普通高等教育“十一五”国家级规划教材

新世纪高等学校教材

WEIJIFENXUE JIANGYI

数学及应用数学专业主干课程系列教材

邝荣雨 等 编著

北京师范大学数学科学学院 组编

微积分学讲义 第二版

（第三册）

4

$$d[\int_a^x f(t)dt]=f(x)dx$$

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

微积分学讲义

新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

（第三册）

北京师范大学数学科学学院 组编

微积分学讲义 第二版

WEIJIFENXUE JIANGYI

邝荣雨 薛宗慈 陈平尚 蒋 铎 李有兰 编著

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS
北京

内 容 提 要

本书分三册.第一册是一元与多元微积分初步;第二册是一元微积分的理论与方法;第三册是多元微积分理论与计算.这三册可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书.

本书是作者在总结最近几年在北京师范大学数学系本科数学分析课程教学改革的经验的基础上写成的.作者将现行的数学分析课程的内容分为两个阶段(首先侧重于概念、计算,进而侧重于理论、方法)进行讲授,教学效果达到预期的目的.

本册分三章:欧氏空间、多元函数微分学、多元函数积分学.

未经同意,不得编写出版本书的思考题与习题的解答.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学讲义.第三册/邝荣雨,薛宗慈等编著.—2版.北京:北京师范大学出版社,2006.6

新世纪高等学校教材

ISBN 7-303-00844-6

Ⅰ.微... Ⅱ.①邝...②薛... Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 039678 号

北京师范大学出版社出版发行

(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)

http://www.bnup.com.cn

出版人:赖德胜

北京昌平兴华印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:170mm×230mm 印张:16.75 字数:300 千字

2006 年 6 月第 2 版 2006 年 6 月第 1 次印刷

印数:1~3 000 定价:24.00 元

第二版前言

1915 年北京高等师范学校成立数理部,1922 年成立数学系. 2005 年适逢数理部诞辰 90 周年,也是北京师范大学数学科学学院建院 1 周年. 经过 90 年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980 年,北京师范大学出版社成立,给教材的出版提供了一个很好的契机. 我院教师编著的数十种教材已先后在这里出版. 除了北京师范大学现代数学丛书外,就大学教材而言,共有五种版本. 第一种是列出编委会的高等学校教学用书,这是在 20 世纪 80 年代初期,由北京师范大学出版社王文湧先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会,研究编写出版一套数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材. 在出版社的大力支持下,这一计划完全实现,满足了当时教学的需要. 第二种是标注高等学校教学用书,但未列编委会的教材. 第三种是(北京师范大学)面向 21 世纪课程教材. 第四种是北京师范大学现代数学课程教材. 第五种是未标注高等学校教学用书,但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中,除再次印刷外,已经有五部教材进行了修订或出版了第二版.

前一段时间,王建华老师和王琦老师分别搜集了我院本科生的所有教材和研究生 12 门基础课教材的使用情况,李仲来教授汇总了我院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作,由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,准备对数学科学学院教师目前使用或誊印(出版社已经没有存书的教材)的北京师范大学出版社出版的部分教材进行修订后再版. 计划用几年时间,出版数学和应用数学、数学教育、数学学科硕士研究生三个系列的主要课程教材.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2005 年 8 月 8 日

第二版编者的话

参加本次修订的人员有:邝荣雨,薛宗慈,陈平尚,李有兰.

本次修订,时间仓促,只好先抓紧时间,进行大大小小的各种勘误,然后,在时间允许下,在不改变原书结构、体系的情况下,对原书内容作了一些修订、增补.例如,在函数一节中,对中学函数的公式法给出了较确切的含义,对函数之间的各种关系提高到函数空间中给予了定义等,在极限一节中,将原书的"再谈极限"中的内容,一部分放到"极限概念"中,一部分放到"极限性质"中,再适当删去关于"函数的阶"的内容,这就使得整节内容更精炼、更简捷;对书中某些定理与例题的证法与解法做了一些删繁就简的变动.如带拉格朗日余项的泰勒公式的证明等;在级数、广义积分与极限计算中,突出并强调阶的估计法的运用等.另外,对个别练习题与例题作了一些变动,适当增加了一些现在社会与经济方面的练习题.并对全书的思考题进行了一次仔细的审阅,适当增加了一些思考题,相信它们对提高读者的钻研能力会有较大的帮助.

本次修订出版不包括第一版的第四册(专册).任何对本书的错误与不妥之处的批评指正都是对本书的最大支持!

非常感谢北京师范大学数学科学学院郑学安教授,王昆扬教授,他们将使用原书时所发现的错误与不妥之处提供给编者,我们已在修订中加以采纳.

非常感谢北京师范大学数学科学学院的领导对本次修订工作的鼓励与支持!

非常感谢北京师范大学出版社的支持!

本书第二版编者
北京师范大学数学科学学院
2005 年 8 月

第一版出版说明

北京师范大学是一所具有 80 多年历史的老学校,在学科建设和教学实践中积累了一定的经验,将它贯彻到教材中去无疑是有益的.为了加强教材建设,加强与兄弟院校的交流,我社约请北京师范大学数学和数学教育研究所所长严士健教授等组成教材编委会,研究编写出版一套教材.编委会在研究当前教学改革的新情况和过去的教学经验的基础上,同时参照原教育部 1984 年颁发的中学教师进修大纲,对教材的编写宗旨和要求进行认真地讨论.组织数学系有教学经验的教师进行编写,并且由编委等分工负责对书稿进行审订.

这套教材包括数学分析、解析几何、高等代数、概率论与数理统计、常微分方程、复变函数论、抽象代数基础、高等几何、微分几何、实变函数论与泛函分析、计算方法、理论力学以及高等数学(物理、天文、无线电等专业用)等.

这套教材文字通俗易懂.内容由浅入深、循序渐进,便于自学,科学系统性较强.每章有小结,每节(或几节)后配有习题.每章有总复习题,习题安排由易而难,层次清楚.书后附有习题答案或提示,以利于读者自学时检查自己的作业.

为了适应不同层次学校和人员的需要,书中有些内容加了“*”号,它相对独立,如因学时较少,可以删去.

这套教材可供高等师范院校本科生(或专科)、教育学院数学系、函授(数学专业)、在职中学教师进修等使用.

北京师范大学出版社

1984 年

第一版编者的话

本讲义分四册出版,第一册是一元与多元微积分初步;第二册是一元微积分理论与方法;第三册是多元微积分理论与计算.这三册内容可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书.

编写本书最主要的想法是尝试把现行数学分析课程的内容分两阶段进行讲授,以期达到下述目的:

1.使学生的学习由易到难,首先侧重概念、计算,进而侧重理论、方法.例如第一册侧重极限、连续等概念和微分、积分的计算;第二册侧重实数域、级数、微积分理论和综合运用微积分方法.

2.便于相对集中内容与时间,强化训练,按不同要求提高学生单项和综合解题能力.例如把微分学、积分学分为两段讲授,前段(第一册)着重训练学生的计算能力和初步解应用题的能力;后段(第二册)综合运用微积分的理论、方法着重训练学生的论证和估值能力.

通过教学实践我们认为以上安排是可行的,我们还要继续完善它.

本书的内容安排次序,教材处理以及某些定理所采用的证明方法与目前国内通用的数学分析教材不尽相同.例如一元微分学部分的前段(第一册)就不讲微分中值定理,直接利用连续函数性质证明函数单调性判别法,并利用它解决导数的应用问题,到后段(第二册)才出现中值定理及其在理论、估值等各方面的应用.

本书配有较多的练习题,它们有一定的广度和深度.做一定数量并且具有一定难度的习题,是数学分析能力培养的重要一环.本书除练习题外还增设了思考题,其中不少题是教学经验的积累,它们对于深入理解某些概念和定理可能会有好处.

本书在内容、例题与习题的安排和选取上都有一定的“弹性”,以便适应读者的不同需要,对此我们在相应的地方都作了说明,请读者自己选择.

编写本书,做了些尝试,深感难度很大,自觉力不从心,错误和缺点必然存在,切望得到批评指正.

编写本书,参考了很多兄弟院校的教材和习题,受益匪浅,谨致谢意.

本书的前身是北京师范大学数学系 82 级、86 级学生使用的讲义,邝荣雨、薛宗慈在这两届学生中试用过该讲义.赵慈庚老师、董延闿老师曾提出了许多有指导性的修改意见,并亲自参与了部分章节的修改.孙永生老师经常鼓励和支持编者大胆进行试验.陈公宁及参与试用过程的许多同志对原讲义提出了许多宝贵意见.分析教研室不少同志都参与过对原讲义的讨论并提出了很多中肯的意见和看法.在此我们谨向关心、帮助我们的老师和同事们表示感谢.

编 者
北京师范大学数学系
1988 年 3 月

目　录

—9— 欧氏空间 …………………………………………… (1)
§1 $\mathbf{R}^n$ 与映射 …………………………………………… (1)
1.1 映射 …………………………………………… (1)
1.2 $\mathbf{R}^n$ 空间 …………………………………………… (5)
思考题 …………………………………………… (8)
练习题 …………………………………………… (8)
§2 $\mathbf{R}^n$ 的重要性质 …………………………………………… (10)
2.1 $\mathbf{R}^n$ 的初等拓扑与重要性质 …………………………………………… (10)
*2.2 $\mathbf{R}^n$ 中的约当(Jordan)可测集 …………………………………………… (16)
思考题 …………………………………………… (23)
练习题 …………………………………………… (23)
§3 多元函数的极限与连续 …………………………………………… (25)
3.1 极限与累次极限 …………………………………………… (25)
3.2 连续函数的重要性质 …………………………………………… (31)
思考题 …………………………………………… (35)
练习题 …………………………………………… (37)
复习参考题 …………………………………………… (39)
—10— 多元函数微分学 …………………………………………… (41)
§1 微分学基本概念 …………………………………………… (41)
1.1 数值函数的偏导数与全微分 …………………………………………… (41)
思考题 …………………………………………… (56)
练习题 …………………………………………… (56)
1.2 向量值函数的 Frechet 导数 …………………………………………… (58)
思考题 …………………………………………… (67)
练习题 …………………………………………… (68)

§2 数值函数的泰勒(Taylor)公式及应用 …………………………… (69)
2.1 微分中值定理与泰勒(Taylor)公式 ………………………… (69)
2.2 普通极值……………………………………………………… (74)
思考题……………………………………………………… (84)
练习题……………………………………………………… (84)
§3 隐函数与反函数 ……………………………………………… (86)
3.1 隐函数定理 …………………………………………………… (86)
Ⅰ.问题的提出及压缩映射原理 ………………………… (86)
Ⅱ.数值隐函数 …………………………………………… (88)
Ⅲ.向量值隐函数 ………………………………………… (94)
3.2 反函数定理 …………………………………………………… (101)
思考题 ……………………………………………………… (107)
练习题 ……………………………………………………… (107)
3.3 条件极值 ……………………………………………………… (109)
练习题 ……………………………………………………… (116)
*3.4 换元法 ……………………………………………………… (116)
练习题 ……………………………………………………… (122)
§4 曲线与曲面 …………………………………………………… (124)
4.1 曲线……………………………………………………………… (124)
Ⅰ.参数曲线与切线 ……………………………………… (124)
Ⅱ.隐曲线与切线 ………………………………………… (129)
4.2 曲面……………………………………………………………… (133)
Ⅰ.参数曲面与切平面 …………………………………… (133)
Ⅱ.隐曲面与切平面 ……………………………………… (137)
练习题……………………………………………………… (140)
复习参考题……………………………………………………………… (141)
—11— 多元函数积分学 ……………………………………………… (142)
§1 重积分 ………………………………………………………… (142)
1.1 重积分理论 …………………………………………………… (142)
Ⅰ.重积分定义 …………………………………………… (142)
Ⅱ.可积准则 ……………………………………………… (144)
练习题 ……………………………………………………… (150)

1.2　重积分计算 …… (150)
Ⅰ.累次积分方法 …… (151)
Ⅱ.变量替换方法 …… (158)
练习题 …… (171)
*1.3　广义重积分 …… (173)
练习题 …… (180)
§2　曲线积分与曲面积分 …… (181)
2.1　曲线积分 …… (181)
Ⅰ.定向曲线与曲线弧长 …… (181)
Ⅱ.曲线积分 …… (186)
练习题 …… (195)
2.2　曲面积分 …… (197)
Ⅰ.定向曲面与曲面面积 …… (197)
Ⅱ.曲面积分 …… (202)
练习题 …… (212)
2.3　各种积分的联系 …… (214)
Ⅰ.Green, Gauss, Stokes 公式 …… (214)
Ⅱ.曲线积分与积分路径无关的性质 …… (222)
练习题 …… (227)
*2.4　场论初步 …… (230)
Ⅰ.场的几何描述 …… (230)
Ⅱ.场的三度——梯度、散度、旋度 …… (232)
Ⅲ.几种特殊的场——有势场、管型场 …… (235)
练习题 …… (238)
复习参考题 …… (239)
部分习题参考答案或简单提示 …… (241)
索引 …… (251)

—9—
欧 氏 空 间

§1 $\mathbf{R}^n$ 与映射

1.1 映射

我们即将展开对多元微积分的研究.因此有必要把已经学过的有关 $\mathbf{R}^n$ 与映射的知识、术语与记号统一进行归纳和总结.

设 X, Y 是两个集合,若存在一个法则 f,对每个 $x\in X$,有唯一的 $y\in Y$ 与它对应,则称 f 是 X 到 Y 的**映射**,记作

$$f:X\to Y, x\mapsto y \quad 或 \quad X\xrightarrow{f}Y \quad 或 \quad x\xmapsto{f}y.$$

称 y 为 x 的**象**,记作 $y=f(x)$,也称它为**因变量**;称 x 为 y 的**原象**,也称它为**自变量**.称 X 为 f 的**定义域**,称集合 $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$ 为 f 的**值域**,也称为 X 的**象**.取 $Y_1\subset Y$,称集合 $f^{-1}(Y_1)=\{x\in X\mid f(x)\in Y_1\}$ 为 Y_1 的**原象**.

设 $X\xrightarrow{f}Y$ 与 $X\xrightarrow{g}Y$ 是两个映射,若 $\forall x\in X, f(x)=g(x)$,则称 f 与 g **相等**,记作 $f=g$.

设 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个映射,$A\subset X$,若存在映射 $A\xrightarrow{\varphi}Y$,对 $\forall x\in A$,有 $\varphi(x)=f(x)$,则称 φ 是 f 在 A 上的**限制**,记作 $\varphi=f|_A$,称 f 是 φ 在 X 上的**扩张(延拓)**.

设 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个映射,若 $f(X)=Y$,则称 f 是**满射**.

若 $\forall x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是**单射(单叶映射)**.

若 f 既是满射,又是单射,则称 f 是**双射(1-1 映射或满单射)**.

几个常用的映射.

常值映射:$f:X\to Y, x\mapsto c$ (其中 c 是 Y 中一个固定元素).

恒等映射:$j_X:X\to X, x\mapsto x$.

投影映射：$p_1: X\times Y\to X, (x,y)\mapsto x$ 叫做**第一坐标投影**(映射).

$p_2: X\times Y\to Y, (x,y)\mapsto y$ 叫做**第二坐标投影**(映射).

设 $X\xrightarrow{g}Y$ 与 $Y\xrightarrow{f}Z$ 是两个映射，那么对每个 $x\in X$，按照法则 g，有唯一的 $y=g(x)\in Y$ 与它对应，再按照法则 f，有唯一的 $z=f(y)\in Z$ 与它对应，这样对每个 $x\in X$，有唯一的 $z\in Z$ 与它对应，我们把这个法则叫做 g 与 f 的**复合映射**(**合成映射**)，记作

$$f\circ g: X\to Z, x\mapsto z=f[g(x)]=f\circ g(x).$$

若有 $X\xrightarrow{g}Y, Y\xrightarrow{f}Z, Z\xrightarrow{h}W$，易证

$$h\circ(f\circ g)=(h\circ f)\circ g,$$

即映射的复合运算满足结合律，但不满足交换律，即一般来说

$$f\circ g\neq g\circ f.$$

设 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个映射，若存在映射 $Y\xrightarrow{g}X$，使得 $f\circ g=j_Y$，且 $g\circ f=j_X$，则称 g 是 f 的**逆映射**(**逆射**).

由定义易知，若映射 $X\xrightarrow{f}Y$ 存在逆映射，则此逆映射由 f 唯一确定，因此可以把它记作 f^{-1}.

【性质 1.1】　$f: X\to Y$ 存在逆射的充要条件：f 是双射.

请读者自行证之，或参看有关书籍.

由此看出，若 $X\xrightarrow{f}Y$ 存在逆射 f^{-1}，则 f^{-1} 也是双射，且 $(f^{-1})^{-1}=f$.

常把定义域与值域皆为**线性空间**(**向量空间**)的映射叫做**算子**，把值域为实数域或复数域的算子叫做**泛函**.

【例 1】　积分运算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是可积函数族 $\mathscr{R}[a,b]$ 到实数域 $\mathbf{R}$ 的一个映射(泛函)，记作

$$\int_a^b: \mathscr{R}[a,b]\to\mathbf{R},\quad f\mapsto\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

并称为**积分算子**.

【例 2】　微分运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ 是可微函数族 $\mathscr{D}(a,b)$ 到函数族 $\mathscr{F}(a,b)$ 的一个映射，记作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}: \mathscr{D}(a,b)\to\mathscr{F}(a,b),\quad f\mapsto f',$$

并称为(**一阶**)**微分算子**. 常记作 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

【例 3】 加法运算 $a+b$ 是卡氏积 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射, 记作

$$+:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},(a,b)\mapsto a+b.$$

【例 4】 乘法运算 $a\cdot b$ 是卡氏积 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射, 记作

$$\cdot:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},(a,b)\mapsto a\cdot b.$$

一般来说, 我们把映射 $X\times X\xrightarrow{\varphi}X$ 叫做 X 的一个**代数运算**.

通俗地说, 每台收音机就是一个算子 $f\xrightarrow{F}\hat{f}$, 它把电磁信号 f 转变为音频信号 $\hat{f}$. 另外, 我们身上的每个感官, 也可看成是具有自己定义域与值域的算子(转换器).

下面介绍一些特殊而重要的映射.

在高等代数中, 我们学过一类重要的映射, 就是**线性映射(线性算子、线性变换)**, 即满足条件

$$L(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1L(x_1)+\alpha_2L(x_2),\quad x_1,x_2\in X,\alpha_1,\alpha_2\in F$$

的映射 $L:X\to Y$, 其中 X, Y 是数域 F 上的向量空间, 当 Y 是(实或复)数域时, 常称 L 为**线性泛函**.

【例 5】 由微积分性质易知, 积分算子是线性泛函, (一阶)微分算子是线性算子.

【例 6】 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 $m\times n$ 矩阵,

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^n,$$

令

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

则 $\boldsymbol{L}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是一个线性映射.

【例 7】 在平面 $\mathbf{R}^2$ 中, 设 $\boldsymbol{L}$ 是将 $\mathbf{R}^2$ 的每个向量旋转角 θ 的一个映射, 则 $\boldsymbol{L}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是线性映射, 称为旋转变换.

我们把定义域为自然数集 $\mathbf{N}_+$, 值域在 $\mathbf{R}^n$ 中的映射叫做 $\mathbf{R}^n$ 中的**点例**, 记作

$$\{\boldsymbol{x}_k\}(k\in\mathbf{N}_+).$$

我们把定义域与值域都在有限维欧氏空间中的映射叫做**函数**或**变换**, 即

$$\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\supset D\to\mathbf{R}^m.$$

当 $n=1$ 时, 称 f 为**单元函数**; 当 $n>1$ 时, 称 f 为**多元函数**.

当 $m=1$ 时, 称 f 为**数值函数**; 当 $m>1$ 时, 称 $\boldsymbol{f}$ 为**向量值函数**.

如果设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in\mathbf{R}^m$, 令

$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))\in\mathbf{R}^m,$$

其中 $f_j(j=1,2,\cdots,m)$称为 f 的标量函数,那么 f 即可写成向量形式,也可写成数量形式,即

$$y=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\\cdots\cdots\\y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{cases}$$

有时要把 n 元函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$看成 k 元($k<n$)函数,这就是任意固定 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中某$n-k$ 个变量,把 f 看成其他k 个变量的函数. 例如固定 x_i,则 f 就是$n-1$ 元函数,此时记作 $f(\cdot,\cdots,\cdot,x_i,\cdot,\cdots,\cdot)$. 又如三元函数 $f(x,y,z)$,若固定 x,则得到(y 与z 的)二元函数 $f(x,\cdot,\cdot)$;若固定 x,y,则得到(z 的)一元函数 $f(x,y,\cdot)$.

由高等代数知道,当取定 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 的基以后,线性变换 $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 的一般表达式是

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\\cdots\cdots\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n,\end{cases}$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},$$

或简记作

$$(y_j)=(a_{ij})(x_i),$$

或写成

$$y=Ax,$$

其中 $A=(a_{ij})$叫做 L 关于 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 给定基的矩阵,简称为 **L 的矩阵**. $x_i(i=1,2,\cdots,n)$是 $\mathbf{R}^n$ 中任一向量x 在给定基下的坐标,$y_j(j=1,2,\cdots,m)$是 $\mathbf{R}^m$ 中向量y 在给定基下的坐标.

由高等代数还知道,取定 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 的基以后,全体线性变换 $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 组成的集合与全体$m\times n$ 矩阵A 组成的集合是同构的. 这样我们就可以把线性变

换之间的运算转化为矩阵之间的运算.形象地说,线性变换 L 的矩阵A 扮演着它的函数表达式的角色,在这个意义上我们甚至可认为 A 就是L.

当 $m=1$ 时,L 的矩阵是 $1\times n$ 矩阵$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,此时线性变换(线性泛函)L 的一般表达式是

$$L(\boldsymbol{x})=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n.$$

下面简单介绍线性变换或矩阵的范数概念.

设 $\boldsymbol{L}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是线性变换,$\boldsymbol{A}$ 是它的矩阵,称

$$\|\boldsymbol{L}\|=\|\boldsymbol{A}\|=\sup_{|\boldsymbol{x}|=1}\{|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})|\}=\sup_{|\boldsymbol{x}|=1}\{|\boldsymbol{Ax}|\}$$

为线性变换 L 或矩阵A 的**范数**,它好像是 L 或A"大小"的一种度量.

【性质 1.2】

1° $|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})|\leqslant\|\boldsymbol{L}\|\,|\boldsymbol{x}|,\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$.

2° $|a_{ij}|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

【证明】 我们仅证 1°,读者自证 2°.

当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时,1°显然成立;当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时,令 $c=\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|}>0$,有$|c\boldsymbol{x}|=1$,所以

$$|\boldsymbol{L}(c\boldsymbol{x})|\leqslant\sup_{|c\boldsymbol{x}|=1}\{|\boldsymbol{L}(c\boldsymbol{x})|\}=\|\boldsymbol{L}\|.$$

故

$$|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})|=|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{L}(c\boldsymbol{x})|\leqslant\|\boldsymbol{L}\|\,|\boldsymbol{x}|.$$ □

由矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$概念可以引进矩阵函数概念,即若每个 $a_{ij}(\boldsymbol{x})$是 n 元数值函数,则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}a_{11}(\boldsymbol{x}) & \cdots & a_{1n}(\boldsymbol{x})\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & a_{mn}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ **矩阵函数**.由此可引进矩阵函数连续的概念,即若

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0)\|=0,$$

则称矩阵函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ **连续**.利用性质 1.2 之 2°可以证明:

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续$\Leftrightarrow a_{ij}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续$(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$.

1.2 $\mathbf{R}^n$ 空间

由高等代数知道,$\mathbf{R}^n$ 不仅具有"代数结构",即它是实数域上的向量空间,而且具有"几何结构",即它是具有内积的向量空间,这种空间在分析学中叫做**(实)内积空间**.$\mathbf{R}^n$ 中任何两个向量$\boldsymbol{x}=(x_i)$,$\boldsymbol{y}=(y_i)$的内积,记作