数学教育理论与实践探索丛书

中学数学思想方法专题选讲

ZHONGXUE

SHUXUE SIXIANG FANGFA

ZHUANTI XUANJIANG

黄忠裕 / 编著

四川大学出版社

中学数学思想方法
专题选讲

ZHONGXUE SHUXUE SIXIANG FANGFA
ZHUANTI XUANJIANG

黄忠裕 / 编著

四川大学出版社

前　言

学习数学，与其说学到了一些数学知识，倒不如说留在脑海中挥之不去的那一小部分乃是数学的思想方法。因此，数学思想方法一直以来被人们所重视也就不足为怪了。对数学思想方法怀有一定的兴趣是每一位数学教师所必需的，因为只有这样，他们才能更好地教好数学。

本书取名为《中学数学思想方法专题选讲》，当然主要是论述数学思想方法。数学思想方法内容庞杂，没有良好的数学功底，要把其中的头绪理清确属不易。因此，我在题目中加了“中学”、“专题”和“选讲”这三个词。这其中的原因，一是基于自己在中学十几年的教学经历中积累了丰富的中学教学实践经验；二是希望通过一些专题，如经典的数学名题、著名的定理等深入解剖，来领悟其中的数学思想方法，相信这会使数学思想方法的学习有一个良好的载体；三是用“选讲”，可以讲得更自由点，可以讲常见的数学逻辑方法、解题思想，也可以讲出一些专题的教学设想，甚至可以提出它们在新课程中设计的建议。

我到温州大学（原温州师范学院）不过才六年。工作的需要，使我有机会承担我校近几年的“数学思想方法”课程的教学，其间完成了温州师范学院“数学方法论学习与探索”教改项目的研究和“中学数学逻辑选讲”精品课程的建设，积累了一些素材。恰好基础教育课程改革在近几年又如火如荼地开展起来，这种背景使我找到了研究的突破口。凭借着在中学和在高师“两栖作战”的经历，我把兴趣放在了寻找数学思想方法研究的“中间地带”。这几年，我发表的论文大多涉及中学数学思想方法，

特别是围绕着高中某个数学专题进行研究，比如对斐波那契数列、多面体欧拉公式等展开深入研究。我的硕士论文《“推理与证明”专题进入〈高中数学课程标准（实验）〉的研究》也属于数学思想方法这一范畴。基于这些，我申报了 2006 年浙江省教育规划课题——“高中新课程标准背景下数学思想方法教学研究”，并获得立项。这不但延续了我硕士学位论文的研究课题，又使我能更深入全面地开展中学数学思想方法及其教学的研究。本书把以往有关数学思想方法的研究进行汇编和整合，权且当作省教育规划课题的一个阶段性成果。

本书的内容选择，主要是从当前中学数学课程改革，特别是高中新课程标准的要求这一视角出发来确定的。主要目标是：①研究数学活动的一般规律和方法；②将数学思想方法与中学数学教学研究密切结合起来，特别是高中新课程标准中一些典型的或新增加的专题内容。希望它能帮助人们，特别是中学数学教师，去领悟数学的精神、思想和方法，建立正确的数学观和数学教育观，提高数学素养，增强驾驭中学数学以及应对新课程改革的能力。

本书共分五章：

第 1 章对数学思想方法进行概述，明确数学思想方法的含义，界定了中学数学思想方法的研究范畴。

第 2 章“数学中的逻辑方法”，除了概要式地介绍命题的基础知识之外，着重谈了数学发现的合情推理方法和公理化思想。

第 3 章“数学证明方法”，重点讲了直接证法、反证法和数学归纳法，特别是对数学归纳法及其教学进行了深入的讨论。

第 4 章“常用数学解题中的思想与方法”，简要地介绍了数学解题的基本步骤和转化、构造两大思想方法，特别是通过中学一些典型的例子来阐述化归思想、构造法、数学模型方法、算法化思想以及分解—组合思想。

第5章“数学思想方法及其教学专题研究”，主要是为了说明数学思想方法在问题解决中的综合运用，涉及勾股定理、Fibonacci数列、多面体欧拉公式以及重要不等式等专题，希望为中学有关数学发现与证明的专题研究提供活生生的样板。同时，通过高中新课标中“推理与证明”专题教学设想、Fibonacci数列教学设计等教学研究，范例式地探讨中学数学思想方法的教学。

当然，在本书中，我对一些数学思想方法的理解是否准确，对一些专题的教学设想是否合适，都需要实践来检验。

本书可作为师范院校数学专业、中学教师继续教育“数学思想方法”课程的教材和参考书，特别适合从事高中新课程教学的教师参考，也可作为高中生的课外读物。

本书从构思到完稿经过了不少时日，期间丛书主编赵焕光教授不但为本书的框架设计提供了建设性的构想，审读了全稿，提出了一些很好的修改意见，而且一直以来给予资料等物质上的支持和精神上的鼓励与鞭策，在此深表谢意。此外，我还要感谢闻仲良副教授，他对本书的内容提出了很好的建议。

本书在编写过程中吸收了一些专家学者的研究成果，获得了浙江省教育规划立项课题基金资助，还得到了温州大学数学与信息科学学院领导的关心，四川大学出版社的编辑们也为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动，在此一并谢上。

尽管本书的大部分内容在数学本科学生、中学教师函授与继续教育中被使用过多次，各方面的学员对本书的内容也反映良好，但由于本人学识有限，书中难免有不当之处，恳请各位专家、广大师生批评指正。

黄忠裕

2006年7月1日于温州大学

目　　录

第1章　数学思想方法概述

"数学方法论"是由我国学者徐利治教授在1980年出版的《浅谈数学方法论》中首先采用的一个名词，它主要是研究和讨论数学发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问. 近年来，我国数学界特别是数学教育界非常重视对它的研究，在这方面取得了长足的进步. 本章通过对"什么是数学思想方法"等问题的讨论，来阐述数学思想与数学方法的含义及其关系，数学思想方法的特点以及数学问题、数学知识、数学方法与数学思想四者间的关系，以便对数学思想方法有一个概括的了解.

1.1　数学思想与数学方法

1.1.1　数学思想的含义

关于数学思想的含义，可以从以下几个不同的角度来理解.

一是把思想看作是相对于感性认识的理性认识成果，可以认为数学思想是数学历史长河中各阶段相对真理认识的总和，是人类对数学及其对象、数学概念、命题和数学结论以及数学方法的本质性认识.

二是把数学活动作为一种社会活动来看，可将数学思想阐述为人们对数学研究对象统一的、本质的认识. 它包括对数学本质的理解，对数学基本特性、数学对象、数学与其他科学、数学与客观世界的关系的认识，以及在数学中所创立的新概念、新理

论、新模型和新方法的认识.

三是把思想与观念作为同义来看，认为数学观念是指人们用数学的思考方式去考虑问题、处理问题的自觉意识或思维习惯，数学思想则是以数学观念为核心的对数学关系中最一般规律的认识.

比较上述说法，对数学思想的含义作如下概括：数学思想是指在数学活动中解决问题的基本观点和根本想法，是对数学概念、命题、规律、方法和技巧的本质认识，是数学中的智慧和灵魂. 例如：模型思想、极限思想、统计思想、最优化思想、化归思想、分类思想等.

把数学思想按其对认识的研究范围划分，可分为宏观数学思想和微观数学思想. 宏观数学思想是指对数学整体的认识，数学与其他科学、数学与客观世界的关系等. 微观数学思想是指对数学内部各分支及各种体系结构中特定内容和方法的认识，包括对所创立的新概念、新模型、新方法和新理论的认识，比如古希腊的演绎推理思想、符号代表数的思想和现代的集合论思想等等. 另外，数学思想与一般科学思想有移植及相互使用的现象，如分类思想，它是一般科学思想的“数学化”；而数学中的公理化思想被其他学科所使用，就转化为一般的科学思想.

1.1.2 数学方法的含义

“方法”一词，从汉字词源看，即行事之条理或度量方形之法，泛指一种标准和规则. 西方语言中，“方法”一词源于希腊文 μετοσos，表示沿某条道路行进. 可见，方法是人们活动的步骤、程序和策略等. 所以，就数学本身而言，数学方法是指人们在数学研究、数学学习和问题解决等数学活动中的步骤、程序和格式，是达到数学研究和问题解决目的的途径、手段和操作的总和，具有较明显的“行为规则”意义. 例如，采用分解组合的方

法求一些数列前 n 项的和，这种方法的操作就有明显的“行为规则”意义.

作为一种科学方法，数学方法可广义地理解为用数学语言描述事物的状态、关系和过程，并加以推导、演算和分析，以形成对问题的解释、判断和预言的方法. 在这样的意义下，数学本身就是一种方法，它既具有一般科学方法的特征，又具有横向移植的特征，从而在整个科学领域中有着广泛的应用. 在现代科学中，运用数学的程度已成为衡量一门科学是否成熟的重要标志.

按数学方法作用的范围，可把它划分为三个不同的层次：

第一，一般的逻辑方法，如分析、综合、类比、联想、归纳、演绎、猜想等，它们不仅适用于数学，而且适用于其他学科领域.

第二，全局性的数学方法，如极限方法、关系映射反演方法、数学模型方法等，这些方法作用范围广，有的甚至影响着一个数学分支和其他学科的发展方向.

第三，技巧性的数学方法，如换元法、待定系数法、配方法等，它们往往和具体数学内容联系在一起，是解决某类数学问题的特殊方法.

按数学方法的运用功能，可将数学方法分为：

(1) 数学解决问题的基本方法——化归方法；

(2) 数学化活动的一般方法——抽象方法；

(3) 一般科学方法在数学中的运用，如合情推理方法；

(4) 数学证明方法；

(5) 构建数学理论的一般方法——公理化方法.

1.1.3 数学思想与数学方法的关系

数学思想与数学方法具有密切的关系. 首先，两者都是以一定的数学知识为基础，反过来又促进数学知识的深化以及向数学

能力的转化. 其次，两者具有的抽象概括程度不同，表现出互为表里的关系. 一方面，数学方法受到数学思想的指引，是数学思想在数学活动中的反映和体现，表现形式外显，具有实践性的倾向；另一方面，数学思想是相应数学方法的结晶和升华，表现形式内隐，带有理论性的特征.

由于人们在数学学习与研究活动中很难把思想和方法严格区分开，所以常统称为数学思想方法. 同一个数学成就，当用它去解决别的问题时，就称之为方法；当评价它在数学体系中的自身价值和意义时，就称之为思想. 比如“极限”，用它去求导数、求积分、解方程时，人们就说极限方法；当我们讨论它的价值，即将变化过程趋势用数值加以表示，使无限向有限转化时，人们就讲“极限思想”了. 将两重意思合在一起，就有了“极限思想方法”之类的提法. 又如，在解决实际应用问题时，用含未知数的式子建立等量关系，由此求得未知数的值，就说“方程方法”；当人们发现方程不仅是解决实际问题的数学模型，而且可以用代数方程研究几何曲线时，又讲“方程思想”. 两者合在一起，笼统地说成“方程思想方法”. 本书对数学思想与数学方法不予明显的区分，笼统地说某某数学思想、或某某数学方法、或某某数学思想方法.

1.1.4 数学思想方法的特点

1.1.4.1 概括性

由于数学对象本身的概括性以及数学思想方法是对数学知识的提炼和再概括，使得概括性成为数学思想方法的最本质的特征. 比如，数学归纳法是在对皮亚诺自然数公理基础上的提炼，是对自然数集合“序”的内省；关系映射反演方法的建立标志着一般的化归方法达到更新更高的抽象概括程度，而成为数学研究各个领域中有普遍应用价值的一般方法.

1.1.4.2 隶属性

形象地说，数学思想方法是生长在数学知识这块“皮”上的“毛”．数学知识成为数学思想方法的载体，数学思想方法通过数学知识来显化．可以说，数学思想方法隶属于数学知识．例如，多项式的恒等定理中蕴含着待定系数法，待定系数法在因式分解、化部分分式、求函数解析式、解方程（组）等数学内容中得到显化．数学思想方法的隶属性，要求在进行数学思想方法教学时，应注意对教材的挖掘，从数学知识的教学开始，通过数学活动逐步明示相应的思想方法．

1.1.4.3 层次性

数学思想方法是概括的结果，概括程度的高低决定了数学思想方法具有不同的层次．例如，有人把数学思想分为三个层次：一为数学核心思想，二为一般数学思想，三为具体数学思想．数学方法也有着不同的层次划分，张奠宙等在《数学方法论稿》中将数学方法分为以下四个层次：一是基本和重大的数学思想方法（模型化方法、微积分方法、概率统计方法、拓扑方法、计算方法等），二是与一般科学方法相应的数学方法（类比联想、分析综合、归纳演绎等），三是数学中特有的方法（数学表示、数学等价、数形转换等），四是中学数学中的解题方法与技巧．以上所述，反映了数学思想方法具有层次性的特点．例如二元一次方程组的解法，它有三个层次：消元法是第一层次；为了消元可考虑用加减消元或代入消元，这是第二层次；为此，需要进行具体的恒等变形，这是第三层次．

1.1.4.4 迁移性

心理学认为迁移就是概括，而数学思想方法是抽象、概括的结果，所以它具有广泛的迁移性特点．迁移性表现在数学内部，它是沟通数学各分支、各部分之间联系的纽带，是构建数学理论的基石；表现在数学外部，它能沟通数学与其他科学及社会的联

系，产生更加广泛的迁移.

以上是数学思想方法的共有特点. 但由于思想与方法层次不同，数学思想和数学方法的特点也表现出不同的倾向. 其中，数学思想呈现它的本质性、导向性和内隐性，而数学方法更多地表现出程序性、操作性和外显性. 所以一般来说，强调指导思想时称数学思想，强调操作过程时称数学方法.

1.2 数学思想方法与数学问题、数学知识的关系

数学科学的全部内容，是由数学问题、数学知识与数学思想方法组成的系统. 这里的数学知识，是指一切数学概念、原理、法则以及数学语言、数学符号的统称，它是人们在研究数学理论问题与数学实践问题的过程中，逐渐形成的关于客观事物的数量关系与空间形式的基本认识. 在数学科学的系统中，数学问题、数学知识与数学思想方法具有各自不同的内涵，也有着不同的作用.

1.2.1 数学问题

“问题是数学的心脏.”这句名言代表了众多数学家的共同看法，也反映了数学发展的真实情况. 从古到今，有许多脍炙人口的著名的数学问题，例如尺规作图的三大不能问题；高次方程的求根公式；Fermat 大定理（$n\geqslant 3$ 时，$x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解）等等. 对这些问题的研究大大促进了数学的发展，产生了许多数学的新概念、新方法，甚至新的数学分支.

诚如希尔伯特在第二届国际数学家大会（1900 年）上作的报告《数学问题》中所说的：“……能在一门科学分支中提出大量的问题，该门学科就充满生命力；而问题的缺乏则预示着这门

科学发展的终止．正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题．正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志，发现新的方法，产生新的观点，达到更为广阔自由的境界．”希尔伯特的精辟论述说明：数学问题既是数学发现的起点，又是数学发展的路标；对数学发展既有探索和导向作用，又可以为数学理论的形成积累必要的资料；既能导致数学的发现和理论的创新，又可以激发人们的创造性和进取精神．Minkowski 也说过：“最有吸引力的题材莫过于展望数学的未来，列出在新世纪里数学家应当努力解决的问题．”因此，数学问题被人们形象地称为数学的“心脏”．

数学需要“好的问题”．希尔伯特认为“好的问题”标准有二，一是清晰易懂，二是难而又可解决，比如哥德巴赫猜想，四色问题等等．郑毓信认为，一个“好的问题”应当符合以下一些标准：①具有较强的探索性；②具有一定的启示意义；③具有多种不同的解法，甚至多种可能的解答；④具有一定的发展余地，即由好的问题可以引出新的问题和进一步的思考；⑤具有一定的现实意义，或与学生的实际生活有着直接的联系；⑥问题解决时能鼓励、促进同学间的合作；⑦问题的表述应当简单易懂．

例如：设计一种方案，把一个正方形不重复、不遗漏地分割成 15 个正方形（分得的正方形大小可以不相同）．

本题可将分割这样的几何问题转化为数的运算，比如由

$$15=9+3+3=4+3+8=36-3\times 7$$
$$=36-24+3=3+3+3+3+3,$$

可得很多分割方法，还可将原问题推广到一般甚至空间等情形．这便是一个好的问题．

1.2.2 数学思想方法与数学问题、数学知识的关系

数学问题、数学知识与数学思想方法是相互影响、互相联

系、协同发展的辩证统一体，正是它们的相互作用与相互结合才使数学成为一个有机的整体.

纵观数学的发展历史可以看到，人们在解决实践和理论提出的各种数学问题的过程中，总结和创造了各种不同的数学思想方法. 在这些数学思想方法发生的同时，相应的数学知识也相伴形成. 例如，寻求“高次代数方程求根公式”这一问题，它源于16世纪，在其后的300多年中，曾有不少数学家为之不懈地奋斗，但直到19世纪法国数学家伽罗华创立了“群论”的思想方法以后，才使这一“向人类智慧挑战”的问题得到了彻底解决. 其间，为了解决代数方程根的数目问题，引入了复数方法，不仅由此创立了代数基本定理，而且建立了“群论”理论.

综上所述，数学问题是数学生命的源泉，数学思想方法是问题解决的技术与手段，数学知识则是认识的结果. 就它们的关系而言，数学思想方法是基于数学知识而又高于数学知识的一种隐性的数学知识，它蕴含在数学的知识体系之中，它的突破又常常导致数学知识的创新. 因此，如果说数学问题是数学的“心脏”，数学知识是数学的“躯体”，那么数学方法无疑是数学的“行为规则”，而数学思想则是其“灵魂”.

1.3 中学数学思想方法的研究范畴

自从20世纪80年代初徐利治教授在大学数学系开设“数学方法论”课程以来，数学思想方法的研究不断深入，课程建设不断发展. 目前各类数学方法论的著作大多从不同角度组织有关内容，人们也力图建立一个体系，例如考虑是否可按数学研究中的三个阶段来组织内容：①实际问题数学化方法（包括观察、实验、归纳、类比、抽象化、模型化等方法），②数学材料逻辑化的组织方法（如公理化方法、结构方法等），③应用方法，但都