高职高专“十一五”规划教材
GAOZHI GAOZHUAN SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

高等数学

俎冠兴 主编 齐金菊 主审

GAODENG SHUXUE

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

高 等 数 学

组冠兴　主编
王　峥　王凌云　副主编
齐金菊　主审

化学工业出版社
·北京·

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在充分研究当前中国高职高专大众化发展趋势下的教育现状，认真总结、分析高职高专院校高等数学教学改革的经验，在“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则指导下完成的.

本书从概念的引入、内容的选择、例题和数学模型的求解都考虑到了技能型人才培养的要求. 与目前高职高专学生的实际水平相衔接.

全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分及其应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、拉普拉斯变换、线性代数和概率论. 书后附有习题答案. 本书采用模块化设计，适应不同专业选用.

与本书配套的辅助教材有《高等数学训练教程》.

本书可作为高职高专各专业教材，也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/俎冠兴主编. —北京：化学工业出版社，2007.4

高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-122-00263-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 俎… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 055517 号

责任编辑：高 钰　　　文字编辑：王 琪

责任校对：洪雅姝　　　装帧设计：潘 峰

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm 1/16 印张 20 字数 532 千字 2007 年 7 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换.

定　　价：35.00 元

版权所有 违者必究

前　言

高等数学是高职高专院校各专业必修的一门重要的公共基础课. 它不仅是学生学习后续专业课程的基础和工具，也对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学知识解决实际问题的能力都有着非常重要的作用. 为适应中国职业技术教育发展的需要，本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在充分研究当前中国高职高专大众化发展趋势下的教育现状，认真总结、分析高职高专院校高等数学教学改革的经验，在“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则指导下完成的.

本教材以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，以“必需、够用”为指导原则. 理论描述精确简约，具体讲解明晰易懂. 很好地兼顾了高职各专业后续课程教学对高等数学知识的要求，同时也充分考虑了学生可持续发展的需要. 全书内容包括函数极限与连续、导数与微分及其应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、拉氏变换、线性代数和概率论. 书后附有习题答案.

本教材在编写过程中，突出了以下特点：

(1) 淡化抽象的数学概念，突出数学概念与实际问题的联系；

(2) 淡化抽象的逻辑推理，充分利用几何说明，使学生能够比较直观地建立起有关的概念和理论；

(3) 充分考虑了高职学生的数学基础，较好地处理了初等数学与高等数学的衔接，突出应用；

(4) 每节配有思考题和练习题，便于学生理解、巩固基础知识，提高基本技能，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力；

(5) 优选了部分应用实例，可供不同专业选择使用；

(6) 全书采用模块化设计，可根据不同的专业进行选讲；

(7) 难度大的练习题和习题在配套的《高等数学训练教程》上有详细解答.

本教材的参考学时为 80～128，标有“*”号的内容可根据专业选学.

本书可作为高等职业院校、高等专科院校、成人高校等相关专业高等数学教材，也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材.

本书由俎冠兴主编，齐金菊主审，王峥、王凌云任副主编，参加编写的还有顾越昆、高群、崔若青、石勇、李兆斌、梁靓.

在编写过程中，得到了编、审老师所在院校的大力支持和协助，在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中不当之处恳请专家指正.

编者

2007 年 2 月

目　　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　函数、极限与连续

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，它是微积分研究的基本对象，是高等数学的重要概念之一．研究的基本方法是极限方法．本章在复习和加深函数有关知识的基础上，学习函数的极限和函数的连续性．

第一节　函　　数

一、函数的概念

1．引例

在同一个事物的变化过程中，往往同时有几个变量在变化着．这几个变量并不是孤立地在变，而是按照一定的规律相互联系着，其中一个量变化时，另外的量也随之变化．观察下面的几个例子．

引例 1　自由落体运动的位移与时间的关系为

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

其中，g 是重力加速度．当时间 t 在允许的范围内给定一个数值时，按上式位移 h 就有唯一确定的数值与其对应．

引例 2　某股票某天的走势图（图 1-1）．

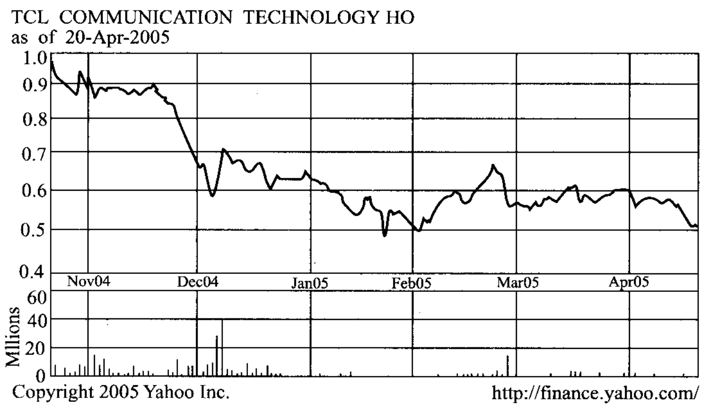

图 1-1

从走势可以看出这只股票当天的价格随时间的变化情况．

引例 3　某单位 2006 年每个月的产量见表 1-1．

表 1-1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1050	1030	1100	1070	1130	1100	1150	1190	1260	1190	1300	1380

从表中可以很直观地看到该单位产量随月份的变化情况．

2. 函数定义

以上三个引例的实际意义和表达形式虽然都不相同，但却有共同之处：每个例子所描述的变化过程都有两个变量，当其中的一个变量在一定的变化范围内取定一数值时，按照某个确定的法则，另一个变量有唯一确定的数值与之对应．变量之间的这种对应关系就是函数概念的本质．

定义 1.1 设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，D 是一个数集．若对于每一个 $x\in D$，按照某一对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的值与之对应，则称 y 是定义在数集 D 上 x 的函数．x 称为自变量，y 称为因变量，也常常称 y 为 x 的函数，记作 $y=f(x)$．数集 D 称为函数的定义域．

若对于确定的 $x_0\in D$，通过对应关系 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=y|_{x=x_0}=f(x_0)$$

函数值的集合称为函数的值域，记作 M，即

$$M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

3. 函数的两个要素

函数定义域 D 和对应关系 f 唯一确定函数 $y=f(x)$，故定义域和对应关系称为函数的两个要素．如果函数的两个要素相同，那么它们就是相同的函数，否则就是不同的函数．

函数 $y=f(x)$ 的对应法则 f 也可用 φ、h、g、F 等表示，相应的函数就记作 $\varphi(x)$，$h(x)$，$g(x)$，$F(x)$．

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的．对于解析式表达的函数，其定义域为使解析式有意义的一切实数值．

【例 1.1】 已知 $f(x)=-2x+1$，求 $f(-1)$，$f(a)$，$f\left(\frac{1}{a}\right)$和 $f(-x)$．

解

$$f(-1)=-2\times(-1)+1=3$$

$$f(a)=-2a+1$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=-2\times\frac{1}{a}+1=-\frac{2}{a}+1$$

$$f(-x)=-2\times(-x)+1=2x+1$$

【例 1.2】 设 $f(x-1)=x^2-3x+5$，求 $f(x)$．

解法 1 （代入法）令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，则

$$f(t)=(t+1)^2-3(t+1)+5=t^2-t+3$$

所以

$$f(x)=x^2-x+3$$

解法 2 （还原法）

$$f(x-1)=x^2-3x+5=(x-1)^2-(x-1)+3$$

所以

$$f(x)=x^2-x+3$$

【例 1.3】 求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$的定义域．

解 由所给函数知，要使函数有定义，必须

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$$\begin{cases} \sqrt{3-x^2} \neq 0 \\ 3-x^2>0 \\ \left|\dfrac{x}{2}-1\right| \leqslant 1 \end{cases}$$

即

$$0 \leqslant x < \sqrt{3}$$

因此，所给函数的定义域为 $[0, \sqrt{3})$.

【例 1.4】 试讨论下列各组函数是否为相同函数.

(1) $y=1$ 与 $y=\dfrac{x}{x}$；

(2) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

(3) $y=\ln 3x$ 与 $y=\ln 3\ln x$.

解 (1) 函数 $y=1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，而函数 $y=\dfrac{x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，故不是同一函数.

(2) 两个函数的定义域和对应法则都相同，故是相同函数.

(3) 两个函数的定义域都是 $(0, +\infty)$，但对应法则不一致，所以不是相同的函数.

4. 函数的表示法

函数的表示方法有：解析法、图像法和表格法等. 如引例 1、引例 2 和引例 3.

5. 反函数

函数 $y=f(x)$ 反映了两个变量之间的关系，当自变量 x 在定义域 D 内取定一个值后，因变量 y 的值也随之唯一确定. 但是，这种因果关系并不是绝对的. 例如，在自由落体运动中，如果已知物体下落时间 t，而要求出下落高度 h，则有公式 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$ $(t\geqslant 0)$. 也常常考虑反过来的问题：已知下落高度 h，要求出下落时间 t. 这时可从上式解得 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ $(h\geqslant 0)$. 在数学上，如果把一个函数中的自变量和因变量进行对换后能得到新的函数，就把这个新函数称为原来函数的反函数. 严格地说如下.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的一个函数，其值域为 M. 如果对每一个数值 $y\in M$，有唯一确定的且满足 $y=f(x)$ 的数值 $x(x\in D)$ 与之对应，其对应法则 f^{-1}，那么定义在 M 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数.

由于习惯用 x 表示自变量而用 y 表示函数，因此常常将 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$. 例如 $y=\sin x$ 与 $y=\arcsin x$ 互为反函数.

如果把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一平面直角坐标系内，那么它们的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-2).

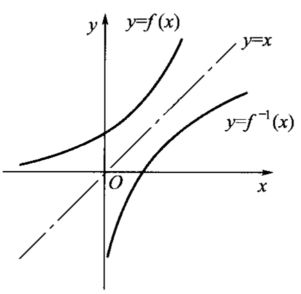

图 1-2

二、函数的几种特性

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 内有定义.

1. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间，若对于每一个 $x\in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图像关于原点对称（图 1-3），偶函数的图像关于 y 轴对称（图 1-4）.

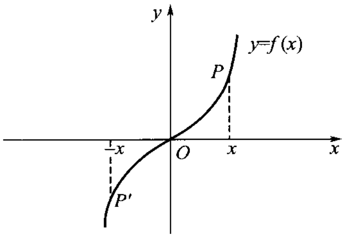

图 1-3

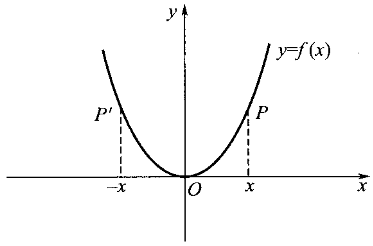

图 1-4

例如，函数 $y=x^2$，$y=\cos x$ 等为偶函数；函数 $y=\sin x$，$y=x^3$ 等为奇函数；函数 $y=e^x+x$ 既不是奇函数，也不是偶函数，称它为非奇非偶函数.

2. 单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

单调增加的函数其图像是自左向右上升的（图 1-5）；单调减少的函数其图像是自左向右下降的（图 1-6）.

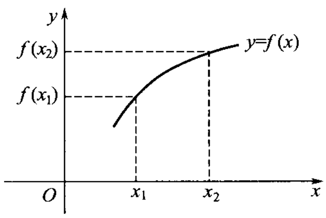

图 1-5

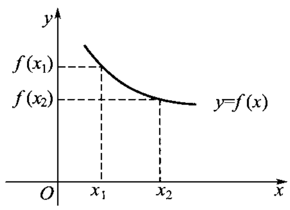

图 1-6

例如，函数 $y=e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的；函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调减少的；函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的.

3. 周期性

设存在常数 $l\neq 0$，使得对于任意的 $x\in I$，有 $x+l\in I$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数. 通常称使得公式成立的最小正数 l 为函数 $f(x)$ 的周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

4. 有界性

若存在正数 M，使得在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界，否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

例如，函数 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上无界，但在 $(2, 4)$ 上就有界.

三、分段函数

在公式法表示的函数中，常常会碰到一种特殊且重要的函数——分段函数. 就是在同一函数的定义域内不同区间上用不同的解析式表示的函数.

【例 1.5】　绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

它的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，值域是 $[0,\ +\infty)$（图 1-7）.

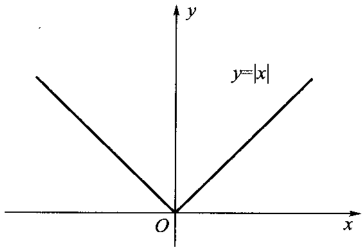

图 1-7

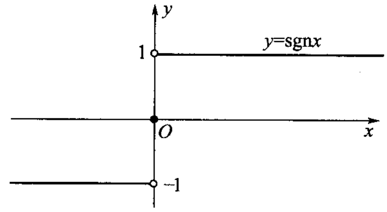

图 1-8

【例 1.6】　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

是分段函数，定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，值域是 $\{-1,\ 0,\ 1\}$（图 1-8）.

【例 1.7】　设 x 为任一实数，则函数

$$f(x)=[x]$$

称为取整函数，它的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，值域是整数集 Z（图 1-9）.

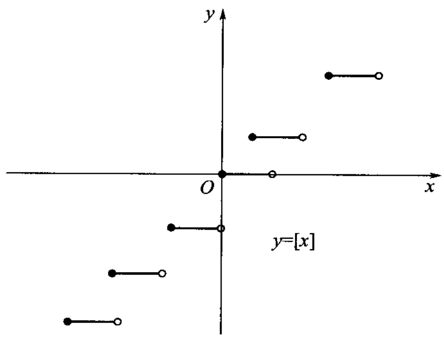

图 1-9

四、复合函数、初等函数

1. 复合函数

设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1+x^2$，以 $1+x^2$ 代替第一式中的 u 得

$$y=\sqrt{1+x^2}$$

说函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1+x^2$ 复合而成的复合函数. 对于这种函数，给出下面的定义.

定义 1.3　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$，那么 y 就叫做 x 的复合函数，其中 u 叫做中间变量.

注意：函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该取在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，否则复合函数失去意义. 例如，复合函数 $y=\ln u$，$u=x+1$. 由于 $y=\ln u$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$，所以中间变量 $u=x+1$ 的值域必须在 $(0,\ +\infty)$ 内，即 x 应在 $(-1,\ +\infty)$ 内.

一个函数也可以由两个以上的函数复合构成.

【例 1.8】　写出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{\tan(2x+1)}$　　(2) $y=e^{\cos\log_2(3x-1)}$

解　(1) $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=2x+1$

(2) $y=e^u$，$u=\cos v$，$v=\log_2 t$，$t=3x-1$

2. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可用一

个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=e^{\sqrt{x}}$，$y=\log_a\sin 2x$，$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$ 等都是初等函数.

注意：由初等函数的概念可知，分段函数不是初等函数，因为分段函数一般都由几个解析式来表示. 在复合函数的分解中，每个函数应是基本初等函数形式或是基本初等函数及常数的四则运算式形式.

五、函数模型

数学模型，从广义理解，一切数学概念、数学理论体系、数学公式、方程式和算法系统都可称为数学模型. 从狭义理解，只有那些反映特定问题的数学结构才称为数学模型，即数学模型可以描述为，对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定的目的，根据特有的内在规律，作出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构.

数学是从现实世界中发现问题、研究问题和解决问题中发展起来的. 函数模型是数学模型的一种，是一种涉及的变量较少、关系较为简单的数学模型. 所说的函数模型一般只涉及两个变量.

在解决实际问题时，通常要先建立问题的函数模型，也就是所说的建立函数关系式. 然后进行分析和计算.

【例 1.9】 要建造一个容积为 V 的长方体水池，它的底为正方形. 如果池底的单位面积造价为侧面积造价的 3 倍，试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

解 底面边长为 x，总造价为 y，侧面单位造价为 a. 由已知条件可得池深为$\frac{V}{x^2}$，侧面积为 $4x\,\frac{V}{x^2}=\frac{4V}{x}$，从而得出

$$y=3ax^2+4a\,\frac{V}{x}\ (0<x<+\infty)$$

【例 1.10】 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 以内，每吨公里为 k 元；超过 a 时，超过部分为每吨公里$\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解 根据题意可列出函数关系如下：

$$m=\begin{cases} ks & 0<s\leqslant a \\ ka+\frac{4}{5}k(s-a) & s>a \end{cases}$$

思考题 1.1

1. 函数的两个要素是什么？
2. 函数 $y=x+1$ 和 $x=y-1$ 是不是同一个函数？
3. 分段函数都不是初等函数吗？
4. 函数有几种特性？分别举例说明.
5. 举例说明不是所有的函数都能构成复合函数.

练习题 1.1

1. 下列函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一个函数，说明理由：

(1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$与 $g(x)=x+1$；

(2) $f(x)=\sqrt{(x-2)^2}$ 与 $g(x)=|2-x|$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\geqslant 0\\ x^2+1 & x<0\end{cases}$，求 $f(0)$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

3. 设 $f(x+2)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$.

4. 求函数 $y=3x+2$ 的反函数.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\arccos\dfrac{x-1}{3}$　　(2) $y=\sqrt{\ln\dfrac{2x-x^2}{2}}$

(3) $y=\sqrt{9-x^2}-\lg\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$

6. 将 $y=|2x-1|-\sqrt{(x-1)^2}$ 用分段函数表示，并作出函数图像.

7. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$　　(2) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(3) $y=x\sin(x+1)$

8. 写出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\cot\left(\sqrt{4x^5+3x-1}\right)$　　(2) $y=\ln^3\sin^2(x^2+1)$

9. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒，将它的全面积表示成底半径的函数.

10. 旅客乘坐火车时，可免费随身携带不超过 20kg 的物品，超过 20kg 的部分，收费 0.20 元/kg，超过 50kg 部分再加收 50%. 试建立收费与物品质（重）量的函数关系.

第二节 极　　限

极限是高等数学的重要概念之一，是研究自变量在某一变化过程中函数的变化趋势. 高等数学中的导数、积分、级数等概念都是基于极限而定义或与之密切相关. 因此，学习和掌握极限概念与计算方法是十分重要的. 本节主要研究数列极限、函数极限及函数左右极限的概念，介绍极限的运算法则.

一、数列的极限

在初等数学中，大家都学习过数列. 现在从函数的角度可以认为数列是一种特殊的函数. 数列 $\{x_n\}$ 可以理解为正整数 n 为自变量的函数，从而可以写成

$$x_n=f(n)\ (n=1,2,3,\cdots)$$

因此又可以称数列为整标函数. 其定义域为正整数集.

数列极限的思想早在古代就已萌生. 中国《庄子》一书中著名的“一尺之捶，日取其半，万世不竭”；刘徽的“割圆术”用圆内接多边形的面积去逼近圆面积等，都是极限思想的萌芽.

数列的极限，就是要讨论当 n 无限增大（即 $n\to\infty$）时，考察数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，它是否能够无限接近于一个定值，这个定值等于多少？

引例 1　考察下面几个数列：

(1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$

(2) $2,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots$

(3) $\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{2\pi}{2},\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \cdots,\ \sin\frac{n\pi}{2},\ \cdots$

观察上述两个数列可以发现，当 n 无限增大（即 $n\to\infty$）时，数列 (1) 的各项呈现出确

定的变化趋势，即无限趋近于常数 0，数列（2）的奇数项从大于 1 的方向无限趋近于常数 1，偶数项从小于 1 的方向无限趋近于常数 1，数列（3）在 1、0 和 -1 三个数中变动，不趋近于某个常数.

定义 1.4 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，如果当 n 无限增大（即 $n\to\infty$）时，x_n 无限接近于某个确定的常数 A，则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty)$$

定义 1.4 中的含义是：当 n 充分大时，x_n 与 A 的差的绝对值 $|x_n-A|$ 可以任意小，数列的这种变化趋势用下面的定义给予精确的数量描述.

定义 1.5 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，对于任意给定的正数 ε，总有自然数 N 存在，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

总成立，则称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n\to A\ (n\to\infty)$$

定义中的“当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 总成立”这句话，从几何的观点看就是：第 N 项以后的一切项将全部落入点 A 的 ε 邻域内.

【例 1.11】 观察下列数列的极限：

（1）$x_n=q^{n-1}$ （$|q|<1$）；（2）$x_n=2n$；

（3）$x_n=C$.

解 观察数列在 $n\to\infty$ 时的变化趋势得

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1}=0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} 2n$ 不存在；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} C=C$.

通过上例可以知道，不是所有的数列都有极限的. 常数数列的极限等于其本身.

二、函数的极限

1. 函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限

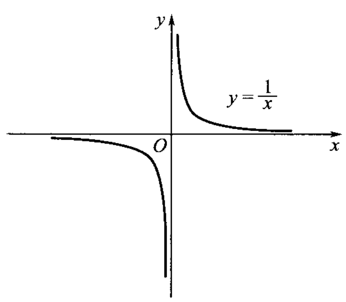

图 1-10

对于函数 $y=f(x)$，函数 y 随着自变量 x 的变化而变化. $x\to\infty$ 表示 $|x|$ 无限增大. 当 $x>0$ 且无限增大时，记作 $x\to+\infty$；当 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大时，记作 $x\to-\infty$.

引例 2 考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.

如图 1-10 所示，当 $x\to\infty$（包括 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时，函数趋向于确定的常数 0. 即函数图形无限接近于直线 $y=0$（x 轴）.

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于确定的常数 A，则称 A 为 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

若只当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数趋近于确定的常数 A，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com