亮剑英才
Liang jian ying cai

高考要点突破策略

第二轮复习必备丛书

数学

丛书主编　唐剑英

实用常考
——专题设置独树一帜

科学合理
——体例设计独具一格

前瞻新颖
——规律分析独抒己见

海南出版社

新专题　　新品牌　　新感觉　　新收获

前　言

古诗曰："鸿鹄高飞，一举千里。羽翼已就，横绝四海。"亲爱的朋友，我们想让您的理想如鸿鹄高飞，如方舟济海，到达成功的彼岸。为此，我们特组织了多年奋斗在高三教学一线的拔尖教师，在认真研究考试大纲和教辅图书现状的基础上，本着"人无我有，人有我新，人新我特"的编写理念，倾情打造了这套高考第二轮复习用书。这是一套与众不同、特色鲜明的复习用书。具体说来，它拥有如下亮点：

1.在体例的编排上，强化了操作性

综观高考第二轮复习用书，在体例的编排上大多是按照知识版块或考点由易到难编排的，实际上考点的冷热程度有别、难易程度各异，因而如此编排，可操作性自然大打折扣。

本丛书在体例的编排上，大胆打破常规，依据高考第二轮复习各科的课时量安排内容，采用小专题的形式编排，每个小专题的复习时间一般为1~2课时。这样既方便了老师的教学，又有利于学生突出重点、一课一得。其操作性自不待言。

2.在内容的选择上，注重了实用性

高考第二轮复习是第一轮复习的深化与提高。这一时段对考生而言，时间紧，任务重，因而一些基础性的知识和无关大局的考点内容，完全没有重复的必要。如果复习内容面面俱到、贪多求全，则势必劳神费力，无谓地消耗考生宝贵的复习时间和精力，得不偿失。为此，我们在编写过程中注重了复习内容的实用性。所选内容瞄准考试的重点、难点、热点，学生知识的盲点、常错点、易混点，对一些无关大局的考点不作涉及。通过精讲细析，辨疑释难，使考生理解、掌握。

3.在栏目的设置上，遵循了连贯性

"知识点睛"，简明扼要，使考生过滤知识、了然于心；"突破策略"，一语中的，使考生思维灵动、左右逢源；"典型例题"，有的放矢，使考生过关斩将、得心应手；"跳出陷阱"，点击命题陷阱、答题误区，使考生练就一双火眼金睛，从而避免失蹄；"仿真演练"，使考生举一反三、稳操胜券。

4.在题目的选定上，突出了新颖性

"典型例题"新颖、新鲜，考虑了题型的多变性，有以一当十之功；"仿真演练"经典、权威，注重知识的辐射性，有举一反三之效。

总之，这是一套不可或缺的高考第二轮复习用书，是书界的一朵奇葩异卉。她处处创新，让您步步超前；她取舍精当，让您事半功倍；她讲解细致，让您疑惑顿消。她是您成就理想、实现梦想的推进器！

"亮剑英才"教育研究中心

2006年12月

目　录

CONTENTS

第一篇　函数与导数

总　论　高考要点与命题趋势 …………（1）
专题一　函数的性质与应用 …………（1）
专题二　二次型问题求解策略 …………（3）
专题三　导数的应用 …………（5）
专题四　解不等式与恒成立问题 …………（7）
专题五　抽象函数题求解策略 …………（8）
专题六　函数应用问题 …………（10）

第二篇　三角函数

总　论　高考要点与命题趋势 …………（13）
专题一　三角函数的化简与求值 …………（13）
专题二　三角函数的图象及其变换 …………（15）
专题三　三角形中的三角问题 …………（17）

第三篇　数列

总　论　高考要点与命题趋势 …………（20）
专题一　数列基本公式与性质的应用 …………（20）
专题二　递推数列问题处理策略 …………（23）
专题三　数列应用题处理策略 …………（25）
专题四　函数、数列、不等式综合问题（一） …………（27）
函数、数列、不等式综合问题（二） …………（30）
专题五　数列创新题求解策略 …………（31）

第四篇　圆锥曲线

总　论　高考要点与命题趋势 …………（33）

专题一　圆锥曲线的概念与性质 …… (34)
专题二　圆锥曲线中的轨迹问题 …… (36)
专题三　圆锥曲线中的对称问题 …… (38)
专题四　圆锥曲线中的不等式问题(一) …… (40)
专题五　圆锥曲线中的不等式问题(二) …… (42)
专题六　含参数的圆锥曲线问题 …… (43)

第五篇　向量与几何

总　论　高考要点与命题趋势 …… (47)
专题一　用平面向量解决平面几何问题 …… (47)
专题二　空间角 …… (49)
专题三　空间距离 …… (52)
专题四　平面图形的翻折与拼接 …… (54)

第六篇　排列、组合与概率

总　论　高考要点与命题趋势 …… (58)
专题一　排列、组合与二项式定理 …… (58)
专题二　概率问题处理策略 …… (61)
专题三　随机变量与统计 …… (63)

第七篇　能力演练与升华

专题一　选择题求解策略 …… (67)
专题二　填空题求解策略 …… (70)
专题三　常用数学方法 …… (72)
　一、配方法与待定系数法 …… (72)
　二、换元法与反证法 …… (75)
　三、数学归纳法(理科选用) …… (78)
专题四　高考中常用的数学思想 …… (81)
　一、函数与方程思想 …… (81)
　二、分类整合思想 …… (84)
　三、等价转化思想 …… (87)

第一篇　函数与导数

总论　高考要点与命题趋势

本章是高中数学最重要的基础知识，是整个中学数学的一条主线．所涉及的高考要点主要包括函数的定义域、值域（最值）、单调性、奇偶性、周期性、对称性、反函数以及一次函数、二次函数、指数函数、对数函数等函数的图象及其变换；导数与极限的概念理解，导数单调性质、极值性质、几何性质、物理性质的概念理解，导数与函数、数列、不等式等知识结合起来的综合题的解答；证明不等式的基本方法：差比较法、综合法、分析法，重点是差比较法；一元一次不等式（组）、一元二次不等式的解法；简单的无理不等式、指数不等式、对数不等式的解法．

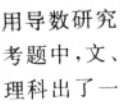
纵观历年高考试题，这一部分内容的分值通常约占总分的25%～30%，从近三年的湖南卷来看，2004年高考中，本篇约占28%，在2005年高考中，本篇在文、理科中分别约占25.3%、30%；在2006年高考中，本篇在文、理科中分别约占20%、30%．也就是说，只要学好本篇，高考的三分天下有其一！

今后高考预测：函数、导数、不等式仍然是高考的重要内容，分值保持在25%～33%．高考题型大致是：函数的性质、解不等式、不等式与导数的简单计算、利用导数解决函数的单调性与极值仍然以小题出现，题量保持在3～5个选择题、填空题，导数或函数的应用作一大题出现，三角函数、向量、概率、数列、解析几何等内容的综合题有1～2题．

专题一　函数的性质与应用

知识点睛

纵观2006年全国及各省市的高考试题，函数问题进一步创新，试题设计新颖、灵活多变，运算量减少，思维力度增加，这一部分内容的分值约占总分的10%左右．从命题的策略来看，函数的考查的方式有所变化：1．函数与导数结合起来；2．函数与线性规划及应用题结合起来．就湖南省的高考题来看，本专题在高考中的比重有逐年递增的趋势，2004年出了反函数（第3题）和分段函数（第6题）试题，共10分；2005年考了求函数的值域（理科第2题、文科第4题）、二次函数的应用（文科第10题），共计理科5分、文科10分，但文理科均考了利用导数研究函数的性质方面的试题；2006年的高考题中，文、理科的第1道题就是求函数的定义域，理科出了一道函数的应用题，使得理科在此专题的分值达到19分．



突破策略

1．深刻理解映射、函数的法则与性质．映射 $f:A\to B$ 具有性质：①存在性：任给 $a\in A\Rightarrow f(a)=b\in B$；②唯一性：任给 a_1、$a_2\in A$，若 $a_1=a_2$，则 $f(a_1)=f(a_2)$．

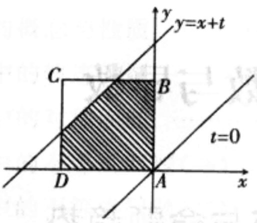
2．掌握函数与图象的对应关系，注意利用函数图象解决实际应用问题．同学们在熟悉常见的一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数的图象的基础上，通过反复训练，使自己的解题能力、综合能力得以逐步提高．

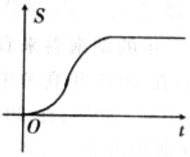
3．掌握求函数的解析式的换元法、反函数法等方法．理解判定函数的奇偶性的法则：(1)看定义域是否关于原点对称；(2)看关系式是否出现 $f(-x)=-f(x)$（此为奇函数）或 $f(-x)=f(x)$（此为偶函数）．掌握判定函数的单调性的方法：对于属于定义域内任意两个自变量的值 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增（减）函数．

4．明确反函数的概念，理解反函数的意义和一些常见符号的意义，掌握求反函数的方法和步骤，理解反函数与原函数的关系等，并能解决相应的综合题．

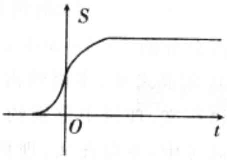
【例题】 如图所示，四边形 $ABCD$ 是正方形，

在直线 $l: y=x+t$ 下方的面积记为 S（图中的阴影部分的面积），当 l 自下而上移动时，直线 l 所扫过的面积 S 关于 t 的函数图象大致是　　　（　　）

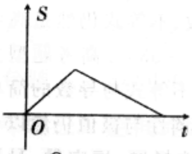




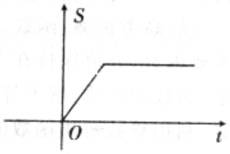
A



B



C



D

【解析】 选 A. 因为当 l 自下而上移动到点 C，当 $t<0$ 时，$S=0$；当直线 l 移向 BD 时，S 关于 t 的函数是开口向上的二次函数；当直线 l 继续向上移动时，S 关于 t 的函数是开口向下的二次函数；当直线 l 扫过 C 点继续向上移动时，S 关于 t 的函数是平行于 x 轴的射线. 故选 A.

典型例题

【例 1】 设 $f(x)=\tan x+\frac{a^x}{1-a^x}+x^2+\frac{1}{2}$（其中 a 为常数），且 $f(-2)=5$，试求 $f(2)$ 的值是　　（　　）

A. -2　　B. 3　　C. 6　　D. 24

【例 2】 函数 $y=f(x)$ 与 $y=1-f^{-1}(1-x)$ 的图象　　（　　）

A. 关于直线 $y=x-1$ 对称

B. 关于直线 $y=x+1$ 对称

C. 关于直线 $y=-x-1$ 对称

D. 关于直线 $y=-x+1$ 对称

【例 3】 已知函数 $g(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 (x>1)$，且函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x-y=0$ 对称. (1) 求函数 $f(x)$；(2) 判定函数 $f(x)$ 在其定义域内的单调性；(3) 若不等式 $(1-\sqrt{x})f(x)>a(a-\sqrt{x})$ 对 $x\in\left[\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right]$ 恒成立，试求 a 的取值范围.

【例 4】 已知函数 $f(x^2-1)=\log_m \frac{x^2}{2-x^2}$ ($m>0$ 且 $m\neq 1$). (1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性；(2) 解关于 x 的方程 $f(x)=\log_m \frac{1}{x}$；(3) 解关于 x 的不等式 $f(x)\geq \log_m(3x+1)$.

跳出陷阱

【题目】 函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{9}\right)^x+1$ 的值域是　　（　　）

A. $\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$　　D. $[1,+\infty)$

【错解】 $\because y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{9}\right)^x+1=\left(\frac{1}{3}\right)^x+$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+1$，设 $t=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$，

∴ $y=t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$.

∴该函数的值域是 $\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$，应选 A.

【剖析】 换元以后出现了新元，而上述解答忽视了新元的取值范围，以致出错.

【正解】 ∵ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\left(\frac{1}{9}\right)^{x}+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+1$，设 $t=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$，则 $t\in(0,+\infty)$.

由于 $y=t^2+t+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $y=t^2+t+1>1$.

∴该函数的值域是 $(1,+\infty)$，应选 B.

仿真演练

1. 设 $x\in\{x\mid x\in\mathbf{N}$，且 $x\leqslant40\}$，则函数 $f(x)=\sin x\cdot C_{40}^{20+x}$ 是　　(　　)

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数，又是偶函数

D. 既不是奇函数，也不是偶函数

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1-x\sin2\alpha}{x\sin\alpha\cos\alpha}$ $\left[\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right]$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的最大值是 N，则　　(　　)

A. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的最小值是 $-N$

B. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的最大值是 $-N$

C. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的最大值是 $-N-2$

D. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的最小值是 $-N-4$

3. 设 $m\in\mathbf{N}^*$，$\log_2 m$ 的整数部分用 $F(m)$ 表示，则 $F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(1024)$ 的值是　　(　　)

A. 8204　　B. 8192

C. 9218　　D. 以上都不对

4. 设 $a_n=\log_{n+1}(n+2)(n\in\mathbf{N}_+)$，使 $a_1a_2\cdots a_k$ 为整数的数 $k(k\in\mathbf{N}_+)$ 叫做企盼数，在区间 $[1,2004]$ 内所有企盼数的和 $M=$______.

5. 对任意实数 x_1,x_2，$\min\{x_1,x_2\}$ 表示 x_1,x_2 中较小的那个数，若 $f(x)=2-x^2$，$g(x)=x$，则 $\min\{f(x),g(x)\}$ 的最大值是______.

6. 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}(x\neq-1,n\in\mathbf{N}_+)$，记 $f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))$，求函数 $f_n(x)$ 的解析式.

专题二　二次型问题求解策略

知识点睛

二次函数是高中数学最基本最简单的函数，同时也是其他数学知识的载体.二次型问题是高考经久不衰的热点问题之一. 在高考中，主要考查的知识点有：1. 二次函数的图象与性质；2. 二次函数、二次方程与二次不等式相互转化的关系；3. 二次函数的最值问题；4. 二次函数根的分布问题. 常作为压轴题出现，分值比较高，更多的是将二次函数与数列、不等式、导数的知识结合起来. 纵观历年全国及各省市的高考试题，二次函数试题得到进一步创新，试题设计新颖、灵活多变，如三次函数的导数是二次函数. 这一部分内容的分值在总分值中的比例并不确定，但与二次函数结合起来的试题却越来越多. 就近三年湖南省的高考题来看，2004 年出了一道二次函数与分段函数（第 6 题）试题，5 分；2005 年考了二次函数与概率相结合（理科第 18 题 7 分）、二次函数与导数相结合（理科第 21 题 14 分、文科第 19 题 14 分）、二次函数的应用（文科第 10 题），共计理科 26 分、文科 19 分；2006 年的高考题中，理科的第 5 题、第 16 题是将二次函数与三角函数结合起来，第 21 题解析几何试题中也应用了二次型知识. 文科的第 16 题是将二次函数与三角函数结合起来，第 19 题将二次函数与导数结合起来，第 21 题解析几何试题中也应用了二次函数中的韦达定理等知识.

突破策略

1. 构造二次函数，运用判别式法解决实际问题，即利用性质：二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 恒大于零的充要条件是 $\Delta=b^2-4ac<0$.

2. 求二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 在区间 $[m,n]$ 上的最值的方法：① 当 $-\frac{b}{2a}\in[m,n]$ 时，$y_{\min}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$，$y_{\max}=\max\{f(m),f(n)\}$；② 当 $m<n<-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{\min}=f(n)$，$y_{\max}=f(m)$；③ 当

$-\dfrac{b}{2a}<m<n$ 时，$y_{\min}=f(m)$，$y_{\max}=f(n)$.

3. 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 只有一个根属于 $(m,n)\Leftrightarrow f(m)\cdot f(n)<0$；有两根在区间 (m,n) 内$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}b^2-4ac\geqslant0,\\ af(m)>0,\\ af(n)>0,\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n;\end{cases}$ 有两根分别位于区间 (m,n) 左、右两侧$\Leftrightarrow\begin{cases}a\cdot f(m)<0,\\ a\cdot f(n)<0;\end{cases}$ 有两根同在区间 (m,n) 的左（或右）侧$\Leftrightarrow\begin{cases}a\cdot f(m)>0,\\ a\cdot f(n)>0,\\ b^2-4ac\geqslant0,\\ -\dfrac{b}{2a}<m,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\cdot f(m)>0,\\ a\cdot f(n)>0,\\ b^2-4ac\geqslant0,\\ -\dfrac{b}{2a}>n.\end{cases}$

典型例题

【例 1】 设函数 $f(x)=x^2-4x-4$ 的定义域是 $[t-2,t-1]$，对任意的 $t\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 的最小值是 $g(t)$，则 $g(t)$ 的最小值是　　（　　）

A. -8　　B. -6　　C. 0　　D. 4

【例 2】 对于任意 $a\in[-1,1]$，函数 $f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$ 的值恒大于零，则实数 x 的取值范围是______.

【例 3】 设 $A(0,3)$，$B(3,0)$，函数 $y=x^2-mx+7$ 与线段 AB 恒有两个相异的交点，试求实数 m 的取值范围.

【例 4】 已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，在 $(0,2)$ 上是减函数，并且 $f(x)=0$ 有三个根，它们分别是 α、2、β. (1)求 c 的值；(2)求证：$f(1)\geqslant2$；(3)求证 $|\alpha-\beta|\geqslant3$.

跳出陷阱

【题目】 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，如果不等式 $f(1-ax-x^2)<f(2-a)$ 对于 $x\in[0,1]$ 都成立，求实数 a 的范围.

【错解】 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，不等式 $f(1-ax-x^2)<f(2-a)$ 等价于 $1-ax-x^2<2-a$，即 $x^2+ax+1-a>0$ 对 $x\in[0,1]$ 都成立，则 $\Delta=a^2-4(1-a)<0$.

解得：$-2-2\sqrt{2}<a<-2+2\sqrt{2}$.

【剖析】 运用判别式求实数 a 的范围要小心，$x^2+ax+1-a>0$ 恒成立只有当 $x\in\mathbf{R}$ 时，才能保证所求范围是正确的.

【正解】 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，不等式 $f(1-ax-x^2)<f(2-a)$ 等价于 $1-ax-x^2<2-a$，即 $x^2+ax+1-a>0(x\in[0,1])$，令 $g(x)=x^2+ax+1-a$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值大于 0，由于 $g(x)$ 的对称轴是 $x=-\dfrac{a}{2}$，则

(1)当 $a>0$，即 $-\dfrac{a}{2}<0$ 时，$g(x)_{\min}=g(0)=1-a>0$，得 $0<a<1$；

(2)当 $-2\leqslant a\leqslant0$，即 $0\leqslant-\dfrac{a}{2}\leqslant1$ 时，$g(x)_{\min}=g\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}a^2-a+1>0$，得 $-2\leqslant a\leqslant0$；

(3)当 $a<-2$，即 $-\dfrac{a}{2}>1$ 时，$g(x)_{\min}=g(1)=2>0$，得 $a<-2$.

故实数 a 的范围是 $(-\infty,1)$.

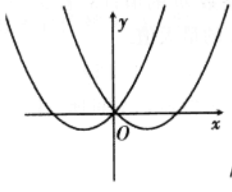
仿真演练

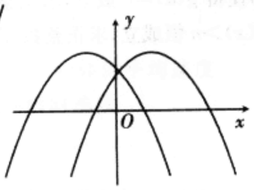
1. 一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq0)$ 有一

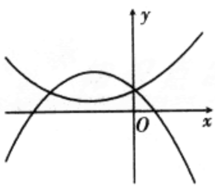
个正根和一个负根的充分不必要条件是 (　　)

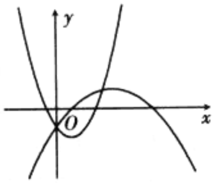
A. $a<-1$　B. $a<0$　C. $a>0$　D. $a>1$

2. 如下图所示，$f(x)=ax^2+bx+c$ 与 $g(x)=bx^2+ax+c$ 的图象只可能是 (　　)


A


B


C


D

3. 已知 $f(x)=(x-a)(x-b)-2(a<b)$，并且 α、β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根($\alpha<\beta$)，则 a、b、α、β 的大小关系是______.

4. 已知方程 $m\cdot 2^{2x}+(2m-1)\cdot 2^x+m=0$ 在$(-\infty,1)$内有两个不同的根，求实数 m 的取值范围.

5. 已知$(m-2)x^2+mx+(2m+1)=0$ 的两个根分别属于$(-1,0)$，$(1,2)$，求实数 m 的取值范围.

6. 函数 $f(x)=x^2+ax+3$，当 $x\in[-2,2]$时，$f(x)\geqslant a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

专题三　导数的应用

知识点睛

导数是新教材增设的内容，是学习高等数学的基础，它是从众多实际问题中抽象出来的一个重要数学概念，在自然科学、工程科学方面具有广泛的应用. 作为重要的解题工具之一，导数在近年来的高考中所占的比例也越来越大，目前主要考查的知识点有：1. 导数与极限的概念理解；2. 导数单调性质、极值性质、几何性质、物理性质的概念理解；3. 导数与函数、数列、不等式等知识结合起来的综合题的解答. 纵观历年全国及各省市的高考试题，导数部分在高考试题中所占的比例约为 10%～15%. 就近三年湖南省的高考题来看，2004 年理科的第 12、20 题为导数试题，共 17 分. 2005 年理科的第 6、14、21 题为导数试题，共 23 分；文科的第 19 题为导数试题，计 14 分. 在 2006 年的高考题中，理科的第 8、19 题为导数试题，共 19 分；文科的第 19 题为导数试题，计 14 分.

在今后高考试题中，我们可以预测：1. 利用导数在求切线的斜率、求函数的最值作为小题出现；2. 利用导数在解析函数的单调性方面的性质，解决有关不等式，单调区间方面的试题仍然是高考的热点；3. 注意导数试题题型的转向，即导数与数列结合起来，利用导数解决瞬时速度、加速度、光滑曲线的斜率等实际问题.

突破策略

1. 记忆公式：1. $C'=0$，2. $(x^n)'=nx^{n-1}$，3. $(\sin x)'=\cos x$，4. $(\cos x)'=-\sin x$，5. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，6. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$，7. $(e^x)'=e^x$，8. $(a^x)'=a^x\ln a$.

2. 掌握利用导数证明不等式的方法：证明 $f(x)>g(x)$，$x\in(a,b)$的方法是：作函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，首先证明 $F(a)\geqslant 0$，然后证明 $F'(x)>0$，即 $F(x)$在区间(a,b)内是增函数. 或者首先$F(b)\geqslant 0$，然后再证明 $F'(x)<0$，即 $F(x)$在区间(a,b)内是减函数.

3. 利用导数求曲线 $y=f(x)$在某点(x_0,y_0)的切线的方法是：求出曲线 $y=f(x)$在某点(x_0,y_0)的斜率 $k=f'(x_0)$，然后利用直线点斜式方程 $y-y_0=k(x-x_0)$即可.

4. 利用导数探讨方程 $f(x)=0$ 根的分布，解决相应综合题的方法是：首先求导，解出函数 $y=f(x)$的极值及单调区间，然后画出函数 $y=f(x)$

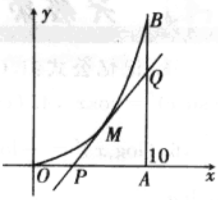
的图象，根据函数的图象来探讨方程 $f(x)=0$ 根的分布.

典型例题

【例 1】 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\leq 1)\\ ax+b & (x>1)\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a=$______，$b=$______.

【例 2】 (1)求曲线 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 在点(1,1)处的切线方程；(2)运动曲线方程为 $S=\dfrac{t-1}{t^2}+2t^2$，求 $t=3$时的速度 v.

【例 3】 如图所示，已知点 $B(10,1000)$，曲线段 OMB(不包括端点)是函数 $f(x)=x^3(0<x<10)$的图象，若 $BA\perp x$ 轴于 A，曲线段 OMB 上一点 $M(t,f(t))$处的切线 PQ 交 x 轴于 P，交线段 AB 于 Q. (1)试用 t 表示切线 PQ 的方程；(2)试用 t 表示$\triangle QAP$的面积为$g(t)$；(3)当$\triangle QAP$的面积最大时，试求出点 M 的横坐标的取值范围.



【例 4】 已知函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}$.

(1)设 $g(x)=x^2f'(x)(x>0)$. 试证明 $g(x)$在区间$(0,+\infty)$内为增函数；(2)若存在唯一的实数 $a\in(m,m+1)$使得 $g(a)=0$ 成立，求正整数 m 的值；(3)若 $x>0$，$f(x)>n$ 恒成立，求正整数 n 的最大值.

跳出陷阱

【题目】 求函数 $f(x)=x^3-3x^2+3x$ 的极值点.

【错解】 $f'(x)=3x^2-6x+3$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$. 故其极值点是(1,1).

【剖析】 函数的极值点 $x=x_0$ 必须具备条件：(1)函数在该点有定义；(2)函数在该点的导数 $f'(x_0)=0$；(3)函数在 $x=x_0$ 点两侧导数的符号相异.

【正解】 $\because f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0$，即 $f'(x)|_{x=1}=0$，而在点 $x=1$ 两侧导数的符号均为正，函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 点 $x=1$ 不是其极值点，该函数没有极值点.

仿真演练

1. 已知函数 $f(x)=\sin^2(2x^2-3x+1)$，则 $f'(0)$的值等于 ( )

A. $2\sin1$　　B. $-2\sin1$

C. $-3\sin2$　　D. $3\sin2$

2. 若 $f'(x_0)=-3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-3h)}{h}$ 等于 ( )

A. -3　B. -6　C. -9　D. -12

3. 若函数 $f(x)=\cos x$，则函数图像在点$(4,f(4))$处的切线的倾斜角为 ( )

A. 90°　B. 0°　C. 锐角　D. 钝角

4. 函数 $y=2x^3-3x^2-12x+5$ 在$[0,3]$上的

最大值、最小值分别是　（　）

A. 5，−15　　B. 5，−4

C. −4，−15　　D. 5，−16

5. 一直线运动的物体，从时间 t 到 $t+\Delta t$ 时，物体的位移为 Δs，那么 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 为　（　）

A. 从时间 t 到时 $t+\Delta t$，物体的平均速度

B. 时间 t 时该物体的瞬时速度

C. 当时间为 Δt 时该物体的速度

D. 从时间 t 到 $t+\Delta t$ 时，位移的平均变化率

6. 已知函数 $f(x)=ax^3+cx+d(a\neq 0)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极值 -2.（1）求 $f(x)$ 的单调区间和极大值；（2）证明对任意 x_1，$x_2\in(-1,1)$，不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<4$ 恒成立.

专题四　解不等式与恒成立问题

知识点睛

不等式与恒成立问题是中学数学的重点内容，是进一步学习高等数学的基础知识和重要工具，因而也是数学高考的考查重点．要善于利用不等式的性质解、证不等式，证明不等式既是重点又是难点，要求掌握证明不等式的基本方法：差比较法、综合法、分析法，重点掌握差比较法．熟练掌握一元一次不等式（组）、一元二次不等式（组）的解法，在此基础上掌握简单的无理不等式、指数不等式、对数不等式的解法．

本专题在全国各省市高考中所占的比例大约是12%～20%，其命题的思想是将不等式知识与数学的各个章节有机地结合起来．在2004年湖南高考数学试卷（理科）中，第6题是不等式与分段函数相结合的问题，第7题是不等式（恒不成立）问题，第9题是不等式与线性规划问题，第12、20题是不等式与导数问题，共计32分．在2005年湖南理科卷中，第4题是不等式与线性规划相结合问题，第8题是不等式与充要条件问题；在2005年湖南文科卷中，第6题是不等式与充要条件问题，第16题第2问是不等式与数列相结合问题．其中文科11分，理科10分．在2006年湖南理科卷中，第8题是不等式与导数相结合问题，第12题是不等式与线性规划相结合问题，第20题是不等式的应用题；在2006年湖南文科卷中，第13题是不等式与线性规划相结合的问题，第19题是不等式与导数相结合问题．其中文科19分，理科23分．

突破策略

1. 掌握比较法、分析法、综合法、放缩法等证明不等式的方法．必须记忆的公式有：$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a,b\in\mathbf{R}^+)$，$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc(a,b\in\mathbf{R}^+)$，$\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（$a,b\in\mathbf{R}^+$），$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，并注意“一正二定三相等”的含义．

2. 掌握整式不等式、分式不等式、一元二次不等式、指数对数不等式、无理不等式的解法．

3. 掌握用分零点讨论的方法解决含有两个绝对值符号的绝对值不等式的解法．还须记忆公式：$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$，$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$，$a<|x|<b(a>0)\Leftrightarrow -b<x<-a$ 或 $a<x<b$，．

4. 形如“$a\geqslant f(x)$”、“$m<g(x)$”之类的不等式对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的问题，要能求出 $f(x)$ 的最大值、$g(x)$ 的最小值，即 $a\geqslant f(x)_{\max}$、$m<g(x)_{\min}$．

典型例题

【例1】 设 x,y 是正数，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$，则 $x+y$ 的最小值是　（　）

A. 12　　B. 16　　C. 20　　D. 24

【例2】 已知二次函数 $f(x)=bx^2+ax$ 满足 $-1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$3\leqslant f(1)\leqslant 4$，试求 $f(-2)$ 的取值范围.

【例 3】 设 $a>0$，解不等式 $\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+2$.

【例 4】 若不等式 $x|x-a|<b$ 对于 $(0,1]$ 中的任何 x 恒成立，求实数 a 的范围.

跳出陷阱

【题目】 解不等式 $x\sqrt{x^2-2x-3}\leqslant 0$.

【错解】 原不等式等价于 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ x^2-2x-3\geqslant 0,\end{cases}$ 就是 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ x\leqslant -1\text{ 或 }x\geqslant 3,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant -1$，故原不等式的解集是 $(-\infty,-1]$.

【剖析】 $x=0$ 或 $x=3$ 显然是原不等式的解，由于忽视"$\geqslant$"、"$\leqslant$"符号的双重性，导致不等式的变形不等价.

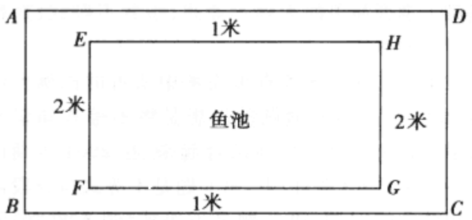
【正解】 原不等式等价于 $x\sqrt{x^2-2x-3}<0$ 或 $x\sqrt{x^2-2x-3}=0$，即 $\begin{cases}x<0\\ x\leqslant -1\text{ 或 }x\geqslant 3\end{cases}$，或 $x=-1$，或 $x=3$，或 $\begin{cases}x=0,\\ x^2-2x-3\geqslant 0,\end{cases}$ 就是 $x\leqslant -1$，或 $x=3$. 故原不等式的解集是 $(-\infty,-1]\cup\{3\}$.

仿真演练

1. 设 $2x+3y=1$，若 $m\geqslant xy+1$ 对于任何 $x,y\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是______.

2. 设函数 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+4^x\cdot a}{3}$，如果当 $x\in(-\infty,1]$ 时，$f(x)$ 恒有意义，则实数 a 的取值范围是______.

3. 如图，要挖一个面积为 800 平方米的矩形鱼池，并在鱼池的四周留出左右宽 2 米、前后宽 1 米的小路，则占地总面积的最小值是______平方米.



4. $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ 成立的充要条件是__________________；(2)若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，试证明 $abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

5. 设 $a>0$，关于 x 的不等式 $x^2-\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)x+1\leqslant 0$. (1)解这个不等式；(2)若这个不等式的解区间的长度不短于 1，求实数 a 的取值范围.

6. 解关于 x 的不等式 $\dfrac{(a-1)x-a+2}{x-2}>0$.

专题五　抽象函数题求解策略

知识点睛

在近年的高考题中，抽象函数所占的比例呈上升趋势. 所谓抽象函数就是没有给出具体的函数形式的函数. 而同学们对于有关抽象函数的定义域、值域、单调性、周期性、对称性、奇偶性等性质方面掌握得不够透彻，对于这些性质相应的规律性总结得不多，很难找到解决问题的突破口. 考虑到这方面的高考试题不但形式多样，而且突出考查学生

联系与转化、分类与讨论、数与形结合等重要的数学思想、能力，我们不得不充分地重视. 本专题在全国各省市高考中所占的比例大约是 3%～10%，纵观 2006 年全国高考题，大部分省市均考查了抽象函数，尤其在江西卷中第 5、12、16 题，均是抽象函数试题，分值达到了 14 分，重庆卷的第 9、21 题也是抽象函数试题，分值达到了 17 分之多！

由于抽象函数试题能很好地考查学生掌握知识的情况，有利于考查学生的综合能力，所以在今后高考中将会继续以小题为主，在大题中设计一问为抽象函数，另一问是其他知识.

突破策略

1. 具有“$f(x+a)=-f(x)$”、“$f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$”、“$f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$”等特征的抽象函数是周期为 $2a$ 的周期函数；具有特征“$f(x+2a)=f(x+a)-f(x)$”的抽象函数是周期为 $6a$ 的周期函数.

2. 掌握以三角函数、指数函数、对数函数为模型的抽象函数的解题方法.

3. 了解一些典型的抽象函数的综合题的解法.

【例题】 函数 $f(x)$ 对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)-1$，当 $x>0$ 时，$f(x)>1$. (1)求证 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；(2)若 $f(3)=4$，解不等式 $f(m^2+m-5)<2$.

【解析】 (1)设 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，$f(x_2-x_1)>1$，$f(x_2-x_1)-1>0$，

$f(x_2)-f(x_1)=f[(x_2-x_1)+x_1]-f(x_1)=[f(x_2-x_1)+f(x_1)-1]-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

(2)$\because f(x+y)=f(x)+f(y)-1$，$\therefore f(2)=f(1)+f(1)-1=2f(1)-1$

$f(3)=f(2)+f(1)-1=3f(1)-2$，而 $f(3)=4$，则 $f(1)=2$，故不等式 $f(m^2+m-5)<2$ 可变形为 $f(m^2+m-5)<f(1)$，考虑到 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，则 $m^2+m-5<1$，即 $m^2+m-6<0$，就是 $-3<x<2$. 故不等式 $f(m^2+m-5)<2$ 的解集是 $(-3,2)$.

【点评】 解决这种类型的抽象函数试题，首先要明确函数的奇偶性、单调性等性质，并给出其证明，还要善于利用所给的关系式，将不等式的另一侧的数字也化成抽象函数的形式.

典型例题

【例 1】 已知函数 $f(2x-1)$ 的定义域是 $[0,1]$，试求函数 $f(1-3x)$ 的定义域.

【例 2】 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：(1) $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$；(2) $f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$；(3)当 $x\in[0,2)$，时，$f(x)=2^x+3$，则 $f(2007)$ 的值是　（　）

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

【例 3】 设 $f_1(x)=\frac{x-1}{x+1}$，记 $f_n(x)=f_1[f_{n-1}(x)]$，则 $f_{2007}(x)$ 的解析式是　（　）

A. $-\frac{1}{x}$　　B. $\frac{x-1}{x+1}$　　C. $\frac{x+1}{1-x}$　　D. x

【例 4】 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 对于任意的 x、y 满足 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且当 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$. (1)证明 $f(0)=1$，且当 $x<0$ 时，$f(x)>1$；(2)设集合 $A=\{(x,y)\mid f[(x-2)^2]\cdot f[(y-2)^2]\geqslant f(2)\}$，$A=\{(x,y)\mid f(kx-y)=1\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，试求 k 的范围.

跳出陷阱

【题目】 已知 $y=f(x-1)$ 是偶函数，则 $y=f(x)$ 关于下列直线中的一条直线对称，那么该直线的方程是　　(　　)

A. $x=0$　　B. $x+1=0$

C. $2x-1=0$　　D. $y=x$

【错解】 ∵$y=f(x-1)$ 是偶函数，则 $f(x-1)=f[-(x-1)]=f(1-x)$，即 $f(t)=f(-t)$，∴函数 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称，即应选 A.

【剖析】 设 $g(x)=f(x-1)$ 是偶函数，则 $g(-x)=g(x)$，即 $f(x-1)=f(-x-1)$，而不是 $f(x-1)=f[-(x-1)]=f(1-x)$.

【正解】 因为 $y=f(x-1)$ 是偶函数，则 $f(x-1)=f(-x-1)$，即 $f(x-1)=f(-x-1)=f[-2-(x-1)]$，就是 $f(x)=f(-2-x)$，即点 $(x_0,f(x_0))$ 关于 $x=-1$ 的对称点是 $(-2-x_0,f(-2-x_0))$，所以 $y=f(x)$ 关于 $x+1=0$ 对称. 即选 B.

仿真演练

1. 已知函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,-1)$，则 $f^{-1}(x+4)$ 的图象一定经过点　　(　　)

A. $(-1,-4)$　　B. $(-4,-1)$

C. $(0,-5)$　　D. $(-5,0)$

2. 已知函数 $f(x)=\sin x+x^5+\tan x$，$x\in(-1,1)$，解不等式 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求函数 $f\left(\lg\dfrac{x^2+x}{2}\right)$ 的定义域.

4. 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(x+3)$，$f\left(\dfrac{5}{2}-x\right)=f\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$. 且方程 $f(x)=0$ 在 $[0,10)$ 上有四个根，试求该方程在区间 $[0,2000)$ 上的所有根的和.

5. 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$，当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f(1)=2$. 解不等式 $f(3x-x^2)>4$.

6. 设定义在 **N** 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(1)=-1$，$f(2)=-2$，$f(3)=-2$，且 $f(x)f(x+1)f(x+2)f(x+3)=f(x)+f(x+1)+f(x+2)+f(x+3)$，$f(x+1)f(x+2)f(x+3)\neq1$，求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2006)+f(2007)$ 的值.

专题六　函数应用问题

知识点睛

函数知识是高中代数的主线，函数思想方法贯穿于高中数学理论与应用的各个领域，要学会运用函数的观点、思想和方法去观察、分析、处理问题，深刻理解数形结合思想与等价转换思想，熟练掌握用函数图象处理函数、方程、不等式等问题的思想与方法，并能利用函数知识解决实际问题.

在历年的高考试卷中，函数应用问题一般占高考总分的 10%左右，例如在 2006 年湖南卷中的第 20 题就是利用函数解决实际问题，这道题是 14 分；在天津卷中，第 9、10 题是函数性质的直接应用，第 15 题是运用函数解决实际问题，第 20 题是函数与导数、三角函数相结合的问题，分值多达 29 分. 这不能不引起我们高度的重视.

突破策略

1. 题目答案不唯一，根据学生思考问题的角度不同，得出的结果就不同，这样的试题称开放性试题. 加强开放性试题的训练，有利于培养学生的发散性思维能力.

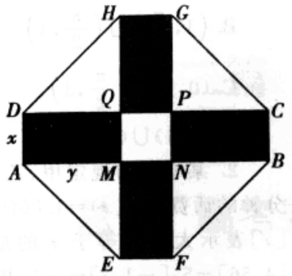
2. 在高考中，通常要把有关抛物线、椭圆、双曲线的试题，通过换元法转化为二次函数问题来解. 特别是在解决有关解析几何问题时，还要用到韦达定理及距离公式.

3. 掌握建立函数关系式解决实际应用题的方法.

4. 了解近年来高考中函数应用问题新题型的命题动向，扩大视野.

【例题】 某居民小区要建造一座八边形的休闲小区，它的主体造型的平面图是由两个相同的矩形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 构成的面积为 200 平方米的十

字形地带．计划在正方形 $MNPQ$ 上建一座花坛，造价是每平方米 4200 元，在四个相同的矩形（图中阴影部分）上铺上花岗岩地坪，造价是每平方米 210 元，再在四个空角上铺上草坪，造价是每平方米 80 元．(1)设总造价为 S 元，AD 的长度为 x 米，试建立 S 关于 x 的函数关系；(2)当 x 为何值时 S 最小，求出 S 的最小值．



【解析】　(1)设 $AD=x$，$AM=y$，则 $x^2+4xy=200$，解得 $y=\frac{50}{x}-\frac{x}{4}$．由于正方形 $MNPQ$ 的造价是 4200 元/平方米，即 $S_{MNPQ}=4200x^2$；四个相同的矩形的造价是 210 元/平方米，即 $S_{矩形}=210\times4xy=840xy$，四个空角上草坪的造价是 80 元/平方米，即 $S_{三角形}=80\times4\times\left(\frac{1}{2}y^2\right)$．因而 $S=4200x^2+210\times4\times xy+80\times4\times\left(\frac{1}{2}y^2\right)=4200x^2+840x\times\left(\frac{50}{x}-\frac{x}{4}\right)+80\times4\times\left[\frac{1}{2}\left(\frac{50}{x}-\frac{x}{4}\right)^2\right]$，

即 $S=4000x^2+4\times10^5\times\frac{1}{x^2}+3800$（元）．

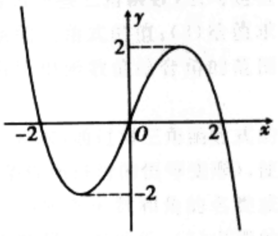
(2)因 $S=4000x^2+4\times10^5\times\frac{1}{x^2}+38000\geqslant 2\sqrt{4000x^2\times\frac{400000}{x^2}}+38000=118000$，当且仅当 $4000x^2=4\times10^5\times\frac{1}{x^2}$，即 $x=\sqrt{10}$ 时取等号．

故当 $x=\sqrt{10}$ 时，S 有最小值 118000 元．

【点评】　利用函数知识，根据已知条件建立函数关系式，再利用基本不等式、二次函数、导数等知识解决实际问题，这是近年高考的一大热点．

典型例题

【例 1】　函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的的奇函数，图象如下图所示，令 $g(x)=af(x)+b$，则在下列关于函数 $g(x)$ 的叙述中：①若 $a<0$，则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称；②若 $a=1$，$0<b<2$，则方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的根；③若 $a=-2$，$b=0$，则函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称；④若 $a=-2$，$0<b<3$，则方程 $g(x)=0$ 有三个实数根．正确的序号是____________．



【例 2】　定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 具有下列性质：①对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $f(x^3)=f^3(x)$；②对任意 $m,n\in\mathbf{R}(m\neq n)$，都有 $f(m)\neq f(n)$，则 $f(-1)+f(0)+f(1)$ 的值为____________．

【例 3】　方程 $|4x-x^2|=kx+2$ 有 4 个解，则实数 k 的取值范围是　　　（　　）

A. $\left(-\frac{1}{2},0\right]$　　B. $\left(-\frac{1}{2},4+2\sqrt{2}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},4-2\sqrt{2}\right)$　　D. $(0,4-2\sqrt{2})$

【例 4】　对于函数 $f(x)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不动点．已知函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq0)$．(1)当 $a=1$，$b=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 的不动点；(2)若对任意实数 b，函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点，求 a 的取值范围；(3)在(2)的条件下，若 $y=f(x)$ 图象上 A、B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点，且 A、B 两点关于直线 $y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$ 对称，求 b 的最小值．

跳出陷阱

【题目】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$，其函数图象关于 y 轴对称，当 $x\in[0,2]$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，若 $f(1-m)<f(m)$，求 m 的取值范围.

【错解】 依题意，函数 $f(x)$ 为偶函数，又当 $x\in[0,2]$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，那么当 $x\in[-2,0]$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，故不等式 $f(1-m)<f(m)$ 可转化为

$$\begin{cases}0\leqslant m\leqslant 2,\\0\leqslant 1-m\leqslant 2,\\1-m>m,\end{cases}\text{或}\begin{cases}-2\leqslant m\leqslant 0,\\-2\leqslant 1-m\leqslant 0,\\1-m<m.\end{cases}$$

解得 $0\leqslant m<\frac{1}{2}$ 或 $x\in\varnothing$，即 $0\leqslant m<\frac{1}{2}$. 从而 m 的取值范围是 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$.

【剖析】 上述解答仅仅考虑了 m、$1-m$ 在同一单调区间的情形，漏掉了它们可以在不同单调区间的情形.

【正解一】 依题意，当 $x\in[0,2]$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，那么当 $x\in[-2,0]$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，所以不等式 $f(1-m)<f(m)$ 可转化为

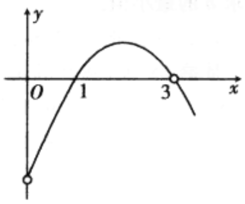
$$\begin{cases}0\leqslant m\leqslant 2,\\0\leqslant 1-m\leqslant 2,\\1-m>m,\end{cases}\text{或}\begin{cases}-2\leqslant m\leqslant 0,\\-2\leqslant 1-m\leqslant 0,\\1-m<m,\end{cases}$$

或 $\begin{cases}0\leqslant m\leqslant 2,\\-2\leqslant 1-m\leqslant 0,\\-(1-m)>m,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2\leqslant m\leqslant 0,\\0\leqslant 1-m\leqslant 2,\\-(1-m)<m.\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m<\frac{1}{2}$，从而 m 的取值范围是 $\left[-1,\frac{1}{2}\right)$.

【正解二】 依题意，当 $x\in[0,2]$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，该函数是偶函数，则 $\begin{cases}0\leqslant |m|\leqslant 2,\\0\leqslant |1-m|\leqslant 2,\\|1-m|>|m|.\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m<\frac{1}{2}$，从而 m 的取值范围是 $\left[-1,\frac{1}{2}\right)$.

仿真演练

1. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,3)$ 上的函数，$f(x)$ 的图象如图所示，那么 $f(x)\cos x<0$ 的解集是（　　）



A. $(0,1)\cup(2,3)$

B. $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$

C. $(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$

D. $(0,1)\cup(1,3)$

2. 某电信局规定甲、乙两地之间主动通话 x 分钟的话费是 $f(x)=1.06(0.5\times[x]+1)$ 元，其中 $[x]$ 表示大于或等于 x 的最小整数（如 $[4]=4$，$[4.56]=5$，$[-1.2]=-1$，某人主动从甲地打电话到乙地 5.5 分钟，他的电话费应该是（　　）

A. 3.71 元　　B. 3.97 元

C. 4.24 元　　D. 4.77 元

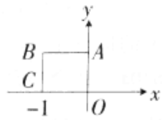
3. 已知函数 $y=2x^2$ 的定义域是 $[a,b]$（$a<b$），值域是 $[0,2]$，则以 a 为横坐标，b 为纵坐标的点 (a,b) 的轨迹是下图所示的（　　）

A. 线段 AB 和 BC

B. 线段 AB 和 OC

C. 线段 OA 和 BC

D. 线段 OA 和 OC



4. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1(x\leqslant 0),\\3x+1(x\geqslant 0),\end{cases}$ 则 $f[f(-3)]=$ ________.

5. 定义运算符号“#”满足 $x\#y=ax+by$（a，b 是常数），且 $2\#2=4$，$3\#1=8$，那么 $2\#(-3)$ 的值是________.

6. 设二次函数 $f(x)=x^2+bx+c$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个实数根为 x_1、x_2，且 $x_2-x_1>2$.（1）求证 x_1、x_2 为方程 $f[f(x)]=0$ 的两个根；（2）若四次方程 $f[f(x)]=x$ 的另两个根为 x_3，x_4，且 $x_3>x_4$，试判断 x_1、x_2、x_3、x_4 的大小.

第二篇　三角函数

总论　高考要点与命题趋势

本篇的内容主要有：(1)任意角和弧度制的概念、常用角的表示方法，弧长公式和扇形面积公式；(2)任意角的三角函数的概念，同角三角函数关系式与诱导公式；(3)和、差、倍角的三角函数及相关公式；(4)三角函数的图象与性质；(5)正弦定理、余弦定理、三角形面积公式及其在解三角形中的应用．

从近几年高考试题统计的数据表明，题型多以选择题和中档解答题的形式出现，分值约占13%～20%，内容几乎涉及所有的知识点，难度在中、低档位置，有时也与其它知识点结合，主要是数学思想方法的渗透．

近年高考命题特点是三角函数中和差化积、积化和差公式淡化，三角函数的图象性质和三角形内的三角函数成了主角。命题立足课本，但进行了拓展，并常以平面向量、解析几何等知识为载体，注重创设新情境，紧密联系生活实际；借用“三角形”、“气温变化曲线”、“台风侵袭的时间和范围”、“船航行的路线”以及“区域的合理规划”等背景知识考查考生的阅读理解、文字表述、信息处理及在新背景下学习的能力．2005年、2006年湖南卷考查的都是三角形中的三角函数问题．近两年高考中三角函数的基本性质与图象是第一考查热点，其次是与向量知识的综合题及借助背景知识下的应用问题．

专题一　三角函数的化简与求值

知识点睛

高考要求掌握两角和与两角差的正弦、余弦、正切公式，掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式．能正确运用三角公式，进行简单三角函数式的化简、求值和恒等式证明．熟悉三角变换常用的方法——化弦法、降幂法、角的变换法等，并能应用这些方法进行三角函数式的求值、化简、证明．

三角函数求值问题一般有三种基本类型：(1)给角求值，即在不查表的前提下，求三角函数式的值；(2)给值求值，即给出一些三角函数，求与这些三角函数式有某种联系的三角式的值；(3)给值求角，转化为给值求值，由所得函数值结合角的范围求出角．

三角函数式的化简要求：通过对三角函数式的恒等变形(或结合给定条件而进行的恒等变形)，使最后所得到的结果中：(1)所含函数和角的名类或种类最少；(2)各项的次数尽可能地低；(3)出现的项数最少；(4)一般应使分母和根号不含三角函数式；(5)对能求出具体数值的要求出值．

突破策略

三角函数的求值与化简主要是寻求角与角之间的关系，化非特殊角为特殊角。正确灵活地运用公式，通过三角变换消去或约去一些非特殊角的三角函数值．一些常规技巧：“1”的代换、切割化弦、和积互化、异角化同角等．给值求角的方法：先求角的某三角函数值，再讨论角的范围，然后利用函数的单调性求出角，必要时，须缩小角的范围．三角函数式的化简常用方法是：异名函数化为同名三角函数，异角化为同角，异次化为同次，切割化弦，特殊值与特殊角的三角函数互化．

典型例题

【例1】　设 $f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x(\omega>0)$ 的周期 $T=\pi$，最大值 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=4$.

(1)求 ω、a、b 的值；