

测量学

CELIANGXUE

(修订版)

陈改英 主编



气象出版社

P2/36

2007

测 量 学

(修订版)

主 编 陈改英
参编者 徐文兵 赵 群
肖 武

气象出版社

内容简介

修订版《测量学》在对测量学的基本理论、基本方法及与内容有关的主要仪器的使用作了较为详细的阐述的基础上,删除了陈旧过时的内容,增加了近年来测绘科学的新仪器和新方法。本书力求说理详明、文字浅显,以方便教学和学习。在内容上针对农林院校的专业特点,以地形测量和地形图的应用为重点,对距离测量、角度测量、水准测量、小地区控制测量、小地区大比例尺地形图的测绘、地面数字测量、地形图应用以及园林施工测量作了较为全面的介绍。另外,增加了以测量学实验、实习为主要内容的附录,使教材使用起来更加方便。

本书可作为高等农林院校园林、园艺、林学、森林资源保护与游憩等专业及其相近专业的测量学教材,亦可作为广大园林工作者学习测量学课程的培训教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

测量学/陈改英主编;徐文兵,赵群,肖武编. —2版
(修订本). —北京:气象出版社,2007.6

ISBN 978-7-5029-4323-3

I. 测… II. ①陈…②徐…③赵…④肖… III. 测量学—
高等学校—教材 IV. P2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 078123 号

气象出版社出版

(北京市中关村南大街 46 号 邮编:100081)

总编室:010-68407112

发行部:010-68409198

网址:<http://cmp.cma.gov.cn> E-mail:qxcsb@263.net

责任编辑:方益民

终审:黄润恒

封面设计:刘 扬 责任技编:陈 红 责任校对:赵 寒

* * *

北京昌平环球印刷厂印刷

气象出版社发行 全国各地新华书店经销

开本:787×960 1/16 印张:16.75 字数:327千字

2007年6月第2版 2007年6月第5次印刷

印数:12001—16000 定价:32.00元

修订版前言

随着测绘技术的迅速发展,先进的仪器设备和测绘产品不断问世,传统的测绘技术逐渐为现代测绘技术所取代。更新教材内容,充实测量学教学内容,在测量教学中显得尤为重要。

此次修订对原教材在体系和内容上进行了较大改革。针对现代农林生产的实际需要和高等农林院校的专业特点,一方面保留了传统测绘教学中经典的内容,另一方面增加了现代测绘新技术的内容。主要修订内容如下:加强了第一章绪论的内容;第二章删除了钢尺量距的成果整理,第三章水准测量补充了数字水准仪;第四章增删了电子经纬仪的有关内容,以便适应当前的测量教学;第六章小地区控制测量删除了小三角测量的内容;将原书第十一章调整为第七章,并在内容的实用性上加强;对原书第七章小地区大比例尺地形图测绘的内容进行了调整,对原书第九、第十二章进行了删除;增加了地面数字测量等新内容。修订本除保留了原书的特点之外,内容较原书更加充实,文字篇幅略有减少,对农林院校各专业使用有更大的适用性。

本书由北京农学院陈改英主编,参编人员有:徐文兵(浙江林学院)、赵群(北京农学院)、肖武(北京农学院)。全书共分十一章,第一至第六章、第八章、第九章、第十一章由陈改英编写,第七章由赵群编写,第十章由徐文兵编写;附录由陈改英、赵群、肖武编写。最后由陈改英对全书进行了统一修改定稿。在此向参考文献的作者们致谢。气象出版社的方益民编辑对本书的编写与出版付出了辛勤的劳动,在此表示深深的谢意。

由于编者水平有限,书中有不妥之处,恳请批评、指正,以便再版时修订参考。

编 者

2006 年 12 月

第一版前言

本书为适合园林专业的需要而编写,可作为大专院校园林专业及其相近专业的教科书使用,也可供园林工程施工人员学习参考。本书内容可分为六大部分。第一部分(第一章至第五章)为测量学基本知识、基本理论和基本方法;第二部分(第六章至第七章)为小地区地形测量;第三部分(第八章)为地形图的应用;第四部分(第九章)介绍本专业常用的几种专业测量;第五部分(第十章)为园林工程施工测量;第六部分(第十一章至第十二章)介绍测量学的新技术。

本书第一至第十一章由陈改英编写,第十二章由赵群编写。在此向参考文献的作者及审阅本书原稿的北京测绘设计研究院洪立波先生致谢。

由于编者园林专业知识水平有限,书中有不妥之处,恳请批评、指正。

编著者

2001年1月

目 录

修订版前言

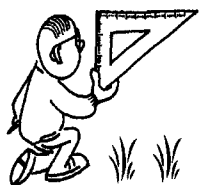
第一版前言

第一章 绪论	(1)
第一节 测量学的概念、任务、分类及其作用	(1)
第二节 地球的形状和大小	(3)
第三节 确定地面点位置的坐标系统	(5)
第四节 地面点的高程	(8)
第五节 地球曲率对水平距离和高差的影响	(9)
第二章 距离测量与直线定向	(12)
第一节 钢尺量距	(12)
第二节 光电测距	(15)
第三节 直线定向	(18)
第四节 罗盘仪测定磁方位角	(20)
第三章 水准测量	(23)
第一节 水准测量原理	(23)
第二节 水准测量仪器和工具	(24)
第三节 水准仪的使用	(28)
第四节 水准测量的外业	(29)
第五节 水准测量的内业	(33)
第六节 自动安平水准仪	(36)
第七节 微倾式水准仪的检验与校正	(38)
第八节 水准测量的误差分析	(41)
第九节 数字水准仪简介	(43)
第四章 经纬仪及其使用	(46)
第一节 角度测量原理	(46)
第二节 DJ6 级光学经纬仪	(47)
第三节 水平角观测	(53)
第四节 水平角观测误差分析	(58)

第五节	竖直角观测	(62)
第六节	经纬仪的检验和校正	(66)
第七节	视距测量	(69)
第八节	电子经纬仪简介	(72)
第五章	测量误差的基本知识	(74)
第一节	测量误差概述	(74)
第二节	衡量精度的指标	(77)
第三节	误差传播定律	(81)
第四节	等精度直接观测值的最可靠值	(84)
第六章	小地区控制测量	(89)
第一节	控制测量概述	(89)
第二节	导线测量	(94)
第三节	导线测量的内业计算	(97)
第四节	导线测量错误的检查	(103)
第五节	高程控制测量	(105)
第七章	全球定位系统(GPS)	(113)
第一节	GPS 概述	(113)
第二节	GPS 的组成	(115)
第三节	GPS 的坐标系和 WGS—84	(117)
第四节	GPS 定位的基本原理	(118)
第五节	GPS 小区域控制测量	(119)
第六节	手持 GPS 机及其使用	(123)
第八章	小地区大比例地形图的测绘	(126)
第一节	地物和地貌在地形图上的表示	(126)
第二节	测图的准备工作	(135)
第三节	经纬仪测绘法	(136)
第四节	碎部点的选择与立尺线路	(138)
第五节	地物和地貌的勾绘	(142)
第六节	地形图的拼接、整饰和检查	(146)
第九章	地形图的应用	(149)
第一节	地形图的分幅与编号	(149)
第二节	地形图的识读	(153)
第三节	地形图的野外应用	(153)

第四节 地形图的一般应用	(157)
第五节 地形图上求面积	(161)
第六节 土地整理中地形图的应用	(165)
第十章 地面数字测图	(169)
第一节 数字测图概述	(169)
第二节 数字测图的硬件环境	(170)
第三节 数字测图的软件环境	(172)
第四节 全站仪及其应用	(173)
第五节 数字化测图的作业方法	(183)
第六节 地形图的数字化	(190)
第十一章 园林工程测量	(193)
第一节 测设的基本工作	(193)
第二节 圆曲线测设	(196)
第三节 测设点的平面位置	(199)
第四节 施工控制测量	(200)
第五节 园林建筑的放样	(206)
第六节 园路、公园水体、堆山和平整场地的放样	(212)
第七节 树木种植定点放样	(215)
附录:测量学实验与实习指导书	(220)
第一部分 实验实习须知	(220)
第二部分 测量学实验	(224)
第三部分 测量学教学实习	(252)
主要参考文献	(258)

第一章 绪 论



本章导读

测量学是随着生产实践需要而产生,同时亦随生产和科学技术的发展而发展的学科,在发展的不同时期,具有各个时代不同的特点。

本章介绍了测量学的概念、任务、分类及其作用,阐述了地球的形状、大小以及地球曲率对测量工作的影响。重点讲述了确定地面点的测量坐标和高程。

第一节 测量学的概念、任务、分类及其作用

测量学概括为研究地球形状和大小以及确定空间点位的科学。随着现代技术(计算机技术、空间技术)的发展,测量学具有了新的内涵。现代测量学是研究与地球有关的空间数据采集、传输、处理、变换、存储、分析、制图、显示的科学。“国际测量师联合会”(IUSM)在1990年制定的章程中定义了新的测绘学,即测绘学是采集、量测、处理、分析、解译、描述、分发、利用和评价与地理和空间分布有关的数据的一门科学、工艺、技术和经济实体。

测量学的任务概括起来有三个方面,一是精确地测定地面点的位置以及整个地球的形状和大小;二是将地球表面局部范围的形状和大小测绘成图;三是保证国民经济建设和国防建设所需要的测量工作。这门科学主要可分为以下几类:

一、大地测量学

从地球整体考虑,并顾及地球曲率影响来精确地测定地面点的位置,建立国家大地控制网,测量地球重力场的分布与变化,其测量成果用以研究地球的形状和大小、地壳的升降、大陆的变迁、地震预报以及作为各种测量的依据。由于现代空间技术的发展,大地测量与空间技术相结合,借助于卫星技术来解决大地测量问题。

二、地形测量学

以地球表面小区域范围为研究对象,不考虑地球曲率影响,把地球表面当做平面,将地面上的物体以及地球表面高低起伏的形态测绘成图,供国民经济建设及国防建设各方面需要之用,亦称为普通测量学。

三、摄影测量学

利用摄影相片测定物体的形状、大小和空间位置的科学。摄影测量又因为相片获取的方式不同,可以分为“地面摄影测量”、“航空摄影测量”及“航天摄影测量”。地面摄影测量由于会受到地形条件的限制,主要用于某些工程建设方面的测量;航空摄影测量利用从飞机上摄得的地面相片成图,是目前测绘地形图的主要方法之一;航天摄影测量是从人造地球卫星或宇宙飞船上进行摄影,故可有效地研究地球及其他星体。

四、工程测量学

研究工程建设在勘测设计、施工和管理阶段所进行的各种测量工作的科学。其主要任务有三个方面,一是将地面上地形地物测绘到图纸上;二是将图纸上设计的建筑物测设到实地,亦即在地面上标定出所测设点的位置;三是对建筑物在施工过程中和竣工后会产生变化而进行的变形观测。

五、地图制图学

研究利用测量所得的资料,投影编绘成地图,以及地图制作的理论、工艺技术和应用等方面的科学。一般包括地图投影、编制、整饰和制印等内容。现代地图制图学多利用空间遥感技术获取信息编制各种地图。

在国民经济建设和科学研究实践中,测量学得到了广泛的应用。如城市的扩建和改建;村镇居民点的兴建和改造;各种类型工矿企业的建设;铁路、公路、桥梁、机场、港口等各项工程的建设;从勘测设计到施工、竣工各阶段都需要进行大量的测量工作。另外,在土地规划和管理、地下矿藏的勘探和开采、森林资源的调整和采伐都要以各种测量数据为依据。在国防建设中,各项国防工程的修建,以及作战时的战役布署和具体军事行动的指挥等,也都需要精确的观测数据。

在园林绿化建设中,测量工作是直接为规划、设计、施工服务的。

园林规划设计是运用园林艺术手法,对园林用地的平面和竖向进行综合考虑。把山、水、林、路和园林建筑合理地、因地制宜地进行空间布局,使其成为有机的整体。这就必须通过测量获取所规划设计地区的地形情况,即了解地面高低起伏、坡度变化、地物的分布位置以及用地面积等基本情况,然后进行园林规划、设计而成为规划、设计图。

在园林工程施工中,测量包括施工前的测量和施工过程中的测量。施工前的测量工作如:施工控制网的建立;建筑物主轴线的定位;建筑物细部的放样;园路、水系、堆山的放线;树木定植点的测设等。施工中的测量是随着工程的进展,在每道工序之前所进行的测量工作,如建筑物基槽底部设计高的测设;堆山设计高、挖湖等深线标志的测设;路面设计高的测设;给排水工程中管道施工测量等。

有些园林工程施工完后,还要进行竣工测量。其目的是一方面检查各项工程是否达到了预期的要求,另一方面将验收测量所得到的图纸资料存入档案,为将来的利用、

改建打下基础。此阶段的测量工作包括:竣工图的测绘,各项具体工程的标准验收测量,各种表格和文字说明书的编写等。

现代测绘技术的集成化(外业、内业、用图集成一体)、数字化和智能化,使得园林规划、计设更为科学便捷。例如,利用航摄、遥感、一体化数字化成图技术,在数字地图上进行计算机辅助设计,并进行园林规划、设计的各项工作;利用数字地形图可生成电子地图和数字地面模型(DTM),虚拟实现园林规划、设计的场景;用“3S”系统对园林、景观进行监测、管理等;数字地形信息作为地理空间数据的基本信息之一,成为数字园林建设的重要组成部分。因此,在一定意义上可以说,现代的测绘技术必将推动园林绿化建设朝着现代化方向发展。

第二节 地球的形状和大小

纵观古今,由坐地观天到在太空观测地球,人类对地球的形状和大小认识经历了漫长的岁月。作为测量学研究的对象,地球表面形状极其复杂。世界第一高峰珠穆朗玛峰高达 8 844.43m,而太平洋西部的马里亚纳海沟深达 11 022m。地球上海洋面积约 占 71%,陆地面积约占 29%。

然而,地球表面的高低起伏与 6 371km 的地球半径相比,显得微不足道。在测量中把地球形状看作是由静止的海水面向陆地延伸并围绕整个地球所形成的形状。

一、基准线

如图 1-1 所示,任何地面点都受着地球上各种力的作用,其中主要的有地球质心的吸引力和地球自转所产生的离心力,这两个力的合力称为重力。如果在地面上悬一个垂球,其静止时所指的方向就是重力方向,这时的垂球线,称为铅垂线。

在测量上,以通过地面上某一点的铅垂线作为该点的基准线,即铅垂线是测量外业所依据的基准线。

二、基准面

地球重力场中处处与重力方向垂直的面,叫做水准面。如静止的水表面,它的每一个质点都受到重力的作用,因此,该表面必然处处与重力方向垂直,这就是一个水准面。由于地球内部质量分布的不均匀,所以作为处处与重力方向垂直的水准面,是一个有微小起伏的复杂的曲面。水准面可以处于

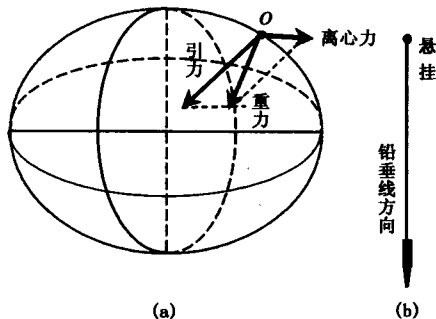


图 1-1 铅垂线方向

不同的高度位置,可以有无穷个。

在测量工作中,把一个假想的、与静止的海水面重合,并向陆地延伸且包围整个地球的特定重力等位面称为大地水准面。

显然,大地水准面具有水准面的特性,是一个表面处处与重力方向垂直的、有微小起伏的、复杂的曲面。大地水准面是测量外业所依据的基准面。

尽管地面上测得的结果是以大地水准面为基准的,但由于大地水准面是一个不规则的、复杂的曲面,它不可能通过一个数学式子精确地表达出来,因此在测量的计算和制图工作中,通常用一个非常接近大地水准面的规则的几何表面,即参考椭球面(又称旋转椭球面)来代替大地水准面作为计算和制图的基准面。

大地水准面、参考椭球面与地表面的关系如图 1-2 所示。

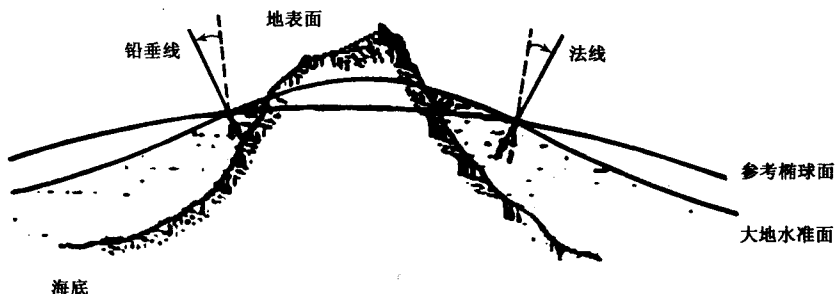


图 1-2 大地水准面、参考椭球面与地表面

如图 1-3 所示,旋转椭球面是一个数学表面,它的大小可由长半径 a 、短半径 b 和扁率 e 来表示。大地原点位于陕西省泾阳县的大地坐标系“1980 西安坐标系”采用了 1975 年国际大地测量协会(IGG)推荐的全球坐标系的数值为:

$$a=6\,378\,140\text{m}, b=6\,356\,755.3\text{m}$$

$$e=\frac{a-b}{a}\approx\frac{1}{298.257}$$

由于地球的扁率很小,接近于圆球,因此在要求精度不高的情况下,可以近似地将其当做一个圆球体,半径 R 为 6 371km。

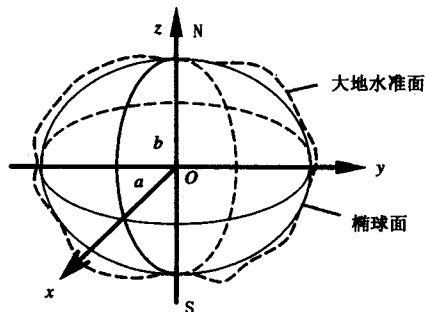


图 1-3 大地水准面与参考椭球面

第三节 确定地面点位置的坐标系

在测量工作中,要将地面上的房屋、河流、道路与地面上高低起伏的形态描绘出来,只要把各地物、地貌特征点的平面位置和高程确定下来即可完成。由此可见,测量工作的根本任务就是确定地面点的位置。无论是地形图的测绘还是建(构)筑物的放样,都可以归结为确定点位的问题。

测量上确定地面点位置的坐标系有地理坐标系、高斯直角坐标系、平面直角坐标系及地心坐标系。

一、地理坐标

地面上一点的平面位置在椭球面上通常用经度和纬度来表示,称为地理坐标。

如图 1-4 所示, O 为地心, PP' 为旋转椭球体的旋转轴,又称地轴,它的两端点为北、南两极。过地轴的平面称为子午面。子午面与旋转椭球体面的交线称为子午线或经线。过地轴中心且垂直于地轴的平面称为赤道面。赤道面与旋转椭球面的交线称为赤道。

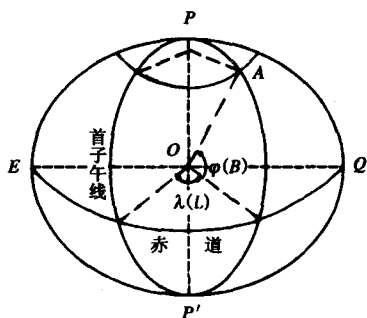


图 1-4 地理坐标系

世界各国统一将通过英国格林尼治天文台的子午面作为经度起算面,称为首子午面。首子午面与旋转椭球面的交线,称为首子午线。地面上某一点 A 的经度,就是过该点的子午面与首子午面的夹角,

以 λ 表示。经度从首子午线起向东 180° 称东经,向西 180° 称西经。 A 点的纬度,就是该点的法线与赤道平面的交角,以 φ 表示。纬度从赤道起,向北由 $0^\circ \sim 90^\circ$ 称北纬,向南由 $0^\circ \sim 90^\circ$ 称南纬。例如,北京的地理坐标,经度是东经 $116^\circ 28'$,纬度是北纬 $39^\circ 54'$ 。

地理坐标依铅垂线经天文观测方法测定的称天文地理坐标;依椭球面法线经大地测量方法测定的称大地地理坐标。

二、高斯直角坐标

地理坐标用经度和纬度来表示地面点在球面上的位置,但在测量的计算和绘图中,通常需要地面点在平面上表示。旋转椭球面是个闭合曲面,建立一个平面直角坐标系主要应用各种投影方法。采用横切圆柱投影——高斯—克吕格投影的方法来建立平面直角坐标系,称为高斯—克吕格直角坐标系,简称为高斯直角坐标系。

如图 1-5 所示,高斯—克吕格投影就是设想用一个横椭圆柱面,套在旋转椭球体外面,并与旋转椭球体面上某一条子午线相切,同时使椭圆柱的轴位于赤道面内并通过椭

圆体的中心,相切的子午线称为中央子午线;然后将中央子午线附近的旋转椭球面上的点、线投影到横切圆柱面上去,如将旋转椭球体面上的点,投影到圆柱面上,再顺着过极点的母线,将圆柱面剪开,展成平面。

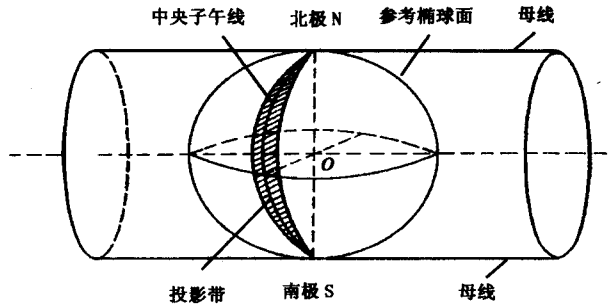


图 1-5 高斯投影

高斯投影平面上的中央子午线投影为直线且长度不变,其余的子午线均为凹向中央子午线的曲线,其长度大于投影前的长度,离中央子午线愈远长度变形愈长,为了将长度变化限制在测图精度允许的范围内,通常采用六度分带法,即从首子午线起每隔经差 6° 为一带。将旋转椭球体面由西向东等分为 60 带,即 $0^\circ-6^\circ$ 为第 1 带, 3° 线为第 1 带的中央子午线, $6^\circ-12^\circ$ 为第 2 带, 9° 线为第 2 带的中央子午线……每一带单独进行投影,如图 1-6 所示。

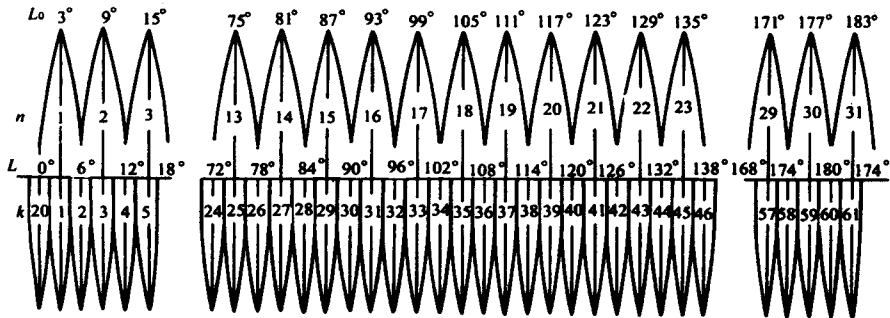


图 1-6 高斯投影带

有了高斯投影平面后,怎样建立平面直角坐标系呢?如图 1-7 所示,测量上以每一带的中央子午线的投影为直角坐标系的纵轴 x ,向上(北)为正,向下(南)为负;以赤道的投影为直角坐标系的横轴 y ,向东为正,向西为负,两轴的交点 O 为坐标原点。由于我国领土全部位于赤道以北,因此, x 值均为正值,而 y 值则有正有负,我国为了使计

算中避免 y 值出现负值,规定每带的中央子午线各自西移 500km,同时为了指示投影是哪一带,还规定在横坐标值前面要加上带号,如: M 点在国家统一坐标系中的坐标为:

$$x_M = 347\ 218.971\text{m}$$

$$y_M = 19\ 667\ 214.556\text{m}$$

上述 y_M 等号右边的 19,表示第 19 带, M 点在高斯直角坐标系中的 y 坐标 $y_M = 167\ 214.556$ 。

采用高斯直角坐标来表示地面上某点的位置时,需要通过比较复杂的数学(投影)计算才能求得该地面点在高斯投影平面上的坐标值。高斯直角坐标系一般都用于大面积的测区。

三、平面直角坐标系

当测区面积较小时,地面点在投影面上的坐标可以用平面直角坐标系来表示。

如图 1-8 所示,平面直角坐标系的原点记为 O ,规定纵坐标轴为 x 轴,与南北方向一致,自原点 O 起,指北者为正,指南者为负;横坐标轴为 y 轴,与东西方向一致,自原点起,指东者为正,指西者为负。象限 I, II, III, IV 按顺时针方向排列。坐标原点可取用高斯直角坐标值,也可以根据实地情况安置,一般为使测区所有各点的纵、横坐标值均为正值,坐标原点大都安置在测区的西南角,使测区全部落在第 I 象限内。如地面上某点 M 的坐标可写为:

$$x_M = 384.215\text{m}$$

$$y_M = 511.624\text{m}$$

四、地心坐标系

卫星大地测量常用以地球质心为原点的坐

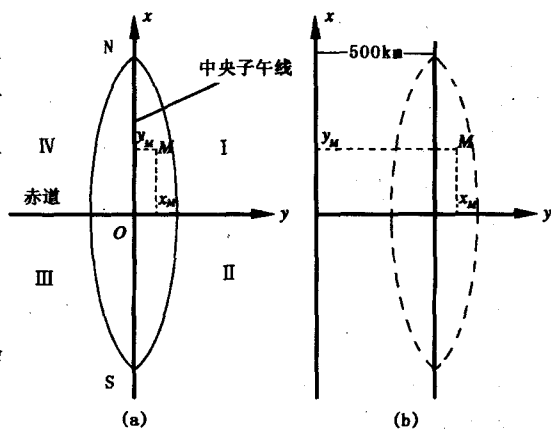


图 1-7 高斯平面直角坐标系

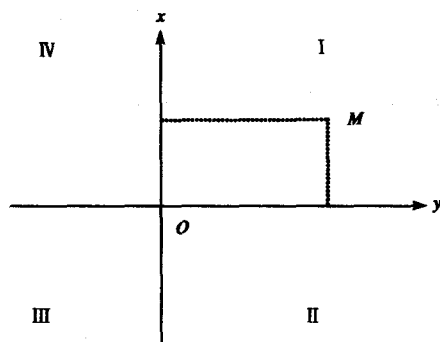


图 1-8 平面直角坐标系

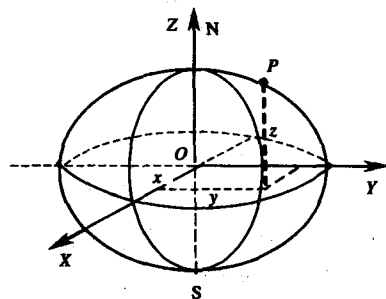


图 1-9 空间直角坐标系

标系,即地心坐标系。地心坐标系属空间直角坐标系。如图 1-9 所示,坐标原点在地球椭球的中心 O ,用相互垂直的 X,Y,Z 三个轴表示,起始子午面与赤道面交线为 X 轴,赤道面内与 X 轴正交的方向为 Y 轴,椭球体的旋转轴为 Z 轴,其指向符合右手规则。地面点 P 的空间位置用三维直角坐标 x,y,z 来表示。GPS(Globe Positioning System)所采用的 WGS-84 坐标系采用协议椭球,其坐标原点在地心,是空间直角坐标系的一种。

第四节 地面点的高程

确定地面点的空间需要三个量。除了表示点的平面位置的坐标 (x,y) 外,还需一个空间物理量表示地面点的高低,因此还要确定地面点的高程。

如图 1-10 所示,所谓高程,就是地面上一点到大地水准面的铅垂距离,以 H 表示。由于它是从全国统一的大地水准面起算的,因此又称为绝对高程。如果是从一个假定水准面起算的高程,则称为相对高程,用 H' 表示。地面上两点间高程的差值称为高差,用 h 表示。 A,B 两点的高差为:

$$h_{AB} = H_B - H_A = H'_B - H'_A \quad (1.1)$$

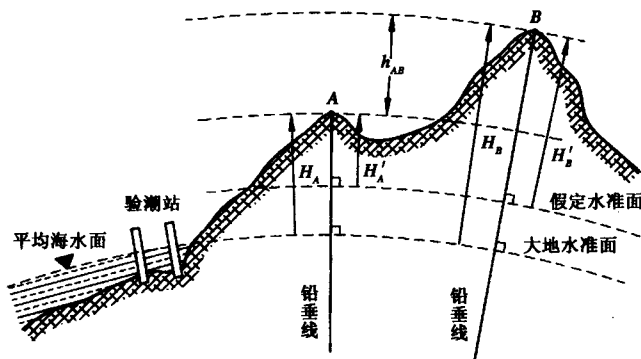


图 1-10 高程与高差

海水面由于受潮汐、风浪等的影响是个动态的曲面,它的高低时刻在变化,通常是在海边设立验潮站,进行长期观测,取海水面的平均高度作为高程零点,通过该高程零点的大地水准面为高程起算面。我国曾采用青岛验潮站 1950—1956 年观测成果推算的黄海平均海水面作为高程零点,称为“1956 年黄海高程系”。自 1987 年起采用青岛验潮站 1953—1979 年观测成果推算的黄海平均海水面作为高程零点,称为“1985 国家高程基准”,由此算得的青岛国家水准原点高程为 72.260m。

第五节 地球曲率对水平距离和高差的影响

如前所述,当测区面积较小时,地面点在投影面上的坐标可以用平面直角坐标系来表示,即可用平面代替曲面。那么,在测量工作中,用水平面代替水准面的限度是多少呢?

一、地球曲率对水平距离的影响

当测区面积较小时,可不考虑地球曲率而将地面当做平面看待。如图 1-11 所示,地面上中心 A 点在球面上的投影为 a。今设球面大地水准面与切平面在 a 点相切,则 A, B 两点在球面上的投影长度为 d,在切平面上投影的水平距离为 t,其差值为:

$$\Delta d = t - d = R \tan \theta - R \theta = R(\tan \theta - \theta) \quad (1.2)$$

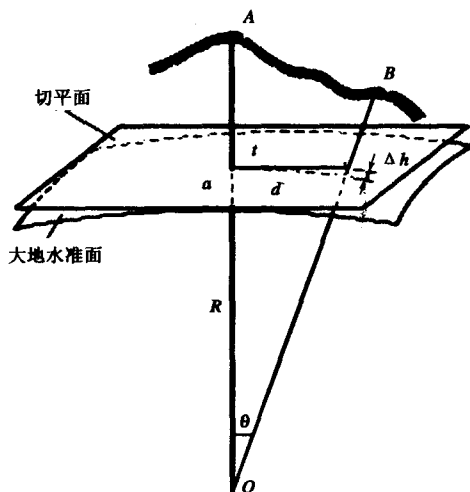


图 1-11 水平面代替水准面的影响

用三角级数公式展开后取主项可得:

$$\Delta d = R \left[\left(\theta + \frac{\theta^3}{3} \right) - \theta \right] = \frac{R\theta^3}{3} \quad (1.3)$$

因 $\theta = \frac{d}{R}$

则 $\Delta d = \frac{d^3}{3R^2} \quad (1.4)$

或 $\frac{\Delta d}{d} = \frac{d^2}{3R^2} \quad (1.5)$