

21

世纪高等院校教材

# 概率论与数理统计

梅国平 袁捷敏 编著  
毛小兵 李 杰

 科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

21 世纪高等院校教材

# 概率论与数理统计

梅国平 袁捷敏 毛小兵 李杰 编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书根据教育部颁布的经济、管理本科专业《经济数学》教学大纲,针对经济数学教学改革的需要,以培养“厚基础、宽口径、高素质”人才为宗旨,系统地介绍了概率论与数理统计的主要内容和方法,包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机向量及其概率分布、随机变量(向量)的数字特征、大数定律与中心极限定理等概率论基础5章,数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等数理统计基础5章。同时,为方便学生学习概率论与数理统计的计算和实验知识,特意增加了SPSS统计软件在数理统计中的应用作为第11章。本书注重基本知识、基本技能、基本方法的训练以及实际应用能力的培养。例题和习题选用基础、适中和综合提高三类题目,既照顾一般程度的学生要求,也兼顾准备参加硕士研究生入学考试读者的需求。

本书适合经济、管理类等专业的高等院校学生、成人教育学生、参加国家自学考试的学生,以及准备参加经济管理类硕士研究生入学考试的有关人士等。

### 图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/梅国平,袁捷敏,毛小兵,李杰编著. —北京:科学出版社,2007

21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-019661-3

I. 概… II. ①梅…②袁…③毛…④李… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第126791号

责任编辑:李鹏奇 胡华强 吴伶俐 房 阳 / 责任校对:赵桂芬  
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2007年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2007年8月第一次印刷 印张:20 1/4

印数:1-7 000 字数:386 000

定价:28.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈文林〉)

## 编写说明

《概率论与数理统计》是作为经济与管理各专业本科生的教材而编写的. 本书着眼于经济与管理科学的发展前景, 为适应培养高水平经济与管理人才的需要, 除了注重概率统计的基础知识之外, 还纳入了有着广泛应用的各种统计方法, 并简单介绍了非常有用的大型统计分析软件 SPSS, 以改变我国概率统计教学与计算机软件脱离的现状. 本书也可作为自学、函授及夜大教材, 还可作为研究生及经济工作者的参考书.

本书由梅国平、袁捷敏、毛小兵、李杰编著. 梅国平负责编写第 0 章、第 1 章、第 7 章, 袁捷敏负责编写第 2 章、第 8 章、第 10 章, 毛小兵负责编写第 3 章、第 4 章、第 11 章, 李杰负责编写第 5 章、第 6 章、第 9 章. 全书的写作大纲和统纂工作由梅国平教授负责. 谭光兴教授、余仲弓教授、易伟明教授和陶长琪博士对本书的编写提出了宝贵意见.

带 \* 号部分为选学内容, 学有余力的同学可学习、阅读.

对江西财经大学信息管理学院、江西财经大学教务处的支持和帮助表示感谢!  
由于作者水平有限, 加之时间仓促, 书中错误在所难免, 恳请读者不吝指正.

# 目 录

## 编写说明

* 第 0 章 引论 .....	1
0.1 概率论与数理统计发展简史 .....	1
0.2 数理统计学的基本内容与应用 .....	9
第 1 章 随机事件及其概率 .....	14
1.1 随机事件 .....	14
1.2 随机事件的概率 .....	20
1.3 条件概率与事件的独立性 .....	28
1.4 全概率公式与逆概率公式 .....	38
习题一 .....	41
第 2 章 随机变量及其分布 .....	44
2.1 随机变量及其分布函数 .....	44
2.2 离散型随机变量及其分布律 .....	48
2.3 几种常见的离散型分布 .....	51
2.4 连续型随机变量及其密度函数 .....	58
2.5 正态分布 .....	63
2.6 随机变量的函数及其分布 .....	68
习题二 .....	72
第 3 章 多维随机向量及其概率分布 .....	75
3.1 随机向量及其联合分布函数 .....	75
3.2 二维离散型和连续型随机向量 .....	77
3.3 随机变量的独立性 .....	90
3.4 随机向量的函数及其概率分布 .....	95
习题三 .....	106
第 4 章 随机变量(向量)的数字特征 .....	109
4.1 随机变量的数学期望 .....	109
4.2 随机变量的方差 .....	119
4.3 随机向量的数字特征 .....	124
习题四 .....	131

<b>第 5 章 大数定律与中心极限定理</b> .....	134
5.1 大数定律 .....	134
5.2 中心极限定理 .....	140
习题五.....	145
<b>第 6 章 数理统计的基本概念</b> .....	148
6.1 总体与样本 .....	148
6.2 数理统计中的某些常用分布 .....	151
6.3 抽样分布 .....	157
习题六.....	163
<b>第 7 章 参数估计</b> .....	166
7.1 参数的点估计 .....	166
7.2 点估计量的评价标准 .....	175
7.3 参数的区间估计 .....	179
* 7.4 比率的区间估计 .....	193
习题七.....	197
<b>第 8 章 假设检验</b> .....	199
8.1 假设检验的基本概念 .....	199
8.2 单个正态总体的参数假设检验 .....	204
8.3 两个正态总体的参数假设检验 .....	214
8.4 总体比率的假设检验 .....	222
8.5 非参数假设检验 .....	227
习题八.....	230
<b>第 9 章 方差分析</b> .....	235
9.1 单因素方差分析 .....	235
9.2 二因素方差分析 .....	244
习题九.....	255
<b>第 10 章 回归分析</b> .....	257
10.1 回归概念.....	257
10.2 一元线性回归分析.....	259
10.3 可线性化的一元非线性回归.....	269
10.4 多元线性回归分析简介.....	271
习题十.....	275
<b>第 11 章 SPSS 统计分析软件简介</b> .....	278
11.1 SPSS 概述 .....	278

---

11.2 SPSS 的启动、主界面 .....	278
11.3 SPSS 的数据管理 .....	280
11.4 描述性统计 .....	284
11.5 均值比较和 $t$ 检验 .....	287
11.6 回归分析 .....	291
<b>参考文献</b> .....	296
<b>附录</b> .....	297
附表 1 二项分布累积概率表 .....	297
附表 2 泊松分布累积概率表 .....	299
附表 3 标准正态分布分布函数值表 .....	300
附表 4 $F$ 分布临界值表 .....	302
附表 5 $\chi^2$ 分布临界值表 .....	312
附表 6 $t$ 分布临界值表 .....	313
附表 7 相关系数显著性检验表 .....	314

## \* 第 0 章 引 论

概率论和数理统计都是应用数学的重要分支,但就它们二者之间的关系来说,通常认为概率论是数理统计的基础,数理统计则是概率论的一种应用.在接触本学科的基本理论与方法之前,了解其发展简史、特点以及应用情况,有助于对本学科的深入领会与实际运用.这就是本章要讲述的内容.

### 0.1 概率论与数理统计发展简史

#### 0.1.1 概率论发展简史

我们将概率论的发展历史大致划分为以下五个阶段.

##### 1. 概率论发展的原始阶段

概率论发展的原始阶段很难确定它发展的起端,有些学者把它的发展追溯到人类最早期的文明史.在史前的圣堂和神殿中曾经发现过一些用马的腿骨制成的小立方体,这表明在早期的宗教仪式中可能使用过骰子.至 15 世纪,在意大利兴起了航运保险事业,这说明那时人们至少已有了概率论的初步知识.

##### 2. 概率论发展的早期阶段

概率论发展的早期阶段大体上从 17 世纪中叶开始,至 18 世纪初期结束.主要的代表人物是法国的帕斯卡、费马和荷兰的惠更斯.突出的事件是概率论在赌博问题中的应用.1654 年,一些热衷于赌博的人向帕斯卡提出了还不能归入那时数学范畴的划分赌本的问题,这引起了帕斯卡的兴趣.他把解法写信告诉了费马,从而两人采用通信的方式展开了讨论.现在这些信件被公认为是概率论中最早有详尽文字记载的文献.基于这一原因,人们通常把这看成是概率论发展的起点.在费马和帕斯卡的讨论中,已提炼出了像概率和数学期望这样一些概率论中最重要的概念.稍后,另一位年轻的荷兰人惠更斯也独立地讨论了类似的赌博问题,并于 1655 年发表了概率论中的第一篇论文《赌博中的计算》.这一阶段,由于科学发展水平不高,所以充满机遇性的赌博便成为那时发展概率论的直观背景.解决概率论中问题

---

注:本章参考了《概率统计》(成世学等,1994)的有关章节.



时用到的数学工具也仅是初等的排列和组合算法. 这里我们需要强调一下, 尽管概率论的早期应用主要限于赌博, 但在讨论赌博问题中发展起来的思想却对于认识随机现象有着普遍的意义. 上面提及的几位数学家在当时就已觉察到了这点. 惠更斯在《赌博中的计算》一文中写到: “我相信如果读者仔细地研究这些材料, 当可发现你所处理的不仅仅是赌博, 其中实际上包含了既深刻又有趣的一种新理论的基础.” 概率论以后发展的历史确实验证了惠更斯的预言.

### 3. 概率论发展的中期阶段

概率论发展的中期阶段从 18 世纪初期开始, 一直延续到 19 世纪中叶. 在此阶段中, 概率论的应用已不局限于赌博, 而是扩展到观察误差理论、射击学、人口统计学等众多领域. 解析的方法也被引入到概率论的研究之中. 这一时期的代表人物是以拉普拉斯为首的一批法国数学家, 其中比较杰出的还有伯努利、棣莫弗和泊松等. 此外, 英国的贝叶斯和德国著名数学家高斯对于概率论发展作出的贡献也不容忽视.

伯努利的遗作《猜测的艺术》于 1713 年发表, 这一事件被认为是概率论这一发展阶段的开端. 现在称之为伯努利大数定律的概率论中的第一个极限定理便是首次在此书中刊出的.

拉普拉斯领导了概率论在这一发展阶段中的潮流. 他一生发表了不少概率论方面的论文, 其中影响最为深远的是于 1812 年发表的集大成作品《分析概率论》. 在这一著作中, 他不仅总结了自己的研究成果, 而且还系统地整理了概率论至那时为止已取得的主要进展. 他还利用等可能性事件的概念明确地给出了概率的古典定义, 从而建立了古典概率论基础的理论框架. 直到 20 世纪初, 关于概率论的教科书还一直沿用他所给出的概率论的古典基础, 由此足见他这部著作对后世所产生的影响. 拉普拉斯不仅研究一般的理论问题, 而且热衷于概率论的应用. 他成功地运用概率论去估计观察误差, 在人口统计学的研究中也有所建树.

贝叶斯的重要论文《论机遇理论中一个问题的解决》是他逝世后两年, 即 1763 年发表的. 这篇论文中包含了归纳推理的一种思想, 在当时并未引起人们足够的重视, 现在已被发展成为关于统计推断的一种系统的理论和方法.

高斯系统地建立了观察的误差理论, 推导了随机误差的分布规律, 即正态分布律, 这是概率和统计中最重要的分布律之一. 他在研究观察数据的随机误差时所提出的最小二乘法, 也在以后统计学中发展起来的回归分析中得到了重要的应用.

这一阶段, 概率论在理论中取得的另一进展是, 自从伯努利开始, 棣莫弗、拉普拉斯和泊松等都研究了概率论中古典的极限定理. 这些定理既有助于深刻理解概率论的基础, 而且诱发了以后更为深入的工作, 使得极限定理成为概率论研究中久盛不衰的课题.

综上所述,这一阶段中法国古典概率学派处于概率论发展的中心地位,在他们的努力下,古典概率论得到了全面的发展,在应用方面也取得了长足的进步.但是这种发展势头到了19世纪后半叶却在法国出现了停滞,这主要归因于古典概率基础的局限性.这样,概率论发展的中心移出了法国,开始了一个新的发展时期.

#### 4. 概率论发展的近期阶段

概率论发展的近期阶段经历的时间大体上可认为是19世纪后半叶以及20世纪的前40年.这一阶段中,概率论的应用范围不仅继续得以扩展,而且也更为深入.概率论应用的一个重要方面是统计学.以皮尔逊和费希尔为首的英国统计学派领导了统计学这一时期的发展潮流.现代数理统计学中几乎所有重要的统计理论和统计方法都是他们在19世纪末和20世纪初这一段时间内建立起来的,统计学从而成为应用数学的一个独立的分支.这方面的背景材料我们将在稍后详细地介绍.

概率论在这一阶段中令人瞩目的另一重要应用是在统计物理学方面.对此作出贡献的代表人物是奥地利物理学家玻尔兹曼和美国物理学家吉布斯.他们首先将概率论和统计学的论证方法贯穿到分子物理学的研究中.鉴于大量分子的存在以及它们热运动的极其紊乱的性质,使得概率论和统计学在这一领域中的应用获得了极大的成功.概率论在这样一种严肃科学的应用中取得了成功,而且这还是由物理学家实现的,就不得不使人们对概率论刮目相看了.概率论在物理中的应用至今仍是概率论研究中相当活跃的领域之一.

这一阶段在概率论的理论研究工作中取得突破性成就的,当首推俄罗斯和前苏联概率论学派.他们中间的代表人物是切比雪夫、马尔可夫、伯恩斯坦、辛钦和柯尔莫哥洛夫等.这一阶段中他们对于概率论作出的主要贡献可以归纳为两个方面.其一是继续在由伯努利和拉普拉斯开创的古典极限定理的研究方向上进行探索,但他们已把所研究的内容大大地推广了.

前苏联概率论学派作出的另一重大贡献是彻底改造了概率论的古典基础.随着时间的推移,概率论古典基础的局限性就越来越暴露出来了.它极大地限制了概率论在物理、生物、统计等领域中的进一步应用.这样到了20世纪初,对于概率论的古典基础进行改造已是一种客观上的要求.这时的数学界正风行公理化的潮流,由罗巴契夫斯基在研究非欧几何时所建立起来的公理化方法在那时已渗透到数学的各个分支,于是一些卓越的数学家自然会想到以公理化手段来重建概率论的逻辑基础.概率论公理化的先行者是伯恩斯坦,他在1917年发表了第一篇关于概率论公理基础的随笔.概率论公理化的最终完成是由柯尔莫哥洛夫实现的.他在1933年发表的《概率论的基本概念》一书中,系统地表述了现在已被广为接受的概率论公理系统,第一次把概率论建立在严密的逻辑基础之上.从此概率论确立了它作为一门严格数学分支的地位,它的发展也开始了一个全新的阶段.

## 5. 概率论发展的现期阶段

概率论发展的现期阶段可认为是从第二次世界大战结束后直至现在的一段时期. 在这一段时间内, 概率论发展的步伐极大地加速了, 其理论研究工作的内容得以大幅度地拓广, 深刻程度也远非古典概率论所能比拟. 概率论在应用方面也取得了辉煌的成就, 许多应用概率论的分支相继形成.

### 0.1.2 数理统计学发展简史

我们分三个阶段来介绍统计学的发展历史.

#### 1. 统计学发展的初级阶段

我们把 19 世纪中叶以前都划归为这一阶段. 统计学在这一阶段的发展过程中反映出以下两种变化趋势:

- (1) 由纯粹收集数据转变到借助数据进行简单的推断;
- (2) 由最初和概率论互相分离到逐渐结合.

先谈第一种变化. 统计学在英语中称为 statistics. statistics 源出于拉丁文中的“status”一词, 它和英语中的“state”(国家)同义. 所以在西方, 统计最早指的就是收集国情资料. 若从这个意义上理解统计学的发展, 它的历史就源远流长了, 和概率论发展的情形一样, 几乎也可追溯到人类的早期文明史. 拿我国来说, 早在公元前 2000 多年前的周朝就保存有收征钱粮和朝廷消费支出的大量记录, 也保存有人口和征兵的记录. 但类似这种纯粹属于收集数据的统计工作, 和我们现在对于统计学的理解相去甚远. 这种情况一直延续到 17 世纪中叶才有所变化.

西方学术界普遍认为统计学的研究事实上是由英国人格兰特开始的, 并称他为人口统计学之父. 人口统计学是从事人类总体的统计研究的. 格兰特是一个商人, 他在经营服饰及缝纫用品的同时, 潜心研究死亡记录, 统计了不同死因的百分比. 结果他发现死于不同原因, 如自杀、意外事故和某种疾病的百分比, 不仅极有规律, 而且逐年之间几乎保持不变. 格兰特通过统计分析还发现, 男婴的出生要比女婴多, 但由于男人因职业公害(工业废气和废水对健康带来的损害)、疾病和战争致死的较多, 所以到了结婚的年龄, 男人和女人的数目近乎相等. 这些观察结果都总结在他于 1662 年发表的《基于死亡记录的自然和政治方面的观察》一书中. 由于他在人口统计学上作出的贡献, 他成为于 1660 年成立的英国最古老的科学协会——皇家学会的特约会员. 格兰特的上述著作作为以后死亡率表的制定铺平了道路, 也对统计学上一些先驱者的工作产生了影响, 其中包括预言哈雷彗星回归的天文学家哈雷. 1700 年, 哈雷发表了他关于死亡率表和寿命估计的研究成果. 这些成果对于人寿保险事业当然是很有用的, 这使人们感到, 统计推断作为一门科学而言, 不仅

可信,而且是值得花费时间和精力。

从格兰特和哈雷的工作开始,统计学的发展已具有这样一种特色:针对某些特定的问题进行观察试验,收集资料,且已不满足于数据的简单统计,有时还能越出收集数据的范围,进行某种简单的推断。这比人类早期纯属例行公务式地收集数据的活动已有不少长进。但必须指出,这样一种推断只是基于一种朴素直观的想法,还没有坚实的理论作为其后盾。出现这种情况也是很自然的,因为作为现代数理统计基础的概率论的发展,在那时也才刚刚起步。这样,直至伯努利《猜测的艺术》一书的发表,尽管概率论和统计学均已被人们承认,但它们的发展基本上是互相平行的,其内容也互相分离。这一情况在随后的一个半世纪中才有所变化,概率论的思考方法开始逐步进入统计学的研究之中。这就是我们要谈的统计学在这一阶段中发生的第二种变化。

前面已提及,从18世纪初开始至19世纪中叶是古典概率论全面发展的时期。在这一时期内,由格兰特开创的人口统计学研究成为概率论的重要应用领域之一。古典概率论的奠基人拉普拉斯曾对此产生过浓厚的兴趣。他在根据一次讲演写成的《概率的哲学探讨》一文中,讨论了许多人口统计学方面的具体问题。他运用概率论中的概念叙述了死亡率表的制定方法,引入了平均寿命的概念。特别地,他还考虑了如何根据死亡率表去计算人口总数的问题,以及当某种死亡原因消除后如何确定平均寿命的问题。这些工作促进了概率论在人口统计学中的应用,对于统计学的发展也有很积极意义。此外,我们还须指出,概率论在这一时期的发展过程中也为日后统计学的发展积累了许多重要的、必不可少的概念与方法。其中有作为极限分布形式和随机误差分布形式出现的正态分布,它是现代统计学中最重要,也是使用得最为广泛的一种概率分布,这一分布的性质已为高斯在这一时期内所详尽研究。高斯在研究观察数据随机误差时所发展起来的最小二乘法,也是现代统计学中回归分析的重要基础之一。

这样我们看到,至19世纪中叶,统计学已从纯粹地收集数据过渡到以简单的统计推断,概率论的研究方法也已渗透到统计学的研究之中。但总的说来,统计学的应用范围到那时为止还相当狭隘,主要仍集中在人口统计学的领域之中,而且只限于解决具体的问题,还不能将问题归结成具有一般意义的统计模型。另外,统计学的理论水平也不高。重要的统计思想和方法在那时还未见端倪。统计学基本上附属于概率论,还未成为一个独立的应用数学分支。造成这一局面的原因,除了由于受到概率论发展水平的牵制,更重要的恐怕还是来自应用方面的要求不是那么迫切,以至于对统计学的发展未能形成一股强大的推动力。这一情况到了19世纪后半期,特别是20世纪初有了很大的改观,于是统计学的发展开始了一个全新的时期。

## 2. 现代数理统计学的形成阶段

这一阶段自 19 世纪中叶始,至 20 世纪 40 年代止.和概率论在这一段时间内的发展情形一样,统计学也取得了突破性的进展.其推动力如前所述,是来自应用方面的迫切要求.其发展中心则是在英国,它代表了当时科学与生产力发展的最高水平.领导统计学在这一阶段发展的是以费希尔、皮尔逊为首的英国统计学派.通过他们的努力,不仅大大拓宽了统计学的应用范围,而且确立了现代数理统计学中几乎所有重要的统计理论与统计方法.这样,统计学在经历了和概率论互相分离到逐渐结合的阶段以后,又最终从概率论中分离出来,成为应用数学的一个独立分支.下面我们介绍一些对统计学的现代发展作出过重要贡献的英国统计学家,借此可了解统计学在这一阶段的发展概况.

高尔顿毕业于剑桥大学的数学系.当达尔文的《物种起源》于 1859 年发表后,他的兴趣转向人类学.他对人类的特征进行了详尽的研究.在身高的研究中,他对确定儿子的身高与其父母平均身高之间的关系发生兴趣.他通过观察与分析,于 1885 年发表了《身高遗传中向平凡的回归》一文.高尔顿认为,如果父母的身材很高(或很矮),他们儿子的身材一般说来也较高(或较矮),但不会和他们的父母一般高矮.从上述意义上理解“向平凡回归”的含意,可理解成儿子的身高有恢复到平均高度的趋势,而不是越来越走向极端(越来越高或越来越矮).随后高尔顿的朋友皮尔逊对此作了更为详尽的研究,通过对上千个家庭成员身高数据的分析,他将儿子身高  $y$  和  $x$  之间的关系大致地用下述方程来表示:

$$y=0.516x+33.73 \quad (\text{以英寸为单位}).$$

由高尔顿和皮尔逊在研究上述问题过程中所建立起来的方法,以后又得到了进一步的推广.这部分内容在现代数理统计学中称为回归分析,被广泛地用于分析诸变量之间的关系,而且允许自变量不止一个.

戈赛特曾获得牛津大学的数学和化学学位.自 1899 年起一直在都柏林(爱尔兰共和国首都)的一家啤酒酿造公司——盖尼斯公司供职.鉴于酿造啤酒时只能进行小规模的小规模试验,使他感到有必要发展一种方法去解释从小样本中获得的信息.为此他于 1908 年在有影响的杂志 *Biometrika* 上发表了一篇文章,该文给出了现在被称为样本  $t$  统计量的密度函数.由于盖尼斯公司不希望它的竞争对手知道他们利用统计方法去改进啤酒的发酵过程,所以不允许它的雇员们发表任何材料.这样,戈赛特只得以笔名“Student”(学生)发表上述那篇文章.因此现在也通常把  $t$  统计量的分布称为 Student 分布.戈赛特的研究成果是数理统计学发展史上的一件大事,被公认为是小样本理论发展的先导.

从高尔顿和戈赛特开创性的统计研究工作中我们已看到,统计学中新思想和新理论的提出往往都密切地联系着科学与生产的实践活动.从英国另一位统计学

家费希尔的研究工作中,我们也能看到这一特点.

费希尔是英国统计学派中最有影响的代表人物,在现代数理统计学的发展中占有特别显赫的地位.他于1912年毕业于剑桥大学,接受过数学与理论物理的正规训练.他曾教过一段时间书,不久便辞去这一工作,于1919年到罗萨姆斯泰德试验站供职.试验站主要是从事农业上的研究的.日复一日地收集与解释农业试验数据的实践活动,使他突然感到有必要考虑这样的问题:响应变量(如作物产量)的差异经常有被试验环境中无法控制的非齐次性因素(不同的土质,不同的灌溉量等)掩埋的危险.他迅速地发现传统的技巧已不适于处理这样的问题,从而他决定另辟蹊径.通过几年的努力,他成功地找到了全新的统计方法,其中涉及收集数据的原理,分析试验数据的数学方法等.这部分内容现在称为试验设计,其核心便是方差分析.费希尔的这些成果后来大都总结在他的名著《试验设计》中,除此以外,费希尔还另外发表了一些重要的统计著作,如《统计的数学基础》、《统计估计理论》、《研究人员用的统计方法》等,几乎对统计学中所有重要的统计思想、统计方法和统计理论的形成都作出了重要的贡献,是20世纪推动数理统计发展的当之无愧的领路人.

在统计学发展中有多方面建树的另一位英国统计学家是前面已提到过的皮尔逊.他也毕业于剑桥大学,学习过物理、哲学和法律.他和费希尔一起被公认为是20世纪统计发展的奠基人.除了在创立回归分析方面有突出的成就外,他还对统计估计和假设检验理论的建立作出过贡献.特别是他在1900年发表的一篇论文中推导了 $\chi^2$ 统计量的极限分布,利用这一结果他开辟了拟合优度检验的研究方向,是非参数统计方法的先导,因此也被认为是数理统计发展中的一件大事.皮尔逊在统计发展史上的另一贡献是他和韦尔登一起创办了统计学中第一份权威性的杂志 *Biometrika*(《生物统计学》),并从1901年起担任该杂志的主编,直至他去世(1936年).数理统计学中许多早期奠基性的工作都首先发表在这一杂志上,*Biometrika*也因此 in 统计学界享有盛名.

综上所述,到了20世纪40年代,现代数理统计学已形成了自己完整的体系.第二次世界大战刚结束不久,瑞典统计学家克拉默便在1946年发表了《统计学数学方法》一书.该著作第一次用严密的数学方法总结了那时为止数理统计学中的主要进展,标志着数理统计学已完全成熟,并最终成为应用数学的一个独立的分支.

### 3. 数理统计学在战后的发展

前面已提及,20世纪前40年是数理统计学迅速发展并取得突破性成就的黄金时代,它的基本理论和基本方法在第二次世界大战发生前已完整地建立起来.战后数理统计学在理论研究上取得的突破没有像战前那样令人瞩目,给人以深刻印

象的是数理统计学的应用。尽管现代统计学的大多数理论在战前已经掌握,但在实践中使用得并不普及,这主要是因为许多统计方法的实施都需要大量的计算,费时很多,这就限制了统计方法在实践工作中的应用。战后电子计算机的出现使得这一情况发生了根本的变化。目前国内外为了推广统计方法,研制了许多专供实践工作者使用的统计软件包,这大大普及了统计方法的应用。因此可以这样说,许多在战前已得到充分发展的统计方法,真正在应用上发挥其威力还是在战后。此外,随着计算机使用的深入和普及,也必然会对统计学提出新的挑战,要求建立更能发挥计算机潜力的新的统计方法,以适应现代科技迅速发展的需要。从这一意义上来说,统计学也许正孕育着另一次新的突破。

数理统计学战后在理论上也出现了若干根本性的新进展,主要是贝叶斯统计、统计决策理论和多元分析的兴起。

直至 20 世纪 50 年代,频率学派一直在统计学中占据主导地位。他们坚持概率的频率解释,并在此基础上建立起统计学中的基本理论和方法。前面提到的在 20 世纪初领导数理统计发展的著名统计学家费希尔、皮尔逊等都属于这一学派。但最近二三十年以来,贝叶斯学派迅速崛起。贝叶斯是英国学者,早已于 1761 年去世。他的遗作《论机遇理论中一个问题的解决》中有一个现在以他的名字命名的贝叶斯公式。公式并不复杂,但却包含了归纳推理的一种想法。后世学者把它发展成为一种关于统计推断的系统的理论和方法,现在通称为贝叶斯统计。尽管在 20 世纪初也有一些学者宣扬贝叶斯学派的观点,但产生的影响并不大。贝叶斯统计只是在战后才重新受到人们的注目,至今它在统计学所占的地位已几乎可和频率学派创建的理论相提并论了。

统计决策理论的兴趣是战后统计学在理论上取得的另一进展。这一理论的奠基人是美国统计学家瓦尔德。他在 1950 年出版了一本名为《统计决策函数》的著作,书中建立了一种统一地处理各种统计问题的理论,现称为统计决策理论。该理论的基本思想是将统计问题提成数学最优化问题的解,并相应地引进各种优良性准则。这一理论在战后对数理统计学的发展起了较大的影响,目前已成为数理统计基础结构中的一个组成部分。此外,该理论在应用上也有重要意义。它使数理统计学越出了纯推断的范围,拓展到了以追求更大的经济利益为目标的决策领域。

近 20 多年来,多元分析的发展也很迅速,它讨论的是多指标的分析问题。促进它发展的原因固然有来自实际方面的需要,但它之所以在战后兴起并取得迅速发展,不能不说和计算机的普及使用有关。在统计分析中,随着指标的增加,不仅问题变得更为复杂,计算量也将大幅度地增加。这样,如果没有高速度、大容量的计算机,要想进行多指标的分析就是很困难的。多元分析目前还处在发展阶段之中,其理论尚有待进一步完善。

## 0.2 数理统计学的基本内容与应用

### 0.2.1 数理统计学的基本内容

对于初次接触数理统计学的读者来说,一提起统计这个词,便很容易把它和一大堆数据与图表联系起来.这种想法是可以理解的.我们在介绍统计学的发展简史时曾讲过,统计学发展过程中最早出现的实践活动便是收集数据,并对数据进行简单的分析.现在随着统计方法的普及,数据和图表更是处处可见.大至全国范围内关于人口、经济情况的统计报告,小至某一单位内部针对各种具体问题所作的年度统计报告,无一不充斥了大量的统计数据和图表.这样就容易使人们产生上述想法.不过,我们在统计学发展简史的介绍中还指出,统计学后来的发展已大大超出了对收集到的数据进行简单统计分析的范围,并逐渐演变成一门以收集到的数据为依据,对更大范围内总体进行推断的科学.在这一过程中,有效地收集拥有真实信息的数据,固然仍是整个统计工作中不可缺少的重要一环,是进行统计工作的第一步,但如果再把统计仅仅理解成数据和图表的罗列,那就很片面了.它更深一层的含意是借助数据进行某种合理的推断.下面我们再略为详尽地阐述一下数理统计学的实质.

当我们要发现什么时,通常需要收集信息.在统计学中这些信息经常可用数的形式来表示,所以统计工作的第一步就是收集数据.这里需要强调一下,由于所涉及的研究对象一般说来为数很大,限于时间和经济上的考虑,我们只可能收集一部分数据.这就要求我们精心地设计收集数据的方法,使收集到的一小部分数据能尽可能多地包含与所研究的整个问题有关的信息.统计工作的这一步,我们不妨称为**有效地收集数据**.

收集数据的工作完成后,我们还需把收集到的数据进行分类,把它们组织成一些可理解的片段,并用图表的形式将它们显示出来.同时也可利用一些简单的统计方法去描述或总结这些数据最突出的特征.我们不妨把统计工作的这一步称之为**数据的初步处理**.数据的这种初步处理还是很必要的,它使得收集到的数据易于管理并有意义.不然,它们只不过是一堆杂乱无章的数据,我们很难从中获取到什么信息.

通常把对于数据的上述初步加工称之为描述性统计.本节开始提到的数据与图表的罗列大体上属于这一范畴.正如我们在前面已提到过的那样,当今统计更为重要的内容并不局限于此,它要求我们仔细地检验和审视经初步加工后的数据,用科学的方法去提取寓于这些数据中的信息,并进而在更大的范围内对所研究的问题进行推断,得出某种合理的结论.统计的这一领域称之为**推断统计**,它所用到的



方法称为**统计推断方法**.这也是本书以后要重点介绍的.至于这些统计推断方法的理论依据,则是来自概率论中的基本概念和结果.正是从这一意义上来说,一般认为统计学是概率论的一种应用,而概率论则是统计学的理论基础.有时为了强调统计对于概率的这种依赖关系,还常常在“统计”前冠以“数理”二字<sup>①</sup>.

现在我们举一个例子来帮助理解上面所说的内容.为了判断抽烟是否对身体健康有影响,我们必须有计划地收集充分的数据,并对之进行分析.如果从数据分析中我们发现,呼吸系统方面的癌或其他病症主要归因于抽烟,而不是什么偶然或其他外部的原因,我们便可得出“抽烟有损于健康”的结论.鉴于烟草工业肯定会强烈地反对这一结论,故在作出这样的结论时必须谨慎,必须有大量清晰的引证作为后盾.现代统计推断方法便可为我们提供具有充分说服力手段,说明上述结论的得出是非常可信的.

通过上例我们解释了统计推断在认为未知现象时所起的作用.下面我们进一步分析一下统计推断具有的特点.首先,所作的推断应是针对整个问题的,而不局限在收集到的数据范围内.拿上例来说,“抽烟有损于健康”这一结论,不仅对被调查的人员适用,对未被调查的人员也应适用.唯这样,所下的结论才有现实意义:它告诉每一个人,为了身体健康,千万不要再抽烟了!又假如我们需了解 10000 件产品中的废品率,但鉴于时间和费用方面的原因,又不能逐一对产品进行检验<sup>②</sup>.通常的作法是从中抽取一小部分产品,譬如说 100 件,然后再观察这 100 件产品中的废品率.但我们的工作不能到此为止,这不是我们的终极目标.我们还必须根据这 100 件产品的废品率去推断整批产品的废品率,这时就需采用某种适宜的统计推断方法.概括地说,统计推断是由**部分推断整体**,这是它的第一个特点.其次,正因为统计推断是由部分推断整体,确切地说,是借助小范围内提取的信息来推断整体,就不可避免地会使这种推断带有某种不确定性.虽然我们努力设法使推断尽可能地符合客观实际情况,但也不能保证推断的结果不会出错.这是统计推断的另一个特点.为此,我们在进行统计推断的同时,还必须评价寓于这一推断过程中的不确定性,需要寻求一些有意义的指标去衡量推断的正确程度.在进行这样的评价时,概率论继续发挥着它的作用.

最后,我们扼要地总结一下,数理统计大致上涉及以下三方面的内容:

(1) 研究有效地收集数据的方式,以保证收集到的数据能为我们提供尽可能多的真实的信息.数理统计学中有两个分支——**抽样理论**和**试验设计**便是服务于这一目的.

(2) 收集数据的工作结束后,便需用简单的统计方法组织和解释这些数据,用

① 英语中,数理统计即 mathematical statistics,故“数理”实指“数学”而言.

② 必须对产品作破坏性检验的情形,就只能检验其中一小部分的产品.