四川省高等教育人才培养质量和教学改革项目

高职高专基础课系列教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

主编 廖 辉

四川大学出版社

责任编辑:王　平
责任校对:李思莹
封面设计:吴　强
责任印制:杨丽贤

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 廖辉主编. 一成都: 四川大学出版社, 2007.7
ISBN 978－7－5614－3766－7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 廖… Ⅲ. 高等数学－高等学校: 技术学校－教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 115092 号

书名　高等数学

主　编	廖　辉
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978－7－5614－3766－7/O·116
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	16.5
字　数	377 千字
版　次	2007 年 8 月第 1 版
印　次	2007 年 8 月第 1 次印刷
印　数	0 001～3 000 册
定　价	30.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023 邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前　言

本教材是依据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育数学课程教学基本要求》，集多年教学实践经验并结合当前高等职业技术教育的特点编写的，可作为高职高专理工科类专业的高等数学教材和“专升本”的数学考试教材.

本教材分《高等数学》和《高等数学练习册》. 全书主要内容包括极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、微分方程和无穷级数.

每章分为若干节，每节以模块式组织内容，符合学生的认知规律，其中用星号“*”标注的内容供理工科类不同专业选用. 每章还安排了用 Matlab 大型数学计算软件编写的数学实验，并在书末附了 Matlab 简介和简易积分公式表.

本教材编写的指导思想是：把高等数学作为重要的基础课和工具课，以必须、适用、够用为原则，以为专业服务为导向，以用数学建模的方法培养学生分析问题和解决问题的能力为归宿.

本书教学总学时在 120 学时至 140 学时以内.

本教材有以下特点：

1. 与普高和中职新教材内容紧密衔接，同时为高职高专院校理工科类专业学生提供专业学习必须的数学基础知识和数学方法.

2. 对概念、命题多作描述性说明，降低学习难度和严谨性要求. 例如，一般从几何意义、物理意义和生活背景等实际问题引入数学概念；以渐进式的思想方法进行论证和解题；删除用深奥的 $\varepsilon-N$、$\varepsilon-\delta$ 来定义极限，对许多定理的证明也进行了省略.

3. 本书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多，有相应配套练习册，便于自学.

4. 教材扩大了适用面，在保证教学基本要求的前提下，视专业差异给教学内容选择留有一定的弹性. 例如，泰勒公式、方程的近似解、曲线的曲率、第一类曲线积分、第二类曲线积分、第一类曲面积分、第二类曲面积分和傅里叶级数等内容对不同的专业可根据需要选学.

5. 突出了会用会算的建模思想. 各部分内容的呈现尽量使用数学建模方法，使学生通过各专题的学习养成数学的应用意识，学会应用数学知识解决实际问题的一些基本方法.

6. 教材在解决数学问题时，比较突出数学软件的工具作用，尽量训练学生使用数学软件和数学工具书，为日后利用数学知识解决实际问题奠定基础.

本教材主编廖辉，副主编吴元清，参编同志还有谭光全、肖福积、张青山、张子位和石化国，冯一鸣为本书做了审校工作. 由于编审人员水平有限，不足之处（甚至有错）在所难免，恳请各界同仁、有关专家和学者批评、指正，并将在使用教材过程中遇到的问题、改进意见及时反馈给我们，以利于我们再版此书时作改进.

编　者

2007 年 6 月

目 录

目　录

第1章　极限与连续

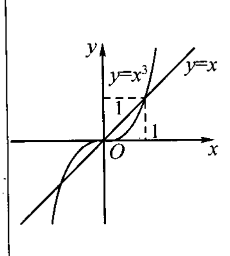
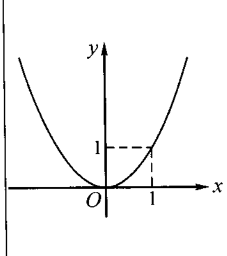
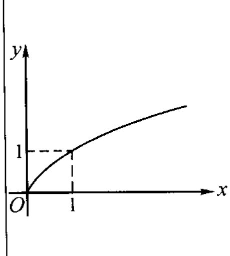
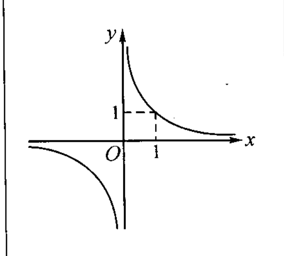
初等数学又称常量数学，其研究对象基本上是不变量. 高等数学的主要内容是微积分，它是以变量为研究对象、用极限作为工具来研究函数的. 因此，极限是学习微积分的理论基础，连续函数是微积分研究的主要对象. 本章讨论函数的极限与函数的连续性.

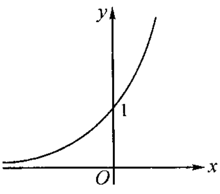
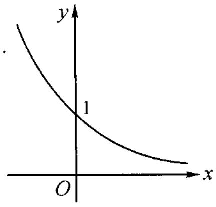
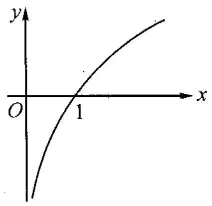
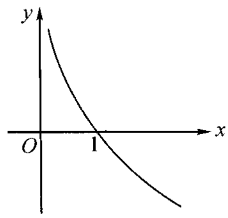
1.1　初等函数

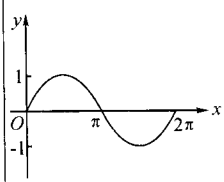
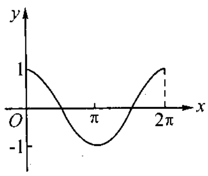
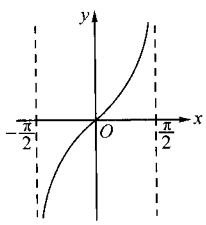
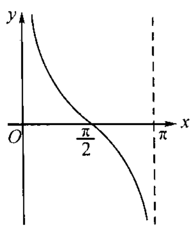
1.1.1　基本初等函数

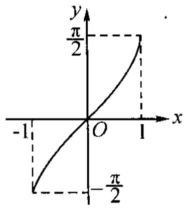
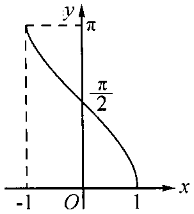
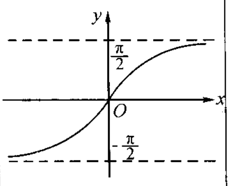
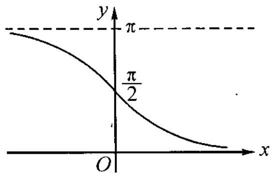
在科学发展过程中，有一类为数不多的函数，在各种问题中经常出现. 我们把这些函数挑选出来，作为最基本的函数加以研究，并称之为基本初等函数. 其他常见的函数都是由这些基本初等函数构成的.

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数统称为基本初等函数. 现将它们的定义域、值域、图像和主要性质列表如下，作为今后进一步讨论的基础.

函数	幂函数 $y=x^\alpha$			
	$\alpha=1,3$	$\alpha=2$	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=-1$
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
性质	奇函数，单调增	偶函数，在$(-\infty,0]$内单调减，在$[0,+\infty)$内单调增	单调增	奇函数，单调减

函数	指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$		对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
性质	单调增	单调减	单调增	单调减

函数	$y=\sin x$ （正弦函数）	$y=\cos x$ （余弦函数）	$y=\tan x$ （正切函数）	$y=\cot x$ （余切函数）
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ $(k\in\mathbf{Z})$	$(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
性质	奇函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增，在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 内单调减	偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增	奇函数，周期 π，在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增	奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减

函数	$y=\arcsin x$（反正弦函数）	$y=\arccos x$（反余弦函数）	$y=\arctan x$（反正切函数）	$y=\operatorname{arccot} x$（反余切函数）
图像				
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$(0,\pi)$
性质	奇函数，单调增，有界	单调减，有界	奇函数，单调增，有界	单调减，有界

1.1.2 复合函数

在实际问题中，我们常常遇到一个函数可以跟另一个函数发生联系.

例如，质量为 m 的物体作自由落体运动，物体的动能 E 是速度 v 的函数：

$$E=\frac{1}{2}mv^2 \quad (E=f(v))$$

而速度 v 又是时间 t 的函数：

$$v=gt \quad (v=\varphi(t))$$

其中，g 是重力加速度. 这样一来，动能 E 通过中间变量 v 的联系而成为时间 t 的函数，即

$$E=\frac{1}{2}mg^2t^2 \quad (E=f[\varphi(t)])$$

又如，设 $y=\sin u$，而 $u=2x-1$，那么 y 通过 u 也是 x 的函数：

$$y=\sin(2x-1)$$

这样"叠合"起来构成的函数，称为复合函数.

定义 1.1.1　设 y 是 u 的函数：

$$y=f(u)$$

而 u 又是 x 的函数：

$$u=\varphi(x)$$

且当 x 在某一数集 I 取值时，所对应的 u 值使 y 有定义，那么 y 通过 u 也是 x 的函数. 这个函数叫做数集 I 上由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中，u 叫做中间变量，$y=f(u)$ 叫做外层函数，$u=\varphi(x)$ 叫做内层函数.

根据定义，易知：

$y=\sin(2x-1)$是由 $y=\sin u$ 与 $u=2x-1$ 复合而成的复合函数.

$E=\frac{1}{2}mg^2t^2$ 是由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 与 $v=gt$ 复合而成的复合函数.

必须注意：

(1)复合函数 $f[\varphi(x)]$的定义域或者与 $\varphi(x)$的定义域相同，或者只是 $\varphi(x)$的定义域的一部分.

(2)不是任何两个函数都可以复合成一个函数的.

例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为对于 $u=2+x^2$ 可取的每一个值 $u\in[2,+\infty)$，都使 $y=\arcsin u$ 无定义.

我们不仅要掌握把几个函数复合成一个函数的方法，而且反过来，还要掌握把一个复合函数分解成几个简单的函数的方法. 这样做将有利于今后微积分的计算. 下面举例说明函数复合与分解的方法.

例 1 将 y 表示为 x 的函数：

(1) $y=\ln u, u=\sin x$. (2) $y=e^u, u=\sqrt{v}, v=1-x^2$.

解 (1) $y=\ln u=\ln\sin x$.

(2) $y=e^u=e^{\sqrt{v}}=e^{\sqrt{1-x^2}}$.

例 2 指出函数的复合过程，并求其定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$. (2) $y=\cos 3x$.

(3) $y=\ln^2 x$. (4) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$.

(5) $y=(\arcsin\frac{1}{x})^2$. (6) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.

解 (1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$是由 $y=\sqrt{u}, u=x^2-3x+2$ 两个函数复合而成的. 解不等式 $x^2-3x+2\geqslant 0$，得函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$的定义域 $D=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

(2) $y=\cos 3x$ 是由 $y=\cos u, u=3x$ 两个函数复合而成的. 函数 $y=\cos 3x$ 的定义域$D=(-\infty,+\infty)$.

(3) $y=\ln^2 x$ 是由 $y=u^2, u=\ln x$ 两个函数复合而成的. 函数 $y=\ln^2 x$ 的定义域$D=(0,+\infty)$.

(4) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sin u, u=\sqrt{v}, v=1-x^2$ 三个函数复合而成的. 解不等式 $1-x^2\geqslant 0$，得函数 $y=\sin\sqrt{1-x^2}$的定义域 $D=[-1,1]$.

(5) $y=(\arcsin\frac{1}{x})^2$ 是由 $y=u^2, u=\arcsin v, v=\frac{1}{x}$三个函数复合而成的. 要使函数 $y=(\arcsin\frac{1}{x})^2$有意义，只须 $\arcsin\frac{1}{x}$有意义，应$|\frac{1}{x}|\leqslant 1$，即$|x|\geqslant 1$，因此 $y=(\arcsin\frac{1}{x})^2$ 的定义域 $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(6) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$是由 $y=u^{-\frac{1}{3}}, u=1+x^2$ 两个函数复合而成的. 因为 $1+x^2\neq 0$，所以 $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$.

由例 2 可见,分解一个复合函数,是指把该复合函数分解成基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式(称为简单函数),这时就不能再分解了.

1.1.3 初等函数

定义 1.1.2 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成且能用一个解析式表示的函数叫做初等函数.

例如,函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$,$y=\arcsin\frac{1}{x}$,$y=x+\frac{1}{x}+1$,$y=\frac{\sin x}{x^2}$等都是初等函数.初等函数是微积分研究的主要对象.

分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$能化为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$,它是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合而成的,因此它也是一个初等函数.

分段函数 $y=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1-x^3, & x>0\end{cases}$ 不能用一个式子表示,因此它不是初等函数.

一般地,分段函数不是初等函数,因为它是由两个或两个以上的解析式表示的一个函数.

1.1.4 建立函数关系举例

运用数学工具解决实际问题时,常常需要找出问题中变量之间的函数关系式,然后进行分析和计算.下面举例说明建立函数关系的过程,为以后运用微积分方法解决实际问题打下一些基础.

例 3 曲柄连杆机构(如图 1—1 所示)是利用曲柄 OA 的旋转运动,通过连杆 AB 使滑块 B 作往复直线运动;反过来说,利用滑块 B 的往复直线运动,通过连杆使曲柄作旋转运动.设曲柄 OA 的长度为 r,连杆 AB 的长度为 l,曲柄以等角速度 ω 绕 O 旋转,求滑块 B 的运动规律.

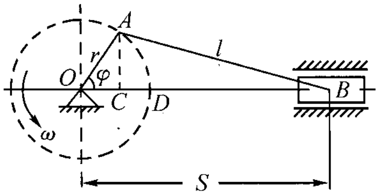


图 1—1

解 假定曲柄 OA 开始作旋转运动时,A 在 D 处.设滑块 B 的运动规律为 $S=S(t)$.

由图 1—1 可知,$S=OC+CB$.

因为 $OC=r\cos\varphi, CA=r\sin\varphi, \varphi=\omega t$,

所以 $OC=r\cos\omega t, CA=r\sin\omega t$.

在 Rt$\triangle ACB$ 中,$CB=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$,从而可得滑块 B 的运动规律为

$S=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}, t\in[0,+\infty)$.

例 4 电脉冲发生器产生一个三角脉冲,其波形如图 1—2 所示,写出电压 u(V)和时间 t(μs)之间的函数关系式.

解 当 $0\leqslant t<6$ 时,电压 u 由 0 伏直线上升到 8 伏,直线段 OA 的方程是

$$u=\frac{8}{6}t=\frac{4}{3}t,$$

它就是 0～6(μs)这段时间内电压 u 与时间 t 的函数关系式；

当 $6\leqslant t\leqslant 12$ 时，电压 u 由 8 伏直线下降到 0 伏，直线段 AB 的方程是

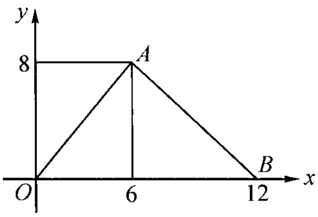


图 1－2

$$u=-\frac{8}{6}t+16=-\frac{4}{3}t+16,$$

它就是 6～12(μs)这段时间内电压 u 与时间 t 的函数关系式.

归纳之，可得

$$u=\begin{cases}\frac{4}{3}t, & 0\leqslant t<6,\\ -\frac{4}{3}t+16, & 6\leqslant t\leqslant 12.\end{cases}$$

这里，u 与 t 的函数关系是用分段函数表示的，函数的定义域是[0,12].

实际问题的函数关系就是该实际问题的一个数学模型，建立实际问题的函数关系就是为了用函数方法解决实际问题. 一般地，用数学方法解决实际问题，首先要对实际问题的背景进行深入了解，摸清问题的规律，并用数字、图表、公式等表示出来，就得到数学模型. 数学模型只是对现实事物的某种属性的一种模拟，要不断验证修改，才能使其与实际情况拟合得更好. 根据数学模型，就可对所涉及的问题进行分析讨论. 数学模型是多种多样的，函数关系只是数学模型的一种.

1.2 极限的概念

本节讨论函数随自变量变化的趋势，即函数的极限问题.

1.2.1 数列的极限

数列(整标函数)$x_n=f(n)$，$n\in\mathbf{Z}^+$ 是函数的一种特殊情形.

考察几个数列，当 n 无限增大时，x_n 值的变化趋势：

(1)我国战国时代的哲学著作《庄子》中有一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭." 其意思是说，一根一尺长的木棒，每天将它截去一半，第二天剩下 $\frac{1}{2}$ 尺，第三天剩下 $\frac{1}{4}$ 尺……将永远截取不完. 写出这个数列就是：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$

(2)$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

(3)$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

(4)$2,4,6,8,\cdots 2n,\cdots$

当 n 无限增大时，记为 $n\to\infty$. 观察可知，数列(1)无限地接近于零，数列(2)无限地接近于 1，数列(3)在 1 和 －1 来回跳动，数列(4)的数值则无限增大. 这时，我们就说当 $n\to\infty$ 时，数列(1)的极限是 0，数列(2)的极限是 1，数列(3)和数列(4)的极限不存在.

定义 1.2.1 当 n 无限增大时，如果数列 x_n 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列 x_n 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \to A(n\to\infty)$$

由定义 1.2.1 知，上述四个数列的极限可分别记为

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ 不存在； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}2n$ 不存在或 $\lim\limits_{n\to\infty}2n=\infty$.

例 1 考察数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势，写出数列的极限：

(1) $x_n=\frac{1}{n}$； (2) $x_n=-2$； (3) $x_n=(-\frac{1}{2})^n$； (4) $x_n=2^n$； (5) $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$.

解 各数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势见下表：

$x_n=\frac{1}{n}$	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\to 0$
$x_n=-2$	$-2,-2,-2,-2,\cdots\to -2$
$x_n=(-\frac{1}{2})^n$	$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots\to 0$
$x_n=2^n$	$2,4,8,16,\cdots\to\infty$
$x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$	$0,1,0,1,\cdots$

由上表可知：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)=-2$，一般地，$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（常数）；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^n=0$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$； (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$ 不存在.

1.2.2 函数 $y=f(x)$ 的极限

上面讨论了数列的极限. 因为数列是整函数，所以讨论数列的极限，也就是讨论函数 $x_n=f(n)$ 当自变量 n 取正整数而无限增大时的函数极限. 函数 $y=f(x)$ 的极限比较复杂，但可以分为自变量趋于无限及有限数两种. 下面分别进行讨论.

1. 自变量无限增大时，函数 $y=f(x)$ 的极限

自变量 x 无限增大，包括三种情形：

(1) x 取正值无限增大，记作 $x\to+\infty$；

(2) x 取负值而 $|x|$ 无限增大，记作 $x\to-\infty$；

(3) x 可取正值，也可取负值而 $|x|$ 无限增大，记作 $x\to\infty$.

考察下列函数当 $x\to\infty$ 时的变化趋势：

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$； (2) $f(x)=\arctan x$.

作出函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图像（如图 1—3 所示）. 可以看出，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 与数 0 无限接近.

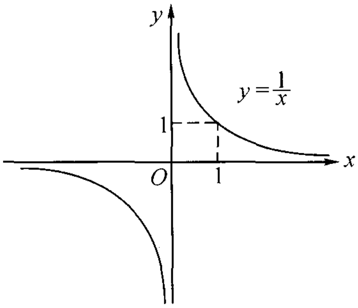


图 1—3

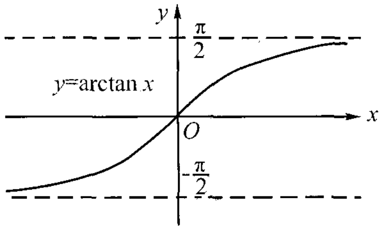


图 1—4

作出函数 $f(x)=\arctan x$ 的图像(如图 1—4 所示). 可以看出,当 $x\to+\infty$时,$f(x)=\arctan x$ 与数$\frac{\pi}{2}$无限接近;当 $x\to-\infty$时,$f(x)=\arctan x$ 与数$-\frac{\pi}{2}$无限接近;当 $x\to\infty$时,$f(x)=\arctan x$ 不与任何数无限接近.

仿照数列极限定义的描述,我们有以下定义成立.

定义 1.2.2 (1)当 $x\to\infty$时,如果函数 $y=f(x)$无限地接近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

(2)当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时,如果函数 $y=f(x)$无限地接近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的极限,记为

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\begin{pmatrix}x\to+\infty\\x\to-\infty\end{pmatrix}$$

由定义易知,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

自变量趋于无限时,函数极限三种情形间的关系是:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

例 2 考查函数的变化趋势,写出函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}$.

解 (1)观察图 1—5 知,当 $x\to-\infty$时,函数 $y=e^x$ 的图像趋于直线 $y=0$,即函数 $y=e^x$ 的值趋于数 0. 所以,$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

(2)观察图 1—5 知,当 $x\to+\infty$时,函数 $y=e^x$ 的值无限增大. 所以,$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$ 不存在或 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

(3)观察图 1—6 知,当 $x\to\infty$时,函数 $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$的图像趋于直线 $y=1$,即函数 $y=\frac{x+1}{x}$的值趋于数 1. 所以,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$.

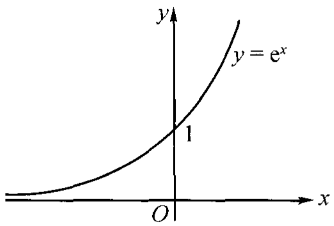


图 1—5

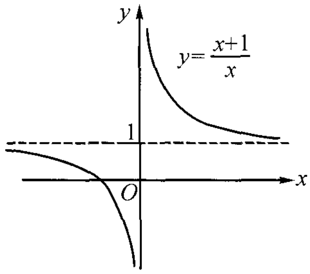


图 1—6

2. 自变量趋于有限值时，函数 $y=f(x)$ 的极限

自变量 x 趋于有限值 x_0，也包括三种情形(如图 1—7 所示)：

(1) x 从 x_0 右侧趋于 x_0，记作 $x \to x_0^+$；

(2) x 从 x_0 左侧趋于 x_0，记作 $x \to x_0^-$；

(3) x 从 x_0 两侧趋于 x_0，记作 $x \to x_0$.

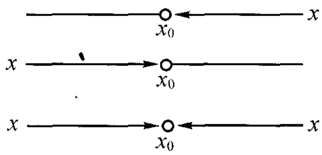


图 1—7

考察当 $x \to 1$ 时，函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势.

作出函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的图像. 由图 1—8 可以看出，当 $x \to 1$ 时，函数 $f(x)$ 的图像上对应点趋于点(1,2). 也就是说，当 $x \to 1$ 时，函数 $f(x)$ 的值与数 2 无限接近. 这时，我们把数 2 叫做 $f(x)$ 当 $x \to 1$ 时的极限.

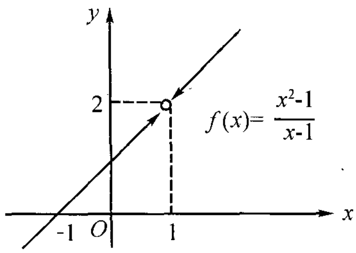


图 1—8

定义 1.2.3 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左、右近旁有定义(在点 x_0 处，函数 $f(x)$ 可以没有定义). 如果当 x 趋于 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 的值无限接近于确定的常数 A，则称 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x) \to A(\text{当 } x \to x_0 \text{ 时})$$

例如，当 $x \to 1$ 时，函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的极限是 2，可记作 $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ 或 $\frac{x^2-1}{x-1} \to 2$(当 $x \to 1$时).

注意：

函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 没有定义，但函数在点 $x=1$ 有极限. 这就是说，函数在点 $x \to x_0$ 是否有极限与函数在点 $x=x_0$ 是否有定义是无关的.

例 3 考察并写出极限：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} x$， $\lim\limits_{x \to x_0} C$($C$ 为常数).

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x$， $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$.

解 (1)观察图 1—9，可知：当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)=x$ 的值与数 x_0 无限接近，函数 $f(x)=C$ 的值与数 C 无限接近，所以

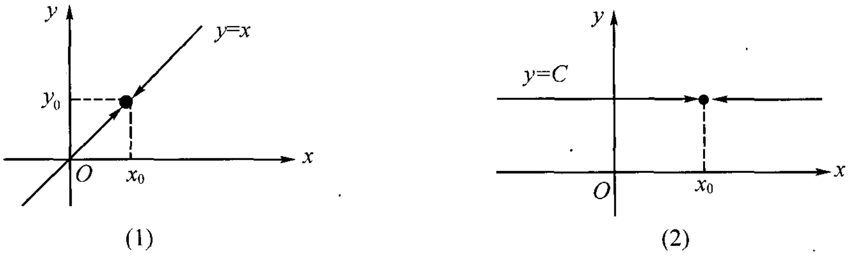


图 1—9

$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$， $\lim\limits_{x\to x_0} C=C.$

(2)观察图 1—10，可知：

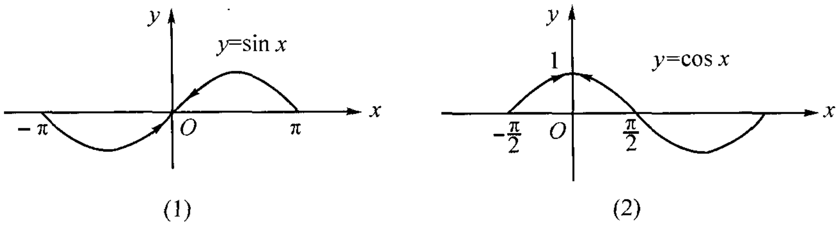


图 1—10

当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 的值与数 0 无限接近，函数 $f(x)=\cos x$ 的值与数 1 无限接近，所以

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$， $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1.$

在 $x\to x_0$，$f(x)\to A$ 的极限定义中，x 可从 x_0 的左右两侧趋于 x_0，但有时需要考虑 x 从 x_0 的一侧趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势. 把 $x\to x_0$ 时函数极限的定义作适当修改，可得 $x\to x_0^+$ 及 $x\to x_0^-$ 时函数极限的定义.

定义 1.2.4 如果当 $x\to x_0^-$ $(x\to x_0^+)$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左(右)极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A$$

$$\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A\right)$$

左极限或右极限统称为单侧极限.

例如，由图 1—10(2)，可知

$$\lim_{x\to 0^-}\cos x=1，\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$$

这两个极限值与 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ 相等，都是 1.

一般地，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的左、右极限存在且相等，即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且也等于 A；反之，结论也成立. 由此可得以下定理成立.

定理 1.2.1 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是左、右极限存在且相等，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x)=\lim_{x \to x_0^+} f(x)=A$$

因此，如果 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 至少有一个不存在，或都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在.

例 4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0\end{cases}$ 当 $x \to 0$ 时的极限.

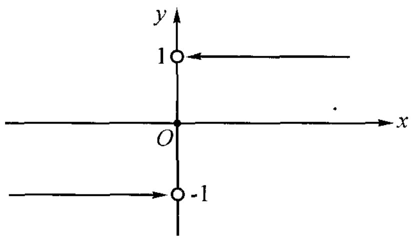


图 1—11

解 由图 1—11 可知：

$f(0-0)=\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^-}(-1)=-1$,

$f(0+0)=\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+} 1=1$.

因为 $f(0-0) \neq f(0+0)$,

所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

例 5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0 \leqslant x<1 \\ 2-x, & 1 \leqslant x \leqslant 2\end{cases}$ 当 $x \to 1$ 时的极限.

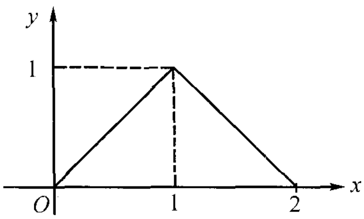


图 1—12

解 由图 1—12 可知：

$f(1-0)=\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 1^-} x=1$,

$f(1+0)=\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 1^+}(2-x)=1$.

因为 $f(1-0)=f(1+0)=1$,

所以 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=1$.

数学实验一　用 Matlab 软件作一元函数的图像和求极限

在开始进行实验之前，请先阅读附录一 Matlab 简介后，再运行 Matlab 软件.

一、一元函数的作图

1. 在直角坐标系中作图

(1)绘制单根二维曲线.

调用格式：

plot(x,y)

其中 x 和 y 为长度相同的向量，分别用于存储 x 坐标和 y 坐标数据.

在 Matlab 命令窗口中的提示符“>>”后输入语句，每输入完一行后要按“Enter”(回车)键结束，运行程序时“%”号后的注释语句也可以不输入. 以后同，不再说明.

例 1 作出 $y=x^2$ 在[−2,2]上的图像.

解 在命令窗口中输入如下语句：

```
x=-2:0.01:2;%取 x 值，步长为 0.01
```