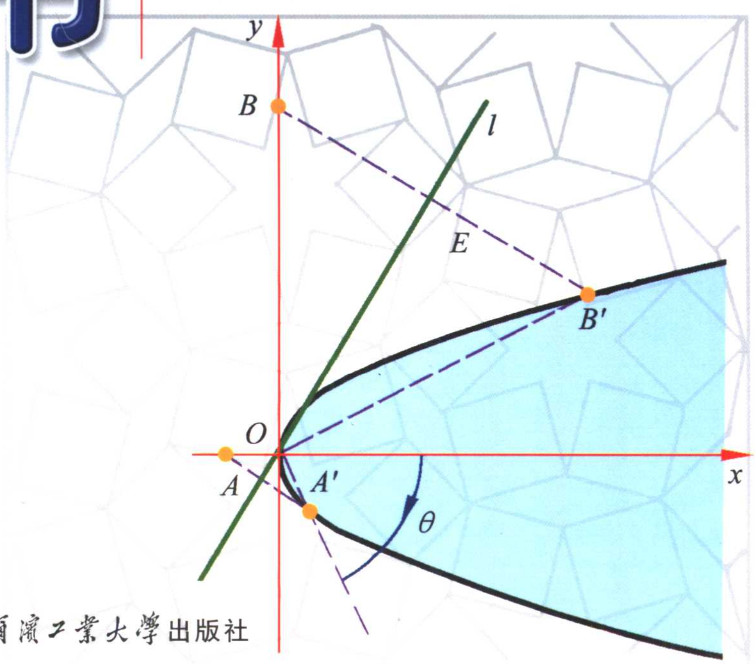
新编中学数学解题方法全书

高中版 下卷（二）

刘培杰 主编

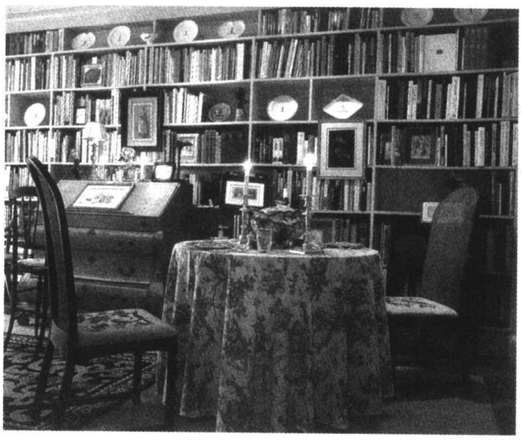


哈爾濱工業大學出版社

高中版 下卷(二)

新编中学数学解题方法全书

刘培杰　主编



一切西学皆从算学出，西人十岁外无不习算。今欲采西学，自不可不学算。或师西人，或师内地人之知算者俱可。由是而历算之术，而格致之理，而制器尚象之法，兼综条贯，轮船火器之外，正非一端。

——《采西学议》

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

本书共包括两部分:第八编解题通法,第九编选择题解法。本书以专题的形式对中学数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合高中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书:高中版.下卷.2/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.5

ISBN 978-7-5603-2493-7

Ⅰ.新…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学课-高中-解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 037533 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　李广鑫　唐　蕾
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 28.25　字数 632 千字
版　　次　2007 年 5 月第 1 版　2007 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2493-7
印　　数　1~6 000 册
定　　价　38.00 元

《新编中学数学解题方法全书》编委会

由于本书编辑出版时间较长,有个别作者工作单位发生改变,请见书后与刘培杰数学工作室联系。

联系电话:0451-86281378　13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号

哈尔滨工业大学出版社第四编辑室

下　卷　（二）

第八编　解题通法

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

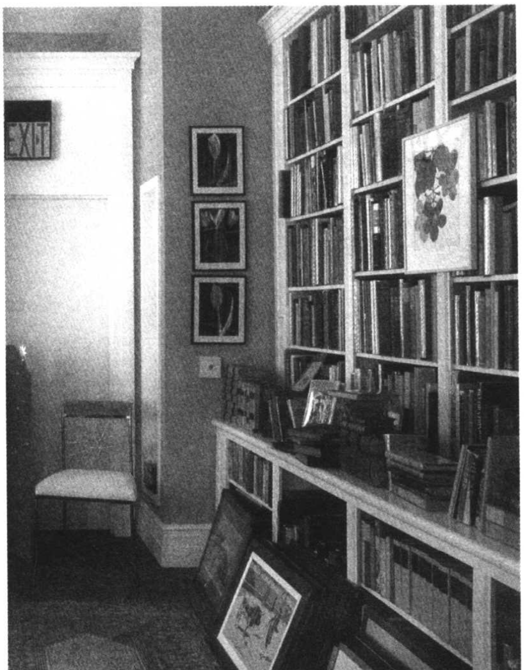
第九编　选择题解法

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

第八编

解题通法



今泰西之代数学，即所谓借根方法也。阿喇伯语谓之阿尔热巴喇。盖其学亦阅千百年。愈研愈精，始臻此诣，非一时一人之智力所能为也。

——薛福成《出使英法义比四国日记》

怎样审题

一、要善于变换

一般的题目,都明确给出已知条件和求解的问题,但我们并不能直接由已知推出未知,这时,在审题中就要对已知条件进行变换.

例1 已知数列的前 n 项和为 S_n,且 $a_n=\frac{1}{2}(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(n\geqslant 2)$,$S_4=4$,求通项 a_n.

解析 要求 a_n,必须先求出 S_n,但直接求解无法实现,由 $a_n=\frac{1}{2}(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})$ 变形,得

$$a_n=\frac{S_n-S_{n-1}}{2(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})}=\frac{a_n}{2(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})}$$

因为 $a_n\neq 0$,所以 $\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=\frac{1}{2}$.

令 $b_n=\sqrt{S_n}$,则有 $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}$ 以及 $b_4=\sqrt{S_4}=2$.

可求得 $b_n=b_1+(n-1)d=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$.

从而易求得 $S_n=\frac{n^2}{4}$.

所以 $a_n=\frac{1}{4}(2n-1)\quad(n\in\mathbf{N}^+)$.

例2 求函数 $y=\frac{\sin^2 x-6\sin x+10}{3-\sin x}$ 的值域.

解析 如果把已知条件转化为关于 $\sin x$ 的一元二次方程 $\sin^2 x+(y-6)\cdot\sin x+10-3y=0$,利用方程 $t^2+(y-6)t+10-3y=0$ 在 $[-1,1]$ 内有解,较为繁琐.将函数化为

$$y=\frac{(3-\sin x)^2+1}{3-\sin x}=3-\sin x+\frac{1}{3-\sin x},2\leqslant 3-\sin x\leqslant 4$$

则可令 $t=3-\sin x$,通过 $y=t+\frac{1}{t}$ 在 $[2,4]$ 上递增,轻松得到 $\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant\frac{17}{4}$.

二、要善于联想

联想是接通思路的桥梁.如果我们在审题中无法套用现成的解题模式,就必须进行广泛的联想,以寻得解题思路.

例3 设 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$,求和式 $f(\frac{1}{1\,999})+f(\frac{2}{1\,999})+\cdots+f(\frac{1\,998}{1\,999})$ 的值.

解析 直接求解,无从下手.由结论的数量特征

$$\frac{1}{1\,999}+\frac{1\,998}{1\,999}=1,\frac{2}{1\,999}+\frac{1\,997}{1\,999}=1,\cdots$$

启发我们联想,探究函数 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$ 的结构特点.

因为

$$f(\alpha)+f(1-\alpha)=\frac{4^{\alpha}}{4^{\alpha}+2}+\frac{4^{1-\alpha}}{4^{1-\alpha}+2}=\frac{4^{\alpha}}{4^{\alpha}+2}+\frac{4}{4+2\cdot 4^{\alpha}}=$$
$$\frac{4^{\alpha}}{4^{\alpha}+2}+\frac{2}{4^{\alpha}+2}=1$$

所以
$$原式=[f(\frac{1}{1\ 999})+f(\frac{1\ 998}{1\ 999})]+[f(\frac{2}{1\ 999})+f(\frac{1\ 997}{1\ 999})]+\cdots+$$
$$[f(\frac{999}{1\ 999})+f(\frac{1\ 000}{1\ 999})]=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{999个}=999$$

例4 已知 $x^2+y^2=6x+8y$,求 $d=\sqrt{12x+8y+9}+\sqrt{8y+9}$ 的最小值.

解析 观察已知条件,容易联想到已知方程表示圆,这就把解决问题的思绪引入解析几何的途径.由 d 的式子的结构特征,联想到两点间的距离公式,但被平方式的形状却与距离公式大相径庭.由已知 x^2+y^2 与 $6x+8y$ 可以互相转化,故

$$d=\sqrt{12x+8y+9}+\sqrt{8y+9}=$$
$$\sqrt{6x+(x^2+y^2)+9}+$$
$$\sqrt{x^2+y^2-6x+9}=$$
$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

从而问题转化为圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$(图1)上的点到 $A(-3,0)$,$B(3,0)$ 两点距离之和的最小值,易求得 $d_{\min}=|AB|=6$(当 $x=0,y=0$ 时取得).

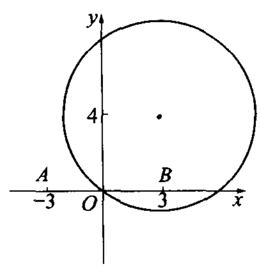


图1

三、要善于挖掘隐含条件

很多题目的已知条件与结论之间的关系不明显,较难直接实现条件与结论的沟通.因此,要善于发掘题目中的隐含条件,揭示解题思路.

例5 如果方程 $(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})x^2+(\frac{1}{a}-\frac{1}{c})x+(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})=0$ 有两个相等的实数根,则 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差数列.

解析 本题的自然思路似乎是根据一元二次方程有两个相等实数的根的条件,用判别式来解,但会导致繁难的运算.注意到各项系数是轮换对称的特点,易判明 $x=1$ 为方程的一个根.这一隐含信息的发现,使问题的解决变得易如反掌.

因方程有等根,故另一根也为1,由韦达定理,得

$$1\times 1=(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})\div(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})$$

即
$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$$

所以 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差数列.

例6 求 $y=\arcsin x+\arctan x$ 的值域.

审题与思考 本题隐含了两个条件:一是 $\arcsin x$ 及 $\arctan x$ 在其定义域内均为增函数,二是此函数的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.发掘了这两个隐含信息,便可由函数在 $[-1,1]$ 内单调递增知其值域为 $[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$.

四、要善于启动逆向与创新思维

当求解一个数学题思维受阻时,改变思维角度,适时启动逆向与创新思维,往往能跳出常规思维的框框,突破思维障碍,开辟解题途径.

心得 体会 拓广 疑问

例7 两个不同的点 P,Q 在曲线 $y=x^2$ 上移动，不管如何选择位置，它们总不能关于直线 $y=m(x-3)$ 对称，求 m 的取值范围.

解析 正面求解，思维受阻，不妨考虑反面求解，即先求曲线 $y=x^2$ 上关于直线 $y=m(x-3)$ 有对称的相异两点时 m 的取值范围 A，然后再求 A 在全集 $I=\mathbf{R}$ 上的补集. 若 $m=0$，曲线 $y=x^2$ 上没有关于 $y=0$ 对称的两点；若 $m\neq 0$，设与 $y=m(x-3)$ 垂直的直线 $l:y=-\frac{1}{m}x+b$，将其代入 $y=x^2$，得 $x^2+\frac{1}{m}x-b=0$，据此直线与曲线有两个交点关于直线 $y=m(x-3)$ 对称的充要条件为

$$\begin{cases}\Delta=\frac{1}{m^2}+4b>0\\ m(-\frac{1}{2m}-3)=(-\frac{1}{m})(-\frac{1}{2m})+b\Rightarrow m<\frac{1}{2}\end{cases}$$

故满足题设条件的 m 的取值范围为

$$m\in[-\frac{1}{2},+\infty)$$

例8 已知二次方程 $ax^2+2(2a-1)x+4a-7=0$ 中 a 为正整数. 当 a 取何值时，此方程至少有一个整数根?

解析 本题直接求出 x 比较困难. 我们启动创新思维，反客为主，求出

$$a=\frac{2x+7}{x^2+4x+4}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}$$

因为 a 为正整数. x 为整数根.

所以 $x+2=\pm 1$，于是 $a=1$ 或 $a=5$.

五、要把审题贯穿于解题的全过程

我们通常认为，审题只是解题的首要步骤，是正确解题的前提. 事实上，应把审题贯穿于解题过程的始终，与解题“同生共长”.

例9 求证：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2(n\in\mathbf{N}^+)$.

解析 这是一个与正整数有关的命题，通常会不假思索地采用数学归纳法去证.

当 $n=1$ 时，待证式显然成立.

设 $n=k(k>1)$ 时不等式成立，即

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2$$

那么当 $n=k+1$ 时

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2+\frac{1}{(k+1)^2}$$

由于 $2+\frac{1}{(k+1)^2}>2$，所以思路受阻，必须重新审题. 受阻的原因在于2是一个常数，从 k 到 $k+1$，右边常量不变，左边变大，这样，无法使用归纳假设，故本题直接用数学归纳法是行不通的，怎么办?

联想 $\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n})=2$，且 $n=1$ 时，$\frac{1}{1^2}\leqslant 2-\frac{1}{1}$，不妨把结论强化为 $\frac{1}{1^2}+$

心得 体会 拓广 疑问

$\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$,便可得证(略).

这是解题进程中的再审题.

例 10 已知一个等比数列的前四项之积为$\frac{1}{16}$,第二、三项的和为$\sqrt{2}$.求这个等比数列的公比.

解析 四个数成等比数列,可设其分别为$\frac{a}{q^3},\frac{a}{q},aq,aq^3$,则由题意知

$$\begin{cases} a^4=\frac{1}{16} & ① \\ \frac{a}{q}+aq=\sqrt{2} & ② \end{cases}$$

由 ① 得 $a=\pm\frac{1}{2}$,代入式 ② 并整理,得

$$q^2\pm 2\sqrt{2}q+1=0$$

解得 $q=\sqrt{2}\pm 1$ 或 $q=-\sqrt{2}\pm 1$.

故原等比数列的公比为 $q^2=3+2\sqrt{2}$ 或 $q^2=3-2\sqrt{2}$.

初看,上述解法无懈可击,但重新审视解题过程,不难发现,按上述解法,等比数列各项一定同号,而原题中并无此条件,因此,上述的设法导致了解题的疏漏.

重新的审视使我们发现了问题.把等比数列的前四项依次设为 a,aq,aq^2,aq^3,依题意可求出 $q=3\pm 2\sqrt{2}$ 或 $q=-5\pm 2\sqrt{6}$.

这是解题结束后的再审题.

小资料:中国古代数学家之沙克什

沙克什(1278—1351)又名瞻思.中国元代数学家.他将北宋人沈立所著《河防通议》一书的多种版本,合而为一,并加以补充,于 1321 年重订成《河防通议》2 卷,其中有一部分专门讲述算法,除了一般算术问题和简单的几何问题之外,用天元术解题的方法很有价值.他列方程的步骤与李冶的完全一致,他曾在李冶的家乡居住过,可能间接受到李冶思想方法的影响.

心得 体会 拓广 疑问

怎样在解题过程中使用通法,发现巧解

问题是数学的心脏,解决问题是数学的核心内容.无论是概念的引入和产生,公式与法则的发现和推导,还是定理的证明与应用,本质上都是在解决问题.那么如何通过对解题过程的深思,提炼问题的通性和解题的通法,发现解决问题的捷径呢?本节将讨论这一问题.

1.从通法中发现规律,产生简解.

例1 已知函数 $f(x)=ax^2+(2a-1)x+1$ 在区间 $[-3/2,2]$ 上的最大值为3,求实数 a 的值.

分析 本例的常规解法是分类讨论.这样做既要就 a 的符号讨论抛物线的开口方向,又要讨论对称轴与区间的关系,并当开口向上且对称轴从区间穿过时,还要看对称轴与区间端点的远近,方可确定此时的最大值,故需讨论7种情况,求解时令人心烦意乱.但据如上讨论细心观察便不难发现:二次函数在闭区间上的最值必在区间端点或顶点处取得.依据这一规律,采用"代入验证法",则可产生简解.

解 若 $f(2)=3$,则 $a=\frac{1}{2}$,此时 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$,经验证知 $a=\frac{1}{2}$ 符合题意;

若 $f(-\frac{3}{2})=3$,则 $a=-\frac{2}{3}$,此时对称轴 $x=-\frac{7}{4}<-\frac{3}{2}$,故 $a=-\frac{2}{3}$ 符合题意;

若 $f(\frac{1-2a}{2a})=3$,则 $a=-\frac{1}{2}$,此时对称轴 $x=-2\notin[-\frac{3}{2},2]$,故 $a=-\frac{1}{2}$ 不合题意.

又易验证 $a=0$ 不合题意.

综上知 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$.

2.深思解题过程,发现问题本质,拓宽引申,培养应变能力.

数学归纳法是证明与正整数有关的命题的通法.解题中,我们发现学生会用数学归纳法证明如下问题:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i+1)^2}<\frac{1}{4}-\frac{1}{4(n+1)}(n\in\mathbf{N}^+)$.

(2) $f(n)=\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+5}+\cdots+\frac{1}{8n+1}\leqslant\frac{14}{45}(n\in\mathbf{N}^+)$.

但却不会解如下演变题:

(3) 证明:$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i+1)^2}<\frac{1}{4}$.

(4) 是否存在最小的整数 m,使对一切 $n\in\mathbf{N}^+$,都有 $f(n)<\frac{m}{25}$ 成立?若存在,求出 m 的值;若不存在,说明理由.

对题(3)学生则仍用数学归纳法证明.其不知 $n=k+1$ 时原不等式左边比 $n=k$ 时净增一个正项,因而无法由 $n=k$ 时命题成立推出 $n=k+1$ 时命题也成立,故必然使思维受阻.而对题(4)却不知从何入手.事实上,只要我们留意并

潜心挖掘数学归纳法的证题过程,对题(1)就不难发现:$\frac{1}{(2k+3)^2}<\frac{1}{4}(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})$,而它正是原不等式赖以成立的基础.借助此不等式,不仅能给出题(1)的简解,而且能巧证题(3),有效避免了思维受阻现象.而对题(4),只要我们深思数学归纳法的递推过程,便不难发现问题的本质在于:$f(k+1)<f(k)$,即数列$\{f(n)\}$是递减数列,从而既给出了题(2)的简解,又可发现题(4)就是要求$f(1)<\frac{m}{25}$,故$m>\frac{70}{9}$,因而存在最小的整数$m=8$,使原式对一切$n\in\mathbf{N}^+$成立.

3.全方位捕捉信息是简化运算的充分条件.

例2 准线为$y=1$,离心率为$\frac{1}{2}$的椭圆过点$P(0,-1)$,试求此椭圆长轴长的取值范围.

分析 此题一般用点P的坐标适合椭圆方程或利用椭圆的第二定义来求解.此乃通法,此处解法从略.若能合理利用"点在曲线上"这一几何条件,并充分挖掘椭圆的几何性质,则可获简化运算的巧解.

解 如图1,设椭圆中心为M,长轴A_1A_2所在直线交准线于H.由椭圆的几何性质知:椭圆上的点到其准线$y=1$的距离的最小值为$|A_1H|$,最大值为$|A_2H|$.而P在椭圆上且它到准线的距离为2,故必有$|A_1H|\leqslant 2\leqslant|A_2H|$,即$\frac{a^2}{c}-a\leqslant 2\leqslant\frac{a^2}{c}+a$.又因为$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,$c=\frac{1}{2}a$,所以$2a-a\leqslant 2\leqslant 2a+a$,$\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 2$,故椭圆长轴长的取值范围是$[\frac{4}{3},4]$.

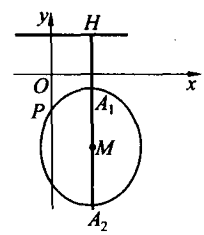


图1

说明 解答解析几何中对涉及圆锥曲线几何量的问题时,充分利用其几何意义,是化繁为简、化难为易的重要途径之一.

4.多角度等价转化,并寻找最简等价条件,是避繁就简的主渠道,同时可培养思维的灵活性和广阔性.

例3 设$P(x+a,y_1)$,$Q(x,y_2)$,$R(2+a,y_3)$是函数$f(x)=2^x+a$的反函数图象上的三点,若使y_1,y_2,y_3成等差数列的实数x只有一个,试求实数a的取值范围.

分析 首先,易将问题转化为:方程$2\log_2(x-a)=\log_2 x+1$只有一解.又该方程等价于

$$(\mathrm{I})\begin{cases}(x-a)^2=2x & ①\\ x-a>0 & ②\\ x>0 & ③\end{cases}$$

若直接就(Ⅰ)展开讨论,则非常繁琐,而注意到由①,②⇒③,故(Ⅰ)又等价于

$$(\mathrm{II})\begin{cases}(x-a)^2=2x & ④\\ x>a & ⑤\end{cases}$$

这时问题已得到较大的简化,若再多方联想,原问题又有如下化归途径.

途径1:转化为求方程④仅有一个大于a的解时a的取值范围.

途径2:转化为研究函数$f(x)=(x-a)^2(x>a)$与$g(x)=2x$的图象有唯一公共点时,a的取值范围.

若将(Ⅱ)化为$x-a=\sqrt{2x}>0$,则有如下化归途径.

途径3:转化为讨论函数$f(x)=\sqrt{2x}(x>0)$与$g(x)=x-a$的图象有唯

心得 体会 拓广 疑问

一公共点时 a 的取值范围.

由上可见,将原问题多角度等价转换,必将产生简解,达到避繁就简培养能力之目的.显见,本例以途径 3 为最简.解略.

5.在通法指导下,灵活应用基本数学思想方法是避免思维受阻、发现简解的重要途径.

例 4 虚数 z 满足条件:(1)$z+\frac{5}{z}\in\mathbf{R}$;(2)$\arg(z+m)=\frac{\pi}{4}$,求实数 m 的取值范围.

分析 围绕复数的代数形式可设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R},y\neq 0)$,则 $z+m=(x+m)+y\mathrm{i}$,且

$$z+\frac{5}{z}=(x+\frac{5x}{x^2+y^2})+(y-\frac{5y}{x^2+y^2})\mathrm{i}$$

由条件知$\begin{cases}y(1-\frac{5}{x^2+y^2})=0\\ y=x+m>0\end{cases}$,即$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ y=x+m>0\end{cases}$.

到此,若不能灵活应用基本数学思想方法,则极易走弯路.事实上,这里有如下思考方法.

方法 1:数形结合.即直线 $y=x+m$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 在 x 轴上方有公共点,易知 $-\sqrt{5}<m\leqslant\sqrt{10}$.此法直观新颖.

方法 2:换元法.令 $x=\sqrt{5}\cos\theta,y=\sqrt{5}\sin\theta$,且 $0<\theta<\pi$,则 $m=y-x=\sqrt{10}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$,则 $m\in(-\sqrt{5},\sqrt{10})$.此法巧妙简捷.

再围绕三角形式又可设 $z+m=r+r\mathrm{i}(r>0)$,则 $z=(r-m)+r\mathrm{i}$.易得

$$z+\frac{5}{2}=[(r-m)+\frac{5(r-m)}{(r-m)^2+r^2}]+[r-\frac{5r}{(r-m)^2+r^2}]\mathrm{i}$$

据题意知

$$(r-m)^2+r^2=5 \qquad ①$$

至此又有如下思考方法.

方法 3:利用实根分布范围,即讨论关于 r 的方程 ① 有正根时 m 的范围.

方法 4:分离参数.由 ① 得 $m=r\pm\sqrt{5-r^2}$,令 $r=\sqrt{5}\sin\theta,0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,便知 $-\sqrt{5}<m\leqslant\sqrt{10}$.