

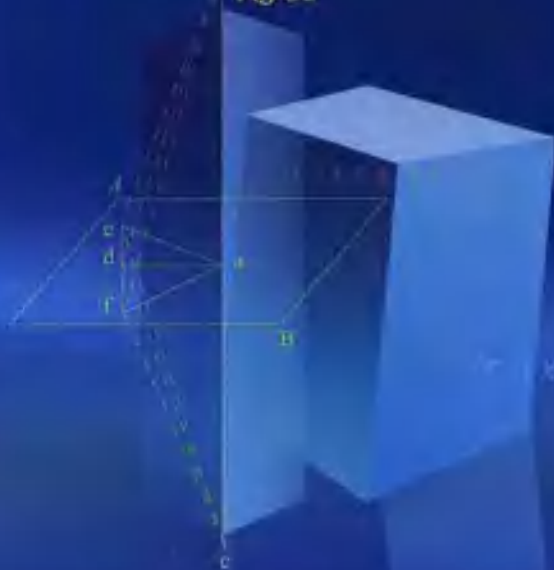


BSK 高考命题研究组

# 超级 数学专题题典 数列

- 紧扣大纲 关注高考
- 学习数学必备的全面工具书

Fig 86



世界图书出版公司



高考命题研究组

# 超级 数学专题题典 数列



世界图书出版公司

上海·西安·北京·广州

## 图书在版编目(CIP)数据

超级数学专题题典——数列/BSK 高考命题研究组编著.

—上海:上海世界图书出版公司,2007.2

ISBN 978-7-5062-5575-2

I. 超... II. B... III. 数列—高中—习题—升学参考资料  
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 153795 号

## 超级数学专题题典——数列

BSK 高考命题研究组

出版发行:上海世界图书出版公司

上海市尚文路 185 号 B 楼 邮政编码 200010

公司电话:021-63783016 转发行科

(各地新华书店经销)

<http://www.wpcsh.com.cn>

印 刷:北京京都六环印刷厂

开 本:880×1230 1/32

印 张:11.375

字 数:350 千字

版 次:2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5575-2/G·63

定 价:12.00 元

如发现印刷质量问题,请与印刷厂联系  
(质检科电话:010-84498871)

# 前 言

参考书和教材不同,它并不是学习中的必需品。然而学习好的同学,大部分都看过至少一本参考书,有个别的,甚至看完了市面上所有的参考书,这是为什么呢?

教材都是自成体系,为了配合大纲和课堂教学,其中很多内容讲述得恰到好处,可以说是提供了一个角度很好的剖面。然而要学好一门学科,必须具备三点:首先是清晰的知识框架,其次是翔实的知识内容,再次是巧妙的方法技巧。要达到这三点,从理论上讲,反复阅读教材并练习教材中的习题是可以做到的,只是需要花费较长的时间去领悟。不过,实际情况往往是限于课时进度,同学们用于学习单一科目的时间本就有限,花费在科目内部的具体知识板块的时间更加寥寥,有没有什么捷径可以走呢?答案是没有。虽然没有捷径,但却有另外一条路可供选择,这就是选择合适的参考书。好的参考书能从各种角度去剖析问题,进过现象看本质;或是补充个别知识点,完善整个知识框架;或是通过纵横向比较,揭示出本来就存在,但教科书却未明示的一些规律;或是汇总前人的经验,揭示出你原本就该知道的一些方法技巧。这套《BSK 高中数学专题》正是本着这样的初衷编写的,一共包括函数、数列、不等式等 12 本。

本套书在编排上体现了以下特点:

## (1) 知识讲解循序渐进

知识点讲解特色突出,全套书中的每一本都分为基础知识和拓展思维两大部分。前一部分针对具体的知识点进行精析细讲,帮助读者牢固扎实地打好知识基础、建立知识体系,使学习、记忆和运用有序化。第二部分“高屋建瓴”,帮助读者在掌握和巩固基础知识的同时,突破难点、提高思维。在力求提高的同时,把握尺度,不出偏题、怪题,使之虽然难度加大,但是并不偏离高考方向。

## (2) 题目搭配合理有序

习题配备由易到难,层层延伸。基础练习题,能力练习题,历届高考题,精选星级题,3 大部分 6 小块,覆盖高中低档各类题型,层层递进,级级延伸,为复习、备考提供丰富的资料储备;题目讲解不拘一解,详尽规范,引导读者去探究“一题多解”、“多题一解”、“一题多变”和“万变归一”的思路与学习方法,使读者真正能够领悟到举一反三、触类旁通的奥妙。

### (3) 框架结构明朗清晰

全书按照内容分布各种知识框架图,为读者学习和探索提供参考路标。

### (4) 成书符合使用习惯

全书采用“知识点讲解”——“对应例题”——“另一个知识点讲解”——“对应例题”的编排模式,更符合授课式的思维习惯。我们还独出心裁地引入了“考频”概念,借助于此知识点在最终高考中所占比例的统计数据来检验自己对这一知识点、这一部分内容,甚至这一类问题的掌握程度,以寻找更合适的复习之道,从而达到优质、有效的复习效果。

### (5) 自成体系一书多用

本套书完全基于教材,但又不拘泥于教材。基于教材是指教材中的知识点,只要是涉及某专题的,基本上都收录进书,并分别成册;不等同于教材是指本套书并未严格按照教材的章节顺序进行编排,而是把本专题相关内容作为一个子体系加以归纳。这样做的好处不但可以让同学们在短时间内掌握此专题内容,而且还脱离了教材变动的局限性,使全国所有中学生均可选用。

对于正在学习高中数学课程的同学,可以使用本书作为课堂内容的预习复习与补充;对于正在紧张复习,即将投入的高考的同学,使用本书也可作为复习的纲要与熟悉各种题型的战场;而对于高中教育的研究者,本书可以提供一部分研究素材。

由于作者时间和水平所限,疏漏之处在所难免,敬请不吝指正。

BSK 高考命题研究组

2006年9月

# 目 录

第一篇 知识篇 .....	1
第一章 数列 .....	2
第一节 第一节 数列的定义和分类 .....	2
高考考点和趋势分析 .....	2
知识点讲解与应用 .....	2
基础练习题 .....	5
高屋建瓴 .....	6
能力练习题 .....	9
第二节 数列的表示法 .....	10
高考考点和趋势分析 .....	10
知识点讲解与应用 .....	10
基础练习题 .....	14
高屋建瓴 .....	14
能力练习题 .....	17
第三节 数列的前 $n$ 项和 .....	18
高考考点和趋势分析 .....	18
知识点讲解与应用 .....	18
基础练习题 .....	22
高屋建瓴 .....	22
能力练习题 .....	24
第二章 等差数列 .....	25
第一节 等差数列 .....	26
高考考点和趋势分析 .....	26
知识点讲解与应用 .....	26
基础练习题 .....	28
高屋建瓴 .....	29
能力练习题 .....	31
第二节 等差数列的前 $n$ 项和 .....	32
高考考点和趋势分析 .....	32
知识点讲解与应用 .....	32
基础练习题 .....	35
高屋建瓴 .....	36
能力练习题 .....	38

第三节 等差数列的性质	38
高考考点和趋势分析	38
知识点讲解与应用	39
基础练习题	42
高屋建瓴	42
能力练习题	46
第三章 等比数列	48
第一节 等比数列	49
高考考点和趋势分析	49
知识点讲解与应用	49
基础练习题	52
高屋建瓴	53
能力练习题	55
第二节 等比数列的前 $n$ 项和	56
高考考点和趋势分析	56
知识点讲解与应用	56
基础练习题	59
高屋建瓴	60
能力练习题	61
第三节 等比数列的性质	62
高考考点和趋势分析	62
知识点讲解与应用	62
基础练习题	66
高屋建瓴	66
能力练习题	70
第四章 数列的极限和数学归纳法	71
第一节 数列的极限	71
高考考点和趋势分析	71
知识点讲解与应用	72
基础练习题	72
高屋建瓴	73
能力练习题	78
第二节 数学归纳法	78
高考考点和趋势分析	78
知识点讲解与应用	78
基础练习题	79
高屋建瓴	80
能力练习题	85

第五章 数列的应用 .....	87
高考考点和趋势分析 .....	87
知识点讲解与应用 .....	87
基础练习题 .....	91
高屋建瓴 .....	92
能力练习题 .....	92
<b>第二篇 真题篇</b> .....	91
考点分析 .....	91
考试要求 .....	94
命题趋向与应试策略 .....	94
真题探究 .....	95
选择题 .....	95
填空题 .....	100
解答证明题 .....	104
<b>第三篇 星级题典</b> .....	120
选择题 .....	120
填空题 .....	126
解答证明题 .....	128
<b>第四篇 参考答案与解析</b> .....	140
知识篇答案解析 .....	140
真题篇答案解析 .....	175
题典篇答案解析 .....	263
<b>附录一 圆锥曲线公式定理大全</b> .....	346
<b>附录二 高中数学公式一览表</b> .....	349



# 第一篇 知识篇

本专题知识结构图

数列 极限 数学归纳法	数列	数列的定义和分类
		数列的表示法
		数列的前 $n$ 项和
	等差数列	等差数列
		等差数列前 $n$ 项和
		等差数列的性质
	等比数列	等比数列
		等比数列前 $n$ 项和
		等比数列的性质
	数列的极限和数学归纳法	数列的极限
数学归纳法		
数列的应用	数列的应用	

数列部分一直以来都是高考命题的重点部分,尤其是对学生的推理能力有着较高的要求.大家可以参考近几年的高考命题,就会发现这几年的试题朝着淡化技巧、注重思想的方向发展,而数列部分恰好非常集中地体现了很多数学思维方法,基础知识不多,但是变化很多是这部分知识的一大特点.而且数列和函数、方程、不等式、解析几何等都有紧密的联系,所以数列综合题通常考查学生创新意识、综合应用数学知识解决问题的能力以及对数学思想方法的掌握程度.

这部分我们的讲解首先对数列和函数的密切联系作了深入而透彻的指点,然后对递推方程这种特殊的高考热点作了方法上的指导,有些部分则通过习题作了更深层的探讨,为大家掌握思想方法提供了指南针.

在学习数列知识的时候应该注意仔细体会方法公式的来源,注意融会贯通,切忌死记公式,注意知识点之间的紧密联系,思考方法的推广,在数学归纳法和极限部分应该注意通式通法.如果能够掌握一般的方法,并且体会到数学思维的逻辑性,那么你的学习就已经取得很大成效了.

# 第一章 数列

## 本章知识结构图

数 列	数列的定义和分类	数列的定义
		数列的分类
		数列和集合的异同点
		数列和函数的异同点
	数列的表示法	数列的表示法
		数列的通项公式
		数列的递推式
		不是每个数列都可以写出通项公式和递推式
		数列的通项公式和递推式的互相转化
	数列的前 $n$ 项和	数列的前 $n$ 项和
		数列的前 $n$ 项和的求法
		数列的前 $n$ 项和与通项公式的关系
		数列的前 $n$ 项和构造的新数列
		深层次理解数列的前 $n$ 项和与通项公式的关系

## 第一节 数列的定义和分类

### 高考考点和趋势分析

在近几年的高考中,主要考查对数列概念的认识和理解水平,一般选择题有 1~2 道.高考试题中关于数列的概念及数列与函数关系的题目还会有,且难度不会太大.

目标 1:理解数列的概念.

目标 2:理解数列和函数的关系,数列其实是一种特殊的函数.

### 知识点讲解与应用

#### 1. 数列的定义(考频 8 次,其中,选择题 3 次,填空题 1 次,解答或证明题 4 次)

按一定规律排列着的一列数叫做数列.数列中的每一个数,叫做数列的项,第一个数就是第一项,第二个数就是第二项,依此类推,第  $n$  个数就是第  $n$  项.

数列也可视为定义域为正整数集  $\mathbf{N}$  的函数  $f(x)$ , 当自变量从 1 开始取值 1, 2, 3, ... 的时候, 对应的函数值  $f(1), f(2), f(3), \dots$  就会形成数列. 也就是说数列其实是一种特殊的函数.

## 2. 数列的分类 (考频 3 次, 其中, 选择题 1 次, 填空题 0 次, 解答或证明题 2 次)

按项数, 数列可分为有穷数列和无穷数列. 数列的项数有限时, 也就是在此数列的某一项后面不再有任何项, 此数列被称为有穷数列; 而数列的项数无限时, 也就是在此数列的任何一项后面都有跟随着的项, 那么此数列被称为无穷数列.

按相邻项的大小关系, 数列可分为常数数列、摆动数列和单调数列. 单调数列又可分为递增数列和递减数列. 一个数列, 如果它的每一项都等于某一个常量, 这个数列叫做常数数列; 如果从第二项起, 有些项大于它的前一项, 有些项小于它的前一项, 这样的数列叫做摆动数列; 如果从第二项起, 每一项都大于它前面的一项 ( $a_{n-1} < a_n$ ), 这样的数列叫做递增数列; 如果从第二项起, 每一项都小于它前面的一项 ( $a_{n-1} > a_n$ ), 这样的数列叫做递减数列. 递增数列和递减数列统称为单调数列. 其中递增数列又被称为单调递增数列, 递减数列又被称为单调递减数列.

**例 1** 利用函数产生数列是构造数列的一个方法. 比如说, 利用  $y = e^x$  可以产生数列  $e^1, e^2, e^3, \dots, e^n, \dots$ , 试分辨这个数列属于那种类型的数列? 数列的类型和函数的类型总是对应的吗?

**分析** 数列是由函数构造而来的, 所以可以利用函数的增减性判断数列的情况, 但反之不然, 解答中有更详细说明.

**解答** 显然, 这是一个递增数列. 由于各项都为正, 且后面一项总是前面一项的  $e$  倍, 所以后面一项大于前面一项, 因此这个数列是单调递增数列. 虽然在这个例子中, 函数是单调递增的, 数列也是单调递增的, 但是根据数列的定义, 我们知道根据函数构造数列的办法构造出的数列类型与函数的类型并不是 1:1 对应的. 数列可以是单调的, 但是函数并不一定单调. 如构造函数  $f(x) = [x] - \{x\}$ , 其中  $[x]$  表示实数  $x$  的整数部分,  $\{x\}$  表示实数  $x$  的小数部分. 在这种情况下, 数列为 1, 2, 3, 1.5, 2.5, 3.5, ... 单调递增, 但是函数在每个  $(n-1, n)$  区间都是单调递减的. 不过函数如果是严格单调的, 那么数列也肯定是严格单调的. 函数  $f(x) = [x] - \{x\}$  的图象如图 1-1-1 所示.

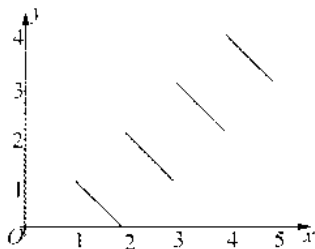


图 1-1-1

**点评** 函数和数列有着紧密的联系, 望读者区分把握.

#### 4 专题题典·高中数学——数列

例2 试构造摆动数列,使得数列趋向无限长的时候,数列趋向于0.

分析 构造数列有时会对解题大有帮助,这也是构造法的应用之一.

解答 首先我们想到数列要趋向于0,那么最普通的形式就是倒数形式: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},$

$\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  但是这种形式的数列不是摆动数列,而是单调递减数列.为了使它

摆动起来,那么我们要在其中插入一些项,这些项必须比上面的数列大一些或者

小一些,这样才能产生摆动的效果,比如我们插入的是: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$

也就是说最后产生的效果是: $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \dots$

这个数列是满足条件的.

实际上,这个数列对应的某个函数图象可能是如图1-1-2的形式.

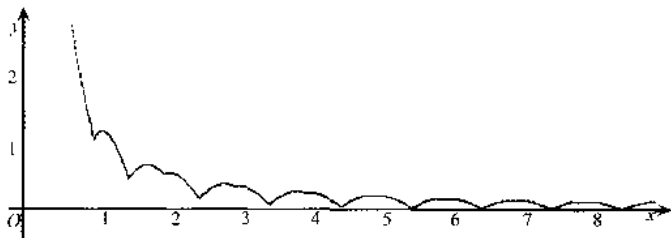


图 1-1-2

点评 注意按照题目要求构造,不要遗漏要求.

例3 填充下表:

数列	名称
3, 3, 3, 3, 3, ...	
	自然数列
2, 4, 6, 8, ...	
	奇数数列
1, 2, 4, 8, ...	
	平方数列
1, 8, 27, 64, ...	
1, -1, 1, -1, ...	

分析 要善于观察数列变化的特点,找到规律.

解答 如下表所示:

数列	名称
3,3,3,3,3,...	常数数列
1,2,3,4,...	自然数列
2,4,6,8,...	偶数数列
1,3,5,7,...	奇数数列
1,2,4,8,...	2的指数数列
1,4,9,16,...	平方数列
1,8,27,64,...	立方数列
1, -1, 1, -1, ...	-1的指数数列

**点评** 考题中经常需要对于数列的通项进行猜测,再利用归纳法证明,所以常练习一些类似的简单题目对于学习数列有很大好处.

**例4** 仔细观察数列给出部分的数字,寻找规律,在空白处填上合适的数字.

- (1) 2, 3, 5, 8, \_\_\_\_\_, 21;  
 (2) 8, \_\_\_\_\_, 14, 17, 20, 23;  
 (3) 2, 4, 8, 16, \_\_\_\_\_, 64;  
 (4) 2, 3, 5, 9, 17, \_\_\_\_\_, 65;  
 (5) 570, 285, 57, 19, \_\_\_\_\_.

**分析** 这其实属于不完全归纳法,需要敏锐的观察力.

**解答** 利用不完全归纳法分别解出:

- (1) 13, 每个数均为前两个数之和;  
 (2) 11, 每个数均为前一个数加上3;  
 (3) 32, 每个数均为前一个数的2倍;  
 (4) 33, 每个数均为前一个数的2倍再减去1;  
 (5) 1, 每个数均为前一个数的不等于它自身的最大约数.

**点评** 很好的练习找规律的题目,读者注意积累相关的经验,当然如果类似题目见得多了自然就会加快解题速度.

### 基础练习题

1. 已知数列  $1, a + a^2, a^2 + a^3 + a^4, a^5 + a^4 + a^3 + a^2, \dots$ , 则数列的第  $k$  项是\_\_\_\_\_.
- A.  $a^k + a^{k+1} + a^{k+2} + \dots + a^{2k}$   
 B.  $a^{k-1} + a^k + a^{k+1} + \dots + a^{2k-1}$   
 C.  $a^{k-1} + a^k + a^{k+1} + \dots + a^{2k}$   
 D.  $a^{k-1} + a^k + a^{k+1} + \dots + a^{2k-2}$
2. 下列结论:① 数列就是数的集合;② 任何数列都有首项和末项;③ 项数无限的数列是无穷数列;④ 前若干项相同的两个数列必相同,其中正确的序号是\_\_\_\_\_.

## 6 专题题典·高中数学——数列

A. ①③

B. ③④

C. ②④

D. ③

3. 写出以下数列的一个通项公式:

(1)  $5, 7, 9, 11, 13, \dots$ ;

(2)  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ ;

(3)  $\frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{3}{35}, \frac{4}{63}, \frac{5}{99}, \dots$ ;

(4)  $5, 55, 555, 5555, 55555, \dots$ .

4. 设  $\{a_n\}$  是一个首项为 1 的正项数列, 且  $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n-1}a_n = 0 (n=1, 2, 3, \dots)$ , 求  $a_n$ .

5. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $\log_2(1+S_n) = n+1$ , 求它的通项公式.

6. 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = n(n+2)$ . 问:

(1) 80, 90 是不是该数列的项? 如果是, 是第几项?

(2) 从第几项开始, 该数列的项大于 10000?

7. 分别求满足以下条件

(1)  $S_n = 3 \cdot 2^n - 3$ ;

(2)  $S_n = 2^n + 1$ .

的数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

8. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 5, a_2 = 9, a_n = pn + q (p, q \text{ 为常数}), n \in \mathbb{N}^*$ , 求  $a_3$ .

9. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n (n \geq 1)$ , 写出数列的前 6 项.

(参考答案见 P140)

## 高屋建瓴

### 1. 数列和集合的异同点

数列是一组数, 在一定程度上, 一个数列可看作一个数集. 但数列和数集的不同点有二: 一是数列中的数是有序排列, 而数集中的元素是无序排列; 二是数列中的数可以有重复, 即数列中的不同的两项, 其值可以相等, 而数集中, 相等的元素一般看作是同一个元素.

例 5 试证明, 如果无穷数列中的数都是集合  $A$  中的元素, 而且集合  $A$  中的元素数目是有限的, 那么无穷数列不可能是单调递增或者递减的.

分析 倘若数列递增(或者递减), 必然可以找到无穷多个不同的元素属于数列, 但它们又要属于有限的集合, 所以矛盾.

证明 因为无穷数列如果是单调递增或者递减的, 不妨设它是单调递增的, 单调递减的时候证法类似, 因此我们有:  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$ , 所以对于数列中的任意的两个元素  $a_i, a_j$ , 如果  $i \neq j$ , 那么  $a_i \neq a_j$ , 这说明数列中不同的元素有无穷多个, 但是我们知道数列中的元素都属于集合  $A$ , 因此集合  $A$  中有无穷个元素, 但是这和集合  $A$  的元素数目有限矛盾, 所以假设不成立, 题设的结论成立.

点评 出现了“不可能”这样的字眼, 最直接就应该想到用反证法.

### 2. 数列和函数的异同点

数列可视为整标函数,即定义域为正整数集  $N^*$  的函数,数列中的等差数列,可以和一次函数(或解析几何中的直线方程解析式)相比拟,而数列中的等比数列,可以和指数函数相比拟.数列和函数虽然非常类似,但不同之处也很明显,从解析式看数列是离散的,而一般的(中学范围所接触到的)函数是连续的或区域连续的,从图象上看,数列图象在坐标平面上一般是由一系列散点构成,而函数图象一般是由一条或几条直线或曲线构成,下面我们来看看这些异同点是如何影响解题的.

例6 已知一个数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ , 其每一项的值都为另一整数列  $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$  的对应项的平方, 试求出这个数列各项之和.

分析 已知数列各项求其和, 直接根据条件平方求和即可.

解答  $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 = 28$ .

点评 题目本身简单, 但注意有时候一个数列的问题可以通过另一个与它相关联的数列来得到解答.

例7 已知一个非空整数集, 其中的元素的值都为另一整数集  $\{3, 2, 1, 0, -1, -2, -3\}$  中的元素的平方, 求符合要求的集合的各元素之和.

分析 找出题设给出的集合所对应的元素的平方值集合, 这就是所求集合的全集.

题设给出的整数集  $\{3, 2, 1, 0, -1, -2, -3\}$  各元素的平方值组成的集合为整数集  $\{9, 4, 1, 0\}$ , 此集合即为所求集合的全集, 换句话说, 所求集合为此集合的子集.

解答 符合题设要求的集合共有 15 个, 列表如下:

序号	集合	各元素之和
1	$\{9, 4, 1, 0\}$	14
2	$\{9, 4, 1\}$	14
3	$\{9, 4, 0\}$	13
4	$\{9, 1, 0\}$	10
5	$\{4, 1, 0\}$	5
6	$\{9, 4\}$	13
7	$\{9, 1\}$	10
8	$\{4, 1\}$	5
9	$\{9, 0\}$	9
10	$\{4, 0\}$	4
11	$\{1, 0\}$	1
12	$\{9\}$	9
13	$\{4\}$	4
14	$\{1\}$	1
15	$\{0\}$	0

点评 注意要分情况讨论, 不要遗漏, 而且需要注意集合中元素具有唯一性, 因此集合中的两个相等的元素只能被看作是一个.

## 8 专题题典·高中数学——数列

例8 已知一个一次函数  $y = f(x)$ , 当  $y - 3 = f(x + 1)$  的时候,  $f(1) = 17$ , 求  $y = 0$  时  $x$  的值.

分析 将一次函数的形式设出来, 代入条件解出对应的  $k, b$ , 求得解析式后再求  $f(0)$ .

解答 设函数解析式为  $y = kx + b$ , 则有  $kx + b - 3 = f(x + 1) = k(x + 1) + b$ .

$\therefore k = -3$ , 而利用另一个条件:  $f(1) = 17$ , 即  $y = f(x) = kx + b = -3x + b$  可得  $b = 20$ ,  $\therefore y = -3x + 20$ , 所以  $y = 0$  的时候,  $3x = 20$ ,  $\therefore x = \frac{20}{3}$ .

点评 本题再次表明数列和函数有着密切联系.

例9 已知一个数列, 其首项为 17, 从第二项起, 每一项都比前一项少 3, 求这个数列中最接近 0 的是第几项.

分析 既然项不多, 不妨列出来, 或者也可以按照常规思想最接近零的一项即此项与零之差的绝对值为最小的思路来做.

解法1 列举法: 已知数列首项为 17, 且之后各项递减 3, 则此数列为: 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4, ... 所以由此可以清晰地看出, 数列中各项与 0 的差距是先缩小后增大, 与零最接近的一项的值为 -1, 是第 7 项.

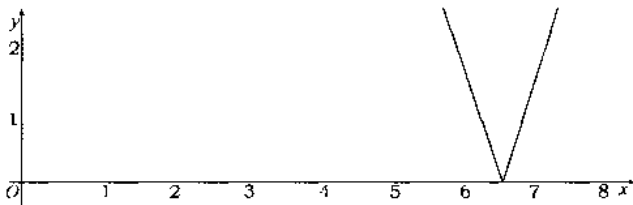


图 1-1-3

解法2 解析法: 最接近零的一项即此项与 0 之差的绝对值为最小. 数列中每一项都递减 3, 则第二项比第一项少 3; 第三项比第二项少 3, 比第一项少  $3 \times 2$ ; ...; 第  $n$  项则比第一项少  $3(n-1)$ , 因此数列第  $n$  项的值为  $17 - 3(n-1) = 20 - 3n$ . 现在命题转化为求  $|20 - 3n|, n \in \mathbf{N}^*$  的最小值时对应的  $n$ . 根据函数  $f(x) = |20 - 3x|$  的图象(如图 1-1-3 所示)可以知道, 当  $n = 7$  的时候取到最小值 1. 也就是说第七项和 0 的距离最近, 距离为 1.

点评 如果列举比较简单, 那么就不如采用这种方法, 直观又不容易犯错. 由这两道例题我们可以很清晰地看到, 等差数列和一次函数问题之间的异同点.

例10 一个无穷数列的前  $n$  项构成一个有穷数列, 这个有穷数列无论  $n$  是多少都是单调递增的, 求证这个无穷数列也是单调递增的.

分析 根据单调递增的定义  $a_n < a_{n+1}$ , 再利用已知条件“有穷数列无论  $n$  是多少都是单调递增”即可证明.

解答 为了证明无穷数列单调递增, 我们必须证明对于任意的  $n$ , 我们有  $a_n < a_{n+1}$ , 所以我们取数列的前  $n+1$  项, 由于这前  $n+1$  项组成的有穷数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ , 是单调递增的, 所以根据单调递增的定义,  $a_n < a_{n+1}$ . 所以无穷数列的任意的前后两项的比较都可以化成有穷数列中的两项, 根据证明, 命题成立.



点评 单调性的判断是非常常见的题型,一般直接利用单调性的定义推导.

### 能力练习题

- 在数列  $\{a_n\}$  中, 设  $a_1 = -2, a_{n+1} = 2a_n + 3$ , 则通项  $a_n$  可能是\_\_\_\_\_.  
 A.  $5 - 3n$       B.  $3 \times 2^{n-1} - 1$       C.  $5 - 3n^2$       D.  $5 \times 2^{n-1} - 3$
- 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式是  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 若  $a_n + a_{n+1} = \sqrt{11} - 3$ , 则  $n$  的值为\_\_\_\_\_.  
 A. 12      B. 9      C. 8      D. 6
- 数列  $-3, 7, -11, 15, \dots$  的通项公式可能是\_\_\_\_\_.  
 A.  $a_n = 4n - 7$       B.  $a_n = (-1)^n(4n + 1)$   
 C.  $a_n = (-1)^n(4n - 1)$       D.  $a_n = (-1)^{n+1}(4n - 1)$
- 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$ , 则该数列的前 4 项依次为\_\_\_\_\_.  
 A. 1, 0, 1, 0      B. 0, 1, 0, 1      C. 0, 2, 0, 2      D. 2, 0, 2, 0
- 已知数列  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$  则 0.96 是该数列的第\_\_\_\_\_.  
 A. 20 项      B. 22 项      C. 24 项      D. 26 项
- 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式是  $a_n = \frac{2n+1+(-1)^{n+1}}{4}$ , 该数列的前 6 项为\_\_\_\_\_, 第 19 项为\_\_\_\_\_.
- 先填空, 再写出每个数列的一个通项公式.  
 (1)  $2, \underline{\quad}, 1, \frac{1}{2}, 0, \dots$       (2)  $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \underline{\quad}, \frac{65}{16}, \dots$
- 点  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots, A_n(x_n, y_n), \dots$  是函数  $f(x) = 3x + 1$  的图象上的一系列点, 其中  $x = 2n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 试写出数列  $\{y_n\}$  的前 5 项, 并求出  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$  的值.
- 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n + S_{n+1} = a_{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 求证这个数列各项都等于同一个常数.
- 求数列  $9, 99, 999, 9999, \dots$  的一个通项公式.
- 分别求满足以下条件  
 (1)  $S_n = 2n^2 - n$ ;      (2)  $S_n = n^2 - n + 1$ .  
 求  $\{a_n\}$  的通项公式.
- 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  与通项  $a_n$  之间满足  $a_1 = 1, S_n = n^2 a_n$ , 求  $a_n$ .
- 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = an^3 + bn^2 + cn$  ( $n \geq 1$ ), 且  $a_1 = 1, a_2 = -2, a_3 = 4$ .  
 求  $a_n$  及  $a, b, c$ .  
 (参考答案见 P141)