大学经济数学教材

线性代数同步辅导

XIANXINGDAISHUTONGBUFUDAO

主编◎运怀立

中国人民大学出版社

大学经济数学教材

线性代数同步辅导

XIANXINGDAISHUTONGBUFUDAO

主　编　运怀立

副主编　王友雨　黄宜平

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数同步辅导/运怀立主编.
北京：中国人民大学出版社，2007
大学经济数学教材
ISBN 978-7-300-08492-3

Ⅰ. 线…
Ⅱ. 运…
Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 136568 号

大学经济数学教材
线性代数同步辅导
运怀立　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东方圣雅印刷有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2007 年 10 月第 1 版
印　　张	14.5 插页 1	**印　　次**	2007 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	266 000	**定　　价**	19.00 元

前　言

在多年的教学中，我们遇到的一个普遍现象是大多数学生都感到线性代数比较难学，在解题时不能正确地进行思考或不能运用适当的数学语言来表达自己的思想。本书是编者在积累多年学习指导经验的基础上，为解决这方面的问题而做的一些尝试和努力的体现。

首先，我们对核心问题进行了高度的概括。具体表现为每一章都设计了内容提要，其中既包含理论知识又包含解题技能和方法。在编写本书的过程中，我们对内容和习题做了精心筛选，使本书显得充实而又不失简洁。本书分为六章，即行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值和特征向量、二次型。每一章的内容都具有鲜明的代表性与具体的针对性，希望这些工作能对本书的读者有所裨益。

其次，我们重点分析了解题中的思维定向。对于解法的择舍过程给予了直观、通俗的分析，以便帮助读者尽快领会问题的核心；对于容易引起混淆的概念和方法进行了全面的比较，使读者能够顺利地排除干扰；对于具有广泛应用价值的方法进行了深入的分析和思考，以求举一反三。

最后，在同步辅导中，习题的安排尽可能与认知结构的发展过程相切合。本书注重对线性代数解题核心能力的训练，创设了多种情景，自编了一些习题，并编写了相应的检测题。

编写本书时，我们引用了有关书籍的一些例子，恕不一一指明出处，在此谨向有关作者致谢。

本书第 1 章由黄宜平老师编写；第 2 章由运怀立老师编写；第 3 章由姜铭玖老师编写；第 4 章由王友雨老师编写；第 5 章由谌雪莺老师编写；第 6 章由于美芳老师编写。

对于书中不足之处，诚恳地希望广大同仁、读者批评指正。

编者

2007 年 6 月

目　　录

第 1 章　行 列 式

行列式是线性代数中的一个基本概念，它不仅是讨论线性方程组理论的有力工具，而且在求逆矩阵、求矩阵的秩、判断向量组的线性相关性以及求矩阵的特征值、判断二次型的正定与负定等方面都要用到.

一、内容提要

1. 排列及其性质

(1) 由 1，2，…，n 这 n 个数构成的一个有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为一个 **n 元排列**. 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，就称这两个数构成一个**逆序**. 一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，记为 $N(j_1j_2\cdots j_n)$. 逆序数是奇(偶)数的排列称为**奇(偶)排列**. 如果只交换排列中某两个数的位置而其余的数不动，就得到一个新的排列，这一交换称为**对换**.

(2) n 元排列共有 $n!$ 个，其中奇、偶排列的个数各占 $\dfrac{n!}{2}$.

(3) 对换改变排列的奇偶性，即偶(奇) 排列经过一次对换变成奇(偶) 排列.

(4) 任一 n 元排列 $j_1\,j_2\cdots j_n$ 与标准排列 $1\ 2\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，且所作对换次数与排列 $j_1\,j_2\cdots j_n$ 有相同的奇偶性.

2. 行列式的定义

n 阶行列式用符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示，它代表 $n!$ 项的代数和，这些项是取自 D 中不同行不同列的一切可能的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$，即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶(奇)排列时，该项的符号为正(负)，也就是说

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和.

特别地，对于二阶行列式与三阶行列式，可以采用对角线法则来计算它们代表的数：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\Delta} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\Delta} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注 (ⅰ)计算三阶以上的行列式不能采用对角线法则；

(ⅱ)n 阶行列式也简写为 $D=|a_{ij}|$.

3. 行列式的性质

性质 1 行与列互换，行列式的值不变.

性质 2 交换两行(列)的位置，行列式的值变号.

推论 两行(列)对应元素相同，行列式的值为零.

性质 3 某行(列)的公因子可以提到行列式外.

推论 1 一行(列)元素均为零，行列式的值为零.

推论 2 两行(列)对应元素成比例，行列式的值为零.

性质 4 如果某行(列)的所有元素都可以写成两个数的和，则该行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式相应行(列)的元素分别为对应的两个加数之一，其余各行(列)元素与原行列式相同.

性质 5 某行(列)的倍数加到另一行(列)，行列式的值不变.

注 做题时为描述方便，引入下列记号：

① $[i,j]$ 表示交换第 i 行(列)与第 j 行(列)的位置；

② $k[i]$ 表示第 i 行(列)乘以常数 k；

③ $[j]+k[i]$ 表示第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列).
其中记号标在“=”或“→”上方表示行变换，标在其下方表示列变换.

4. 一些特殊行列式的值

(1) 上(下)三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \boldsymbol{O} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \boldsymbol{O} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 次三角行列式的值等于添加适当正、负号的次对角线元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯(Laplace)展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} & \\ \vdots \quad\ \vdots & * \\ a_{n1}\cdots a_{nn} & \\ & b_{11}\cdots b_{1m} \\ \boldsymbol{O} & \vdots \quad\ \vdots \\ & b_{m1}\cdots b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} & \\ \vdots \quad\ \vdots & \boldsymbol{O} \\ a_{n1}\cdots a_{nn} & \\ & b_{11}\cdots b_{1m} \\ * & \vdots \quad\ \vdots \\ & b_{m1}\cdots b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\ \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}\cdots b_{1m} \\ \vdots \quad\ \vdots \\ b_{m1}\cdots b_{mm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} & a_{11}\cdots a_{1n} \\ * & \vdots \quad\ \vdots \\ & a_{n1}\cdots a_{nn} \\ b_{11}\cdots b_{1m} & \\ \vdots \quad\ \vdots & \boldsymbol{O} \\ b_{m1}\cdots b_{mm} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & a_{11}\cdots a_{1n} \\ \boldsymbol{O} & \vdots \quad\ \vdots \\ & a_{n1}\cdots a_{nn} \\ b_{11}\cdots b_{1m} & \\ \vdots \quad\ \vdots & * \\ b_{m1}\cdots b_{mm} & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}\cdots b_{1m} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{m1}\cdots b_{mm}\end{vmatrix}.$$

(4) 奇数阶反对称行列式的值为零，即

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (n\text{ 为奇数}).$$

(5) 范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

5. 行列式按一行(列)展开

(1) 在 n 阶行列式中，将元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列的元素划去后剩下的元素按原位置次序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

而 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

注 元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式与 a_{ij} 的大小无关，只与该元素的位置有关.

(2) 行列式的值等于它的某一行(列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

(3) n 阶行列式中某一行(列) 的每个元素与另一行(列) 相应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j);$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

6. 克莱姆(Cramer) 法则

(1) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组有唯一解

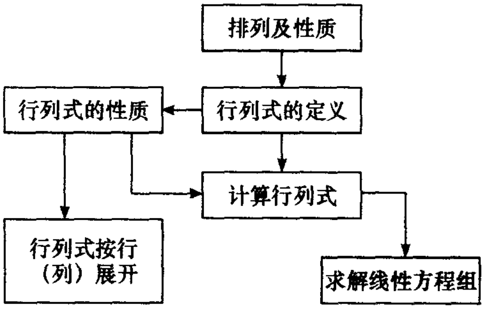
$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中，D_j是把 D 中第 j 列换成方程组的常数项 b_1，b_2，…，b_n所成的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

(2) 含 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组如果有非零解，则其系数行列式等于零(由第 3 章知，反之也成立).

二、知识网络图



三、重点、难点解读

运用行列式的性质和按行(列)展开定理计算行列式是本章的重点.本章要求读者熟练正确地计算低阶行列式，也要会计算一些特殊形式的 n 阶行列式.

掌握行列式的计算方法和技巧是本章的难点.除了利用行列式的性质化为三角行列式和按行(列)展开公式使行列式降阶这些常用的手法外，还要根据行列式不同的特点采用特殊的方法，如递推法、数学归纳法、加边法(升阶法)，以及利用范德蒙行列式的结论，等等.

四、典型例题解析

例 1.1 已知 n 元排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 I，求 n 元排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数.

解 *方法一* 在 n 元排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 及 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中考察同一对数 x_k 与 x_j，它们在这两个排列中，一为顺序，一为逆序，即这一对数在这两个排列中的逆序数之和为1.而一个 n 级排列中，一共有 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 对不同的数，在题设两个排列中，这些数对的逆序数之总和是 $\frac{1}{2}n(n-1)$.已知排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆

序数为 I，则后一个排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为 $\frac{1}{2}n(n-1)-I$.

方法二　如果在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中关于 x_1 有 p_1 个逆序，则有 $(n-1)-p_1$ 个顺序；如果关于 x_2（去掉 x_1 不顾）有 p_2 个逆序，则有 $(n-2)-p_2$ 个顺序；以此类推，对于 x_i，有 p_i 个逆序，$(n-i)-p_i$ 个顺序. 又 $p_1+p_2+\cdots+p_n=I$，所以排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}&(n-1)-p_1+(n-2)-p_2+\cdots+(n-n)-p_n\\=&(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0-I\\=&\frac{1}{2}n(n-1)-I.\end{aligned}$$

方法三　在一个 n 元排列中，比自然数 i 大的数有 $n-i$ 个，所以在题设的两个排列中，由 i 产生的逆序数之和为 $(n-i)$. 这样，两个排列的逆序总和为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$，故得知后一个排列的逆序数为 $\frac{1}{2}n(n-1)-I$.

方法四　注意在 n 元排列中比 x_i 大的数有 $n-i$ 个. 设 x_i 在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中的逆序数为 $\varphi(x_i)$，则此排列的逆序数为 $N(x_1x_2\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)$. 同时，在排列 $x_n\cdots x_2x_1$ 中，x_i 的逆序数记为 $\varphi^{-1}(x_i)$，则 $\varphi^{-1}(x_i)=(n-i)-\varphi(x_i)$. 所以，后一个排列的逆序数为

$$\begin{aligned}N(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)&=\sum_{i=1}^{n}\varphi^{-1}(x_i)=\sum_{i=1}^{n}(n-i)-\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\\&=\frac{1}{2}n(n-1)-N(x_1x_2\cdots x_n)=\frac{1}{2}n(n-1)-I.\end{aligned}$$

例 1.2　证明 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的所有全排列中，奇偶排列各占一半.

证明　*方法一*　因为 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=0.$$

于是，根据行列式定义有

$$D_n=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}=0,$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的某一个排列. 该和式中共有 $n!$ 项，且每项的绝对值都是1. 所以上面和式中1和-1的个数相等，均为 $\frac{n!}{2}$ 个. 这说明 $1,2,\cdots,n$ 的所有全排列中，奇偶排列各占一半.

方法二 设 n 元奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个. 对这 p 个奇排列都做1与2的对换，则会得到各不相同的 p 个偶排列，所以 $p\leqslant q$. 同理可知 $q\leqslant p$，从而必有 $p=q=\frac{n!}{2}$.

例 1.3 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$，$x_i\neq a_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

解 *方法一*

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{[i]+[1]\times(-1)} \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \quad (\text{I})$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a_1} & \frac{a_2}{x_2-a_2} & \frac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{[1]+[i]} \prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k-a_k} & \frac{a_2}{x_2-a_2} & \cdots & \frac{a_n}{x_n-a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k-a_k}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i).$$

方法二

$$D_n \xlongequal{\text{加边}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{[i]+[1]\times(-1)} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & x_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \qquad (\text{Ⅱ})$$

$$=\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k-a_k}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i).$$

注 行列式(Ⅰ)、(Ⅱ)称为爪形(或箭形)行列式，可简单地用符号“$\left|\nwarrow\right|$”代替.其他爪形行列式还有:“$\left|\searrow\right|$”,“$\left|\nearrow\right|$”,“$\left|\swarrow\right|$”，均可仿例1.3求出其值.

例1.4 计算n阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式中，每行元素的和均相等，因此可把第2，…，n列加到第1列上去.

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{[1]+[i]} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{[i]+[1]\times(-1)} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

例 1.5 计算 n 阶行列式 $D_n = |a_{ij}|$，其中 $a_{ij} = |i-j|$.

解 方法一 由 $a_{ij} = |i-j|$ 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

自 D_n的第 1 行起减去后一行，得其主对角线上方全是 1 的 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

从第 2 列开始，每列都加上第 1 列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & \cdots & n & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

方法二 自第 n 行起，后行减去前行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

从第 1 列至第 $n-1$ 列，每列都加上第 n 列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

方法三 自第 n 列开始，后列减前列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

从第 1 行至第 $n-1$ 行，每行加上第 n 行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2n-3 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$