高职高专及成人教育适用

高等数学

上册

郑大川　董玉洲　主编

云南大学出版社

编写说明

为了更好地适应高职高专院校和成人教育培养应用型人才的需要，提高学生的基本素质和教学质量，解决高职高专院校和成人教育这一层次《高等数学》课程的教材问题，我们根据高职高专院校和成人教育对数学教学的基本要求，本着教学与专业相融，基础教学为专业服务和以应用为目的，以必须、够用为度的原则，在多年从事高等数学教学实践的基础上，编写了本教材。

本教材在保证科学性、系统性和严密性的基础上，注意概念的引出、例题的配置，并强调了知识的具体应用；同时，本教材认真贯彻少而精的原则，尽量减少烦琐而又难以起到启发思维作用的逻辑证明，将主要篇幅用于较简单的典型情况，因而既降低了难度，又无损于基本内容。我们特别注重对学生的基本运算、分析问题与解决问题能力的培养，突出了应用性和实用性，内容通俗易懂。这样既达到了教学大纲的要求，又便于学生学习，充分体现了高职高专院校和成人教育的特色。

本教材每节后配有习题，供学生开阔视野，进一步掌握所学知识。该书的具体学时数可根据实际教学情况确定。

本书由云南农业大学郑大川、云南农业职业技术学院董玉洲担任主编，云南热带作物职业学院陈锋、云南林业职业技术学院那永生担任副主编，云南林业职业技术学院李天锡及玉溪农业职业技术学院武翠芳参加了编写。各作者分工次序是：郑大川（第 1 章及附录）、董玉洲（第 2 章）、武翠芳（第 3 章）、李天锡（第 4 章）、那永生（第 5 章）、陈锋（第 6 章）。全书由郑大川统稿。限于编写者的水平，教材中必有考虑不周之处，难免出现缺点和错误，敬请使用者批评指正。

在此，向对本教材出版发行给予帮助的同志们表示感谢！

编者

2007 年 3 月

目　　录

第一章　函数与极限

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学。初等数学主要是研究常量和相对静止状态的数学,高等数学的主要部分是微积分,研究的是变量和运动状态的数学。函数和极限是高等数学中最基本的概念。函数是微积分研究的主要对象,是客观世界中变量之间关系的反映,是科学技术中表达自然规律的基本概念;极限是研究导数和定积分的基础,掌握好极限的概念和计算是十分重要的。

第一节　基本概念

一、集合以及集合的运算

集合是指具有特定性质的一些事物的总体。组成集合的事物,称为该集合的元素。

本书以大写字母表示集合,用小写字母表示集合的元素。例如,一个教室里的学生构成集合,学生是构成这个集合的元素。一个书包中的书构成集合,书是构成这个集合的元素。若 a 是集合 M 的元素,记作 $a \in M$(读作 a 属于 M);若 a 不是集合 M 的元素,记作 $a \notin M$(读作 a 不属于 M)。

从集合的定义可以看出,构成集合的元素的性质应该是明确的。例如,"高个子的人"就不能构成一个集合,因为"高个子"所指的内容并不明确;而"身高 190cm 至 200cm 的人"则能构成一个集合。

由有限个元素构成的集合,可用列举出它的全体元素的方法来表示,例如由实数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 组成的集合 A 可记作 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$,这样的集合通常称为有限集。

由无穷多个元素构成的集合通常称为无限集,用如下记号表示:设 M 是具有某种特征的元素的全体构成的集合,记作 $M = \{x \mid x$ 所具有的特征$\}$。例如,单位圆是直角坐标平面上满足方程 $x^2 + y^2 = 1$ 的点 (x, y) 构成的集合 M,可记为 $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$。全体实数组成的集合通常记为 R,R 可表示为 $R = \{x \mid x$是实数$\}$。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x \in A$,则必有 $x \in B$,那么集合 A 就称为集合 B 的子集,记作 $A \subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B \supset A$(读作 B 包含 A)。例如,系是学院的子集,因为某系属于该学院,若某人是某系的学生,则其一定是该学院的学生。

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,即集合 A 是集合 B 的子集,同时集合 B 是集合 A 的子集,则称集合 A 与集合 B 相等,记为

$$A = B$$

如果 $x \in A$ 且 $x \in B$,由元素 x 构成的集合 C 被称为集合 A 与 B 的交集,记为

$$C = A \cap B \text{ 或 } C = AB$$

如果 $x\in A$ 或者 $x\in B$，由元素 x 构成的集合 C 被称为集合 A 与 B 的并集，记为

$$C=A\cup B \text{ 或 } C=A+B$$

集合 A、B 与其交集、并集显然有以下关系：

$$A\cap B\subset A, A\cap B\subset B; A\subset A\cup B, B\subset A\cup B$$

如果 $x\in A$ 且 $x\notin B$，则称由元素 x 构成的集合 C 是集合 A 与 B 的差集，记为

$$C=A-B$$

不含任何元素的集合称为空集，记为 Φ。例如集合 $A=\{x\mid x\in R, x^2+1=0\}$ 是空集，记为

$$A=\Phi$$

这是因为能同时满足 $x\in R$（x 是实数）和 $x^2+1=0$ 的实数不存在，所以集合 A 中没有元素。一般情况下，规定空集为任何集合的子集。即

$$\Phi\subset A$$

二、数轴、区间、无穷大和无穷小的几何表示

在一条直线上确定了一个点 O 作为原点，再规定出正向和单位长度，那么这条直线上的点与实数之间可建立一一对应的关系，就称这条直线为数轴。数轴上的每一个点都表示了一个实数。一般情况下，规定数轴的右边为正向。

在数轴上选取两个点 $a,b,a<b$，称集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 为开区间，记为 (a,b)。即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

a,b 两点称为开区间的端点，这时，$a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$。

称集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间，记为 $[a,b]$。即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

a,b 称为闭区间的端点，这时 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$。

类似地，称集合 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 或 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 为半开半闭区间。记为 $[a,b)$ 或 $(a,b]$。即

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

这些区间可用数轴表示如下（如图 1.1.1）：

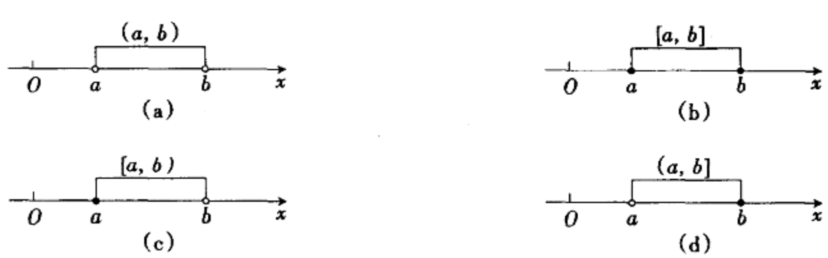


图 1.1.1

从数轴上看，这些区间的长度是有限的，这样的区间称为有限区间。

引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），根据区间与集合的关系，有

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$$

$[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$ 这样的区间称为无限的半开区间。$(a,+\infty)$，$(-\infty,b)$ 这样的区间称为无限的开区间。无限的区间在数轴上表现为长度为无限的直线的一个部分（如图 1.1.2）。

图 1.1.2

从几何意义上看，$+\infty$ 及 $-\infty$ 都表示距坐标原点非常的远。$+\infty$ 是位于坐标原点的右侧，$-\infty$ 是位于坐标原点的左侧。

与无穷大相似，规定距坐标原点非常近的变量为无穷小。在数学上，距离通常用绝对值表示，于是得到无穷大和无穷小的定义：

定义 1.1.1 任意给定 $G>0$，如果有 $|x|>G$，则称变量 x 为无穷大，记为 $x\to\infty$；任意给定 $\varepsilon>0$，如果有 $|x|<\varepsilon$，则称变量 x 为无穷小，记为 $x\to 0$。

三、常量和变量

在实际生活中，会遇到各种不同的量，有些量在某一过程中是固定不变的，另外一些量则可以发生一些变化，这种固定不变的量称为常量；而那些发生变化，可以取不同数值的量称为变量。

例 1.1.1 自由落体在下落时的距离 S 和时间 t 的关系是 $S=\frac{1}{2}gt^2$，其中距离 S 和时间 t 是变量，重力加速度 g 是常量。

例 1.1.2 直线方程 $y=ax+b$，其中 x 和 y 是变量，a 和 b 是常量。

四、函数的定义和函数的表达方式

例 1.1.1 和例 1.1.2 具有共同的本质，即在某一个变化过程中有两个变量，其中一个发生变化，另一个就随之发生变化。当一个变量取一个确定的值时，另一个变量按一定的规则总有确定的值与之对应，这时我们说两个变量之间构成函数关系。称前一变量为自变量，记为 x；后一变量为因变量，记为 y。一般情况下，称 y 是 x 的函数。

定义 1.1.2 在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果当变量在其变化范围内任取一个值时，变量 y 按照一定的规则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为

$$y=f(x)$$

我们可以这样理解函数的定义：变量 y 和 x 如果有某种关系，那么 y 和 x 就可以构成函数。

通常描述两个变量的关系有三种方法：

(1)表达式法：用一个等式表示变量 x 与变量 y 的关系，如

$$y=x^2$$

$$y=\sin x$$

一般记为 $y=f(x)$，本书讨论的主要是这种形式的函数。

(2) 图示法：两个变量之间存在着某种关系，它们之间构成函数，但它们的关系只能用图形表示，如某一天上海证券交易所的股指分时走势图，它表示的是指数和交易时间的关系。

(3)表格法：这是一种实际生活中常见到的函数表示法，它是将一系列的自变量值与对应的因变量值列成表格的形式，如平方表、对数表，等等。

五、函数的定义域和函数相等的判断

对函数 $y=f(x)$ 来说，自变量 x 的变化范围称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，记为 D。当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记为 y_0。即

$$y_0=f(x_0)$$

当 x 取尽定义域 D 中所有数值时，对应的函数值全体构成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记为 W。即

$$W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

通常确定函数的定义域有两种方式：

(1)由函数本身的运算规则确定。

例 1.1.3 求函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域。

解：要让等式 $y=\sqrt{x}$ 成立，则 x 的取值应满足不等式 $x\geqslant 0$。所以函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $D=\{x|x\geqslant 0\}$，即 $D=[0,+\infty)$。在数轴上表示成 $x=0$ 点右边(含 $x=0$)的所有实数。

例 1.1.4 求函数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的定义域。

解：要让等式 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 成立，则 x 的取值应满足不等式 $x\neq 1$。所以函数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的定义域为 $D=\{x|x\neq 1\}$，即 $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$。在数轴上表示成除去点 $x=1$ 的全体实数。

例 1.1.5 求函数 $y=\ln x+\sqrt{1-x}$ 的定义域。

解：要让等式 $y=\ln x+\sqrt{1-x}$ 成立，则等式 $y=\ln x$ 与等式 $y=\sqrt{x-1}$ 应同时成立，即

$$D=\{x|x>0\text{ 且 }x\leqslant 1\}$$

用区间表示为

$$D=(0,+\infty)\cap(-\infty,1]=(0,1]$$

这个区间在数轴上表示成包含 $x=0$ 点右侧(不含 $x=0$)及 $x=1$ 点的左侧(含 $x=1$)的全体实数。

(2)人为的规定。

例 1.1.6 要建造一个柱状容器，底面积 S 一定，规定高度 h 不小于 10 单位，则容器体积 V 与容器高度 h 的函数关系如下：

$$V = Sh \qquad h \geqslant 10$$

这里 $h \geqslant 10$ 是人为规定的高度 h 的取值范围，也就是函数 $V = Sh$ 的定义域。

两个函数 $y = f(x)$，$y = g(x)$ 若表达式相同，定义域和值域也相同，则称两个函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 相等，记为

$$f(x) = g(x)$$

例 1.1.7 函数 $f(x) = \ln x^2$，$g(x) = 2\ln x$ 是否相等？

解：$f(x) = \ln x^2 = 2\ln x$ 与 $g(x) = 2\ln x$ 的表达式相同；$f(x) = \ln x^2$ 的定义域为 $D = \{x \mid x \neq 0\}$；$g(x) = 2\ln x$ 的定义域为 $D = \{x \mid x > 0\}$。因为定义域不同，所以 $f(x) \neq g(x)$。

例 1.1.8 函数 $f(x) = x$，$g(x) = \sqrt{x^2}$ 是否相等？

解：$f(x) = x$ 的值域为 $W = \{x \mid x \in R\}$，$g(x) = \sqrt{x^2}$ 的值域为 $W = \{x \mid x \geqslant 0\}$。值域不同，所以 $f(x) \neq g(x)$。

六、基本初等函数

为了讨论方便，将函数分为以下几类：

(1)幂函数：$y = cx^a$（a 为任意实数，c 为不等于 0 的常数）。特别地，当 $a = 0$，称 $y = cx^a = c$ 为常数函数（如图 1.1.3）。

(2)指数函数：$y = a^x$（a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$）。指数函数的定义域为全体实数（如图 1.1.4）。

(3)对数函数：$y = \log_a x$（a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$），读作 y 是以 a 为底 x 的对数，它的定义域是开区间 $(0, +\infty)$（如图 1.1.5）。特别地，当 a 取常数 e 时，记作 $y = \log_e x = \ln x$，读作 y 是 x 的自然对数。

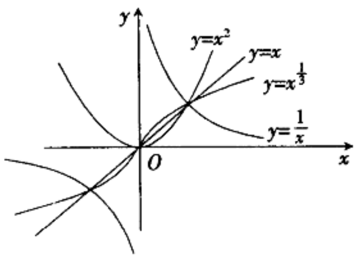


图 1.1.3 幂函数

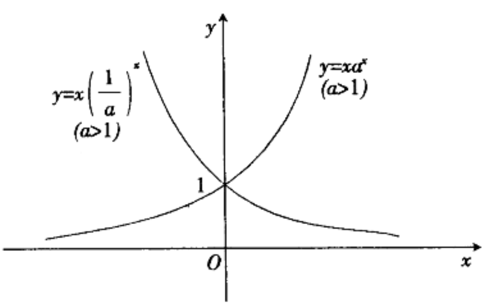


图 1.1.4 指数函数

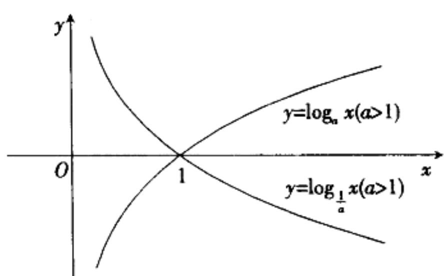


图 1.1.5 对数函数

(4)三角函数：

常用的三角函数有以下几种：

正弦函数：$y=\sin x \quad D=(-\infty, +\infty), W=[-1, +1]$

余弦函数：$y=\cos x \quad D=(-\infty, +\infty), W=[-1, +1]$（如图 1.1.6）

正切函数：$y=\tan x \quad D=\{x \mid x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}, n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}, W=(-\infty, +\infty)$

余切函数：$y=\cot x \quad D=\{x \mid x\neq n\pi, n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}, W=(-\infty, +\infty)$（如图 1.1.7）

正割函数：$y=\sec x \quad \sec x=\frac{1}{\cos x}$

余割函数：$y=\csc x \quad \sec x=\frac{1}{\sin x}$

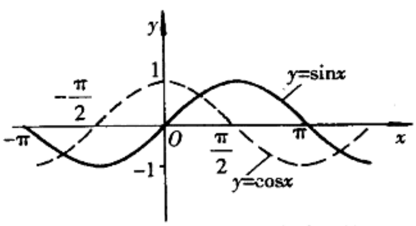


图 1.1.6　正弦函数和余弦函数

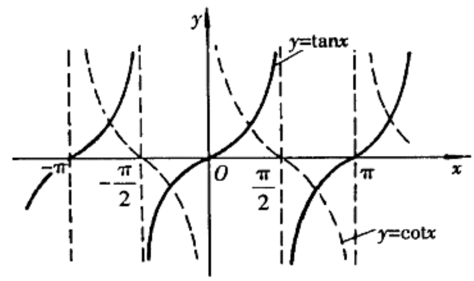


图 1.1.7　正切函数和余切函数

(5)反三角函数：

反正弦函数：$y=\arcsin x \quad D=[-1, +1], W=\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$

反余弦函数：$y=\arccos x \quad D=[-1, +1], W=[0, \pi]$（如图 1.1.8）

反正切函数：$y=\arctan x \quad D=(-\infty, +\infty), W=\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x \quad D=(-\infty, +\infty), W=(0, \pi)$（如图 1.1.9）

以上五种函数，称为基本初等函数。

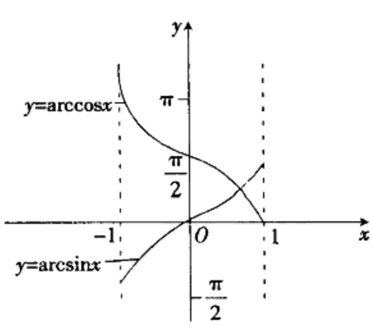


图 1.1.8　反正弦函数和反余弦函数

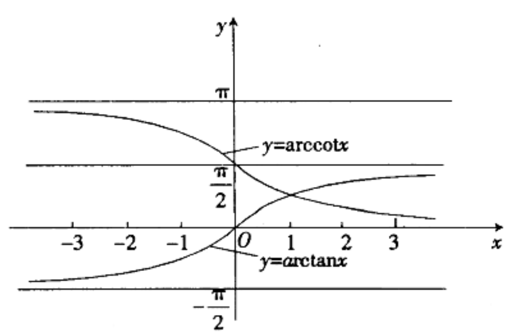


图 1.1.9　反正切函数和反余切函数

七、复合函数和初等函数

从物理学知道，单摆的振动周期 T 是摆长 L 的函数。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1}$$

其中 g 是重力加速度。由于摆长 L 随着温度的升降而有伸长缩短的变化，摆长 L 又是温度 t 的函数。

$$L=L_0(1+\alpha t) \tag{2}$$

其中 L_0 是摆长在 0℃时的长度，α 是材料的线膨胀系数。因此，要考察单摆周期 T 随温度 t 变化而变化的规律，就需要把(2)代入(1)，得到

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L_0(1+\alpha t)}{g}}$$

这样就把单摆的周期 T 表示为温度 t 的函数。这种由比较简单的函数复合成较复杂的函数的例子，在实际应用中有很重要的意义。

定义 1.1.3 如果 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与函数 $y=f(u)$ 的定义域的交集不为空集，那么，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，y 被称为函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为中间变量。

例 1.1.9 $y=\cos u, u=(x+1)$，则 $y=\cos(x+1)$ 为复合函数。

例 1.1.10 函数 $y=\arctan\sqrt{x}$ 可以看成由 $y=\arctan u$ 和 $u=\sqrt{x}$ 复合而成的函数。

复合函数也可由多个函数构成。

例 1.1.11 $y=\ln(\sqrt{1+x^2})$ 可看做由 $y=\ln u, u=1+v,\ v=\sqrt{z}, z=1+x^2$，四个函数复合而成。

从以上例子可以看出，构成复合函数的函数应是基本初等函数或基本初等函数四则运算后的结果。

必须注意，并非任何两个函数都可以构成一个复合函数。例如 $y=\arcsin u, u=2+x^2$ 就不能构成一个复合函数，因为 $u=2+x^2$ 的值域为 $W=\{u|u\geqslant 2\}$ 而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $D=\{u|-1\leqslant u\leqslant 1\}$，两者没有公共部分。在 $u=2+x^2$ 的定义域中取任一值 x 所得到的 u 值，都使 $y=\arcsin u$ 没有意义。

定义 1.1.4 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。

例如 $T=2\pi\sqrt{\frac{L_0(1+\alpha t)}{g}}$，$y=\sin^2 x$，$y=x^2+e^2\ln x$，$y=\sin x-2e^{2x}+3$ 等都是初等函数。

若函数 $y=f(x)$ 满足在定义域上任取 x_1, x_2，其中 $x_1<x_2$，均有 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 为单调函数。前者称为单调增加的函数，后者称为单调减少的函数。

若函数 $y=f(x)$ 在对称的定义域上满足 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=$

$f(x)$具有奇偶性。前者称偶函数,后者称为奇函数。偶函数的图形关于y轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称。

若函数$y=f(x)$在定义域上满足$f(x)=f(x+t)=f(x+kt)$,则称函数$y=f(x)$具有周期性,其周期为t。

若函数$y=f(x)$在定义域上满足$M<f(x)<N$,其中M,N为确定的数,则称函数$y=f(x)$为有界函数。

八、分段函数

有时一个函数由几个式子表示,例如

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$$

在$x\in[0,1]$时,x与y的对应关系为$y=2\sqrt{x}$,而$x\in(1,+\infty)$时,对应关系为$y=1+x$。这种在自变量取不同范围的值时,y与x的对应关系用不同的式子来表示的函数为分段函数。

在某些情况下,虽然函数用一个式子表示,但也应该当做分段函数来处理。

例 1.1.12　$y=|x|$。

这个函数被称为绝对值函数,读作y等于绝对值x。在研究这个函数时,应将其分段考虑。将$y=|x|$表示为:

$$y=f(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

其图形如图 1.1.10 所示。

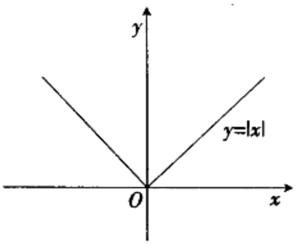


图 1.1.10

例 1.1.13　$y=[x]$,$[x]$为不超过x的最大整数部分。

这个函数为取整函数,读作y等于x的最大整数部分。任意一个实数x都可表示为$x=[x]+\alpha$,其中$\alpha\geqslant 0$。例如$1.8=1+0.8$,$-2.3=-3+0.7$,$\sqrt{2}=1+0.414\cdots$所以有

$$y=[x]=\begin{cases}\vdots & \cdots\cdots\\ -1 & -1\leqslant x<0\\ 0 & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\\ 2 & 2\leqslant x<3\\ \vdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

九、函数值的计算

函数$y=f(x)$在$x=a$时对应的值称为$x=a$时的函数值,记为$f(a)$或$y|_{x=a}$。

例 1.1.14　$S(t)=\frac{1}{2}gt^2$,当$t=1.5$时,对应的函数值为

$$S(1.5)=4.9\times(1.5)^2=11.025$$

也可记为

$$S|_{t=1.5}=11.025$$

例 1.1.15 $f(x)=3x^2-2x+1$，求$f(0)$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$，$f[f(0)]$。

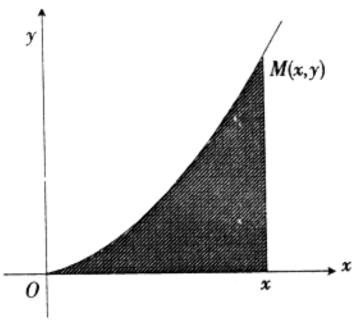
解：$f(0)=3\cdot 0^2-2\cdot 0+1=1$；$f(x_0)=3\cdot x_0^2-2\cdot x_0+1$；

$$f(x_0+h)=3\cdot(x_0+h)^2-2\cdot(x_0+h)+1=3x_0^2+6x_0h+3h^2-2x_0-2h+1$$
$$=3x_0^2+2x_0(3h-1)+(3h^2-2h+1);$$
$$f[f(0)]=3\cdot[f(0)]^2-2\cdot f(0)+1=3\cdot 1^2-2\cdot 1+1=2。$$

可见，求 $x=a$ 时 $y=f(x)$ 对应的函数值，只要用 a 来代替函数 $y=f(x)$ 中的自变量 x 就可以了。

习题 1.1

1. $M(x,y)$是曲线 $y=x^2$ 上的动点（如右图），问：



(1)弧$\overset{\frown}{OM}$的长度是不是 x 的函数？

(2)图上阴影部分的面积是不是 x 的函数？

2. $f(x)$与$f(x_0)$有何区别？

3. 计算函数值。

(1)$f(x)=x^2-9x+14$，求$f(2)$，$f(0)$，$f(-1)$，$f(0.5)$，$f(a+1)$，$f(x+h)$。

(2)$f(x)=x+\tan x$，求$f(0)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$f(-\pi)$，$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$。

4. $f(x)=x^2+1$，求$f(x^2)$和$[f(x)]^2$。

5. 求出下列函数的定义域。

(1)$y=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$　　(2)$y=\dfrac{x}{x^2+1}$

(3)$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　　(4)$y=\ln(1-x)+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

(5)$y=\arcsin(x-2)$

6. 下列各题中，函数$f(x)$和$g(x)$是否相等？为什么？

(1)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x}$，$g(x)=x\sqrt{x-1}$

(2)$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$，$g(x)=\sin x$

7. 将一块半径为 R 的圆形铁皮，自中心处剪去圆心角为 α 的扇形后，把剩下的部分围成一个锥形漏斗，求漏斗的容积 V 与角 α 的函数关系。

第二节　函数的极限及运算法则

一、数列及数列极限

一些数按照某一规则排成一列，第一个数叫 x_1，第二个数叫 x_2，第三个数叫 x_3，…这列有次序排列的数被称为一个数列。数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的一般项，也称为通项。例如：

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$$

$$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$$

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

都是数列，一般项分别为$\frac{n}{n+1}$，2^n，$(-1)^{n+1}$。

有限个数构成的数列称为有限数列。有限数列可用列举所有项的方式来表示，例如：$\{1,2,3\}$，$\{2,4,6,8\}$等。

无限个数构成的数列称为无限数列。无限数列可用一般项的表达式来表示，例如数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$$

记为$\{x_n\}$，其中 $x_n=\frac{n}{n+1}$。

若 $x_{n+1}-x_n=a$，a 是常数，则数列 x_n 被称为等差数列，a 被称为公差。等差数列的一般项为 $x_n=x_1+(n-1)a$。$S=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 被称为等差数列的和，$S=\frac{n(x_1+x_n)}{2}$。

若$\frac{x_{n+1}}{x_n}=q$，q 是常数，则数列 x_n 被称为等比数列，q 被称为公比。等比数列的一般项为 $x_n=x_1q^{n-1}$。$S=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 被称为等比数列的和，$S=\frac{x_1(1-q^n)}{1-q}$。

若对任意 n 均有 $x_{n+1}<x_n$，称数列 x_n 为单调减少数列；若 $x_{n+1}>x_n$，称数列 x_n 为单调增加数列；若 $x_{n+1}=x_n$，称数列 x_n 为常数数列。

数列一般项 x_n 右下角的 n 称为下标。它表示数 x_n 在数列中的位置，即数列中第 n 个数为 x_n。一般情况下，x_n 被看做是为正整数 n 的函数，即

$$x_n=f(n)$$

它的定义域是全体正整数。当自变量 n 依次取 $1,2,3,\cdots,L$ 等一切正整数时，对应的函数值就排列成数列 x_n。

定义 1.2.1　在数列$\{x_n\}$中，当 n 无限增大时（即 $n\to\infty$ 时），对应的 $x_n=f(n)$ 无限接近于某一个数 a，那么这个数 a 就被称为数列 x_n 的极限，或称数列 x_n 收敛于 a。记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

或

$$x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

读作当 n 趋于无穷时，数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限。

如果数列没有极限，就称数列是发散的。数列发散，意味着数列可能趋于无穷大或者趋于不同的值。例如，$x_n = n^2$，当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to \infty$，数列 $\{x_n\}$ 发散。数列 $x_n = (-1)^n$，当 $n \to \infty$ 时，$x_n = 1$ 或 $x_n = -1$，极限不存在，数列 $\{x_n\}$ 发散。

例 1.2.1 求数列 $\{x_n\}$

$$x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}$$

的极限。

解：所给数列的一般项是

$$x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}$$

于是

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 \pm \frac{1}{n}\right) = 1$$

定义 1.2.2 对于数列 x_n，如果存在着正数 M，使得数列中的任意项 x_n 都满足不等式

$$|x_n| \leqslant M$$

则称数列 x_n 是有界的；如果这样的正数 M 不存在，就说数列 x_n 是无界的。

例如，数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 是有界的，因为可取 $M = 1$，而使

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) \leqslant 1$$

对于一切正整数 n 都成立。

数列 $x_n = 2^n$ 是无界的，因为当 n 无限增加时 2^n 可超过任何正数。

定理 1.2.1 （收敛数列的有界性）如果数列 x_n 收敛，那么数列 x_n 一定有界。

根据上述定理，如果数列 x_n 无界，那么数列一定发散。但是，如果数列 x_n 有界，却不能断定数列一定收敛。例如数列 $\{x_n\}$，$x_n = (-1)^n$ 是有界的，但此数列发散。因为当 $n \to \infty$ 时，x_n 可能为 1，也可能为 -1，没有确定的值与之对应。因此，数列有界是数列收敛的必要条件，但不是充分条件。

二、函数的极限

因为数列 x_n 可看做自变量为正整数 n 的函数：$x_n = f(n)$，所以数列的极限也是函数的极限的一种类型。这就是：当自变量 n 取正整数而无限增大（即 $n \to \infty$）时函数 $x_n = f(n)$ 的极限。如果将自变量的范围扩大为实数，研究以下两种情形：

1. 自变量趋于有限值时函数的极限。

从函数的观点来看，数列 $x_n = f(n)$ 的极限为 a 就是：当自变量 n 取正整数而无限增大（即 $n \to \infty$）时，对应的函数值 $f(n)$ 无限接近于确定的数 a。如果把数列极限概念中的函数为 $f(n)$，自变量的变化过程为 $n \to \infty$ 等特殊性抽去，那么可以这样叙述函数极限的概念：在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的数，那么这个确定的数叫做在这一变化过程中函数的极限。

例 1.2.2　设函数$f(x)=\frac{1}{3}x-1$，当自变量x无限接近3时，函数$f(x)=\frac{1}{3}x-1$无限接近于0。上述事实可记作：当$x\to 3$时，$f(x)=\frac{1}{3}x-1\to 0$。

常数0就是当自变量x趋近于3时函数$f(x)=\frac{1}{3}x-1$的极限。

定义 1.2.3　自变量x无限地接近于数轴上某一定值x_0的过程中，对应的函数值$f(x)$无限接近于某一确定的数值a，则称常数a为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\text{ 或 }f(x)\to a(\text{当 }x\to x_0)$$

读作："当自变量x趋近于x_0时，函数$f(x)$的极限为a"。

当然，这里首先假定函数$f(x)$在点x_0的附近是有定义的。需要注意的是，函数在点$x=x_0$没有定义时，极限可能依然存在。

例 1.2.3　求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$。

解：显然，函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$在点$x=1$处是没有定义的，但是有

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

约去非零因子$x-1$后（$x\to 1$并不意味着$x=1$）就成为

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

从这个例子可以看出，$f(x)$当自变量$x\to x_0$时的极限是否存在与函数在$x=x_0$时的值是否存在并无关系。

在$x\to x_0$时，x既可以从x_0的左侧（$x<x_0$）趋向于x_0，也可以从x_0的右侧（$x>x_0$）趋向于x_0。但有时只能或只需考虑x仅从x_0的左侧趋向于x_0（记作$x\to x_0^-$）的情形，或x仅从x_0的右侧趋向于x_0（记作$x\to x_0^+$）的情形。

定义 1.2.4　自变量x从x_0的左侧（$x<x_0$）无限地接近于数轴上某一定值x_0的过程中，对应的函数值$f(x)$无限接近于某一确定的数值a，则称a为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限。记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a\text{ 或 }f(x_0-0)=a$$

读作：函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限为a。

定义 1.2.5　自变量x从x_0的右侧（$x>x_0$）无限地接近于数轴上某一定值x_0的过程中，对应的函数值$f(x)$无限接近于某一确定的数值a，则称a为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限。记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a\text{ 或 }f(x_0+0)=a$$

读作：函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限为a。

定理 1.2.2 函数$f(x)$在$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限均存在并且相等,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=a$$

这个定理是判断函数在$x\to x_0$时极限是否存在的一个重要工具。函数$f(x)$在$x\to x_0$时左极限和右极限有一个不存在,或都存在,不相等,则$f(x)$当$x\to x_0$时极限仍然不存在。

例 1.2.4 函数

$$f(x)=\begin{cases}x & x>1\\ 0 & x=1\\ x-2 & x<1\end{cases}$$

当$x\to 1$时$f(x)$的极限不存在。显然,函数$f(x)$在$x\to 1$时的左极限是-1,而右极限是$+1$。因为左极限和右极限不相等,所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在(如图 1.2.1)。

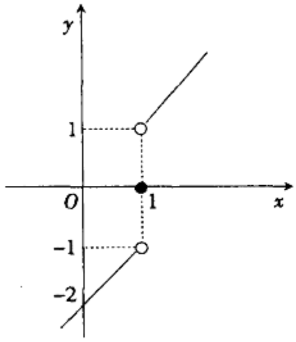


图 1.2.1

2. 自变量趋向无穷大时函数的极限。

定义 1.2.6 函数$f(x)$在整个实数域上有定义。如果在距坐标原点很远的地方,即$x\to\infty$的过程中,如果对应的函数值$f(x)$无限接近于一个确定的常数a,那么a被称为函数$f(x)$在$x\to\infty$时的极限。记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a\ \text{或}\ f(x)\to a(\text{当}\ x\to\infty)$$

与函数$f(x)$在$x\to x_0$时的左右极限定义相似,x趋近于正的无穷大(记作$x\to+\infty$)时,对应的函数值$f(x)$无限接近于一个确定的常数a,那么a被称为函数$f(x)$在$x\to+\infty$时的极限。记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a$$

同样,x趋近于负的无穷大(记作$x\to-\infty$)时,对应的函数值$f(x)$无限接近于一个确定的常数a,那么a被称为函数$f(x)$在$x\to-\infty$时的极限。记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=a$$

若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,那么直线$y=a$被称为函数$y=f(x)$的图形的水平渐近线。

三、无穷小与无穷大

定义 1.2.7 如果函数$f(x)$在$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的极限为零,称函数$f(x)$在$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷小。记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\ \text{或}\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

例 1.2.5 因为$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,所以函数$f(x)=x-1$在$x\to 1$时为无穷小。

例 1.2.6 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,所以函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$x\to\infty$时为无穷小。

注意,不要把无穷小与很小的数(例如百万分之一)混为一谈。因为无穷小是一个函数,在$x\to x_0$(或$x\to\infty$)的过程中,这个函数的值与零非常接近,其绝对值能小于任意给定的正数,而很小的数如百万分之一,就不能小于这个任意给定的ε。

零是可以作为无穷小的唯一常数,因为如果$f(x)\equiv 0$(读作$f(x)$恒等于零),那么对于任