

● 高等学校教材

高等数学 (下册)

国防科学技术大学理学院

朱健民 李建平 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

(下 册)

国防科学技术大学理学院
朱健民 李建平 主编

高等教育出版社

内容提要

本教材依照教育部“工科类本科数学基础课程教学基本要求”关于微积分课程的基本要求编写,适合工科类本科的教学对象,尤其是军事院校学习工科的本科学生。教材在编写过程中体现出如下特点:

- (1) 努力实现课程体系和内容的优化整合;
- (2) 将数学建模及数学实验的思想与方法融入教材及课程教学中;
- (3) 将数学软件的学习和使用穿插在教学内容中;
- (4) 突出数学思想,通过多角度描述来加深对内容的理解。

本书下册内容包括空间解析几何、向量值函数的导数与积分、多元函数的导数及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、幂级数与傅里叶级数、军事应用中的微分方程模型及其定性分析。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/朱健民,李建平主编. —北京:高等教育出版社,2007.6

ISBN 978 - 7 - 04 - 021578 - 6

I. 高... II. ①朱... ②李... III. 高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 051619 号

策划编辑 王 强 责任编辑 李 陶 封面设计 王凌波 责任绘图 吴文信
版式设计 余 杨 责任校对 杨凤玲 责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010 - 58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京鑫海金澳胶印有限公司

开 本 787×960 1/16
印 张 26
字 数 490 000

购书热线 010 - 58581118
免费咨询 800 - 810 - 0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2007 年 6 月第 1 版
印 次 2007 年 6 月第 1 次印刷
定 价 27.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 21578 - 00

目 录

第八章 空间解析几何	1
§ 8.1 向量及其运算	1
§ 8.2 空间平面与直线	22
§ 8.3 空间曲面	38
§ 8.4 空间曲线	56
第九章 向量值函数的导数与积分	70
§ 9.1 向量值函数及其极限与连续	70
§ 9.2 向量值函数的导数与微分	76
§ 9.3 向量值函数的不定积分与定积分	82
第十章 多元函数的导数及其应用	88
§ 10.1 多元函数的极限与连续	88
§ 10.2 偏导数与全微分	104
§ 10.3 多元复合函数与隐函数的偏导数	123
§ 10.4 方向导数与梯度、黑塞矩阵及泰勒公式	144
§ 10.5 多元函数的极值与条件极值	158
第十一章 重积分	176
§ 11.1 二重积分与三重积分的概念和性质	176
§ 11.2 直角坐标下重积分的计算	184
§ 11.3 常用坐标变换下重积分的计算	199
§ 11.4 重积分应用	218
第十二章 曲线积分与曲面积分	230
§ 12.1 曲线积分的概念与计算	230
§ 12.2 格林公式与保守场	250
§ 12.3 曲面积分的概念与计算	269
§ 12.4 高斯公式与斯托克斯公式	289

第十三章 幂级数与傅里叶级数	306
§ 13.1 幂级数及其应用	306
§ 13.2 傅里叶级数	331
第十四章 军事应用中的微分方程模型及其定性分析	347
§ 14.1 两个典型的军事作战模型	347
§ 14.2 军事模型的定性分析	357
§ 14.3 微分方程稳定性初步	368
附录 I 矩阵初步	375
附录 II 数学名词中英文对照	381
附录 III 国外数学家中英文对照	387
习题参考答案	389

第八章 空间解析几何

微积分的许多概念和原理都具有直观的几何意义,将抽象的数学概念及原理与几何直观有机地结合起来,不仅能帮助人们加深对问题的理解,而且能够提高人们的想象能力与创造能力. 在本书上册中,我们已经看到平面解析几何对于学习一元微积分的重要性. 同样,为了学习多元函数微积分,我们需要空间解析几何的一些基本知识. 本章介绍向量及其运算、空间平面与直线、空间曲面与曲线等相关知识以及常见的空间曲面的图形及特点.

§ 8.1 向量及其运算

8.1.1 空间直角坐标系

1. 空间中点的坐标

为了确定平面上的点的位置,人们通过建立平面直角坐标系,使得平面上的点与二元有序数组 (x, y) 之间建立起一一对应关系,这些二元有序数组的集合记作:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

它是平面上全体点的集合.

为了确定空间中点的位置,需要引入空间直角坐标系. 如图 8.1.1 所示,以空间中一定点 O 为原点,引三条互相垂直的数轴构成的坐标系,称为空间直角坐标系. 这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴),统称为坐标轴. 按习惯,规定 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴为铅直垂线. 它们的正向通常符合右手法则,即以右手握住 z 轴,四指指向 x 轴正向,并将拳握向 y 轴正向,拇指恰好指向 z 轴正向. 通常, x 轴的正向朝着前方(向着读者的一方), y 轴的正向由左到右, z 轴的正向从下到上.

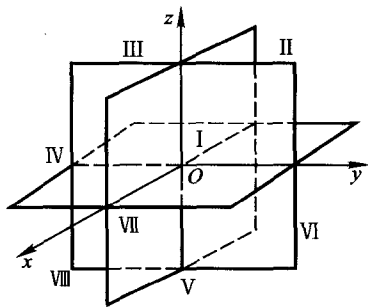


图 8.1.1 空间直角坐标系

三个坐标轴两两决定一个平面,称之为坐标平面,分别记作 xOy 、 yOz 及 zOx

平面. 这三个坐标平面把空间分成八个部分, 每一部分称为一个卦限. 含有正向 x 轴、正向 y 轴及正向 z 轴的那个卦限称为第一卦限. 其余七个卦限没有公认的定义, 通常可以按图 8.1.1 的方式进行定义. 在坐标平面 xOy 上方的四个卦限按逆时针方向分别是第一、二、三、四卦限; 在坐标平面 xOy 下方的四个卦限按逆时针方向分别是第五、六、七、八卦限, 其中第五卦限恰好位于第一卦限的正下方. 在图 8.1.1 中, 这八个卦限分别用罗马数字 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示.

取定了空间直角坐标系之后就可以建立空间中的点与有序三元数组之间的一一对应关系. 如图 8.1.2. 设 M 为空间中的已知点, 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴及 z 轴, 它们与三个坐标轴的交点依次为 P 、 Q 及 R , 这三个点在坐标轴上的坐标分别为 x 、 y 及 z . 于是, 空间中一点 M 就唯一地确定一个有序三元数组 (x, y, z) ; 反之, 已知一个有序三元数组 (x, y, z) , 就可以在 x 轴、 y 轴

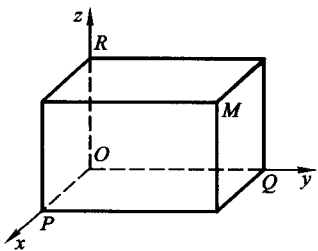


图 8.1.2 空间点的直角坐标

及 z 轴上分别找到坐标为 x 、 y 及 z 的三点 P 、 Q 及 R . 过这三点 P 、 Q 及 R 分别作平面垂直于该点所在的轴, 这三个平面就唯一地确定了一点(交点) M . 这样, 空间一点 M 就与有序三元数组 (x, y, z) 之间建立了一一对应关系, 这一有序三元数组 (x, y, z) 称为点 M 的坐标, 其中 x 称为横坐标, y 称为纵坐标, z 称为竖坐标. 点 M 也记为 $M(x, y, z)$. 所有三元有序数组的集合记作 $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \}.$$

它是空间中全体点的集合.

根据空间中点的坐标表示, 能容易地确定该点空间位置的某些特征. 例如:

- (1) 点 $(0, 0, a)$ 位于 z 轴上;
- (2) 点 $(0, a, b)$ 位于 yOz 平面上;
- (3) 点 $(1, 2, 3)$ 位于第 I 卦限; 点 $(1, 2, -3)$ 位于第 V 卦限. 这两点关于 xOy 面对称.

2. 空间两点的距离

我们知道, 一维数轴上两点 $M_1(x_1)$ 与 $M_2(x_2)$ 的距离为

$$|M_1 M_2| = |x_2 - x_1|.$$

二维平面内两点 $M_1(x_1, y_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2)$ 的距离为

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (8.1.1)$$

如图 8.1.3 所示.

现在我们考察三维空间中两点的距离.

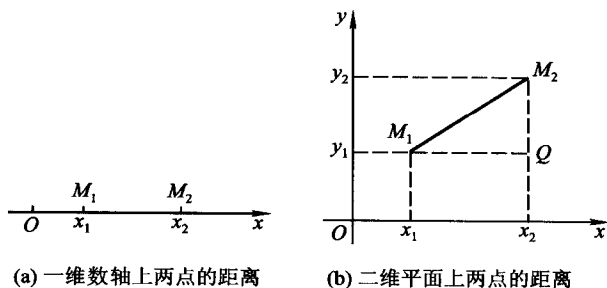


图 8.1.3 一维数轴与二维平面上两点的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点. 如图 8.1.4 所示, 过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面, 这六个平面构成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体. 在直角三角形 M_1NM_2 中, 有

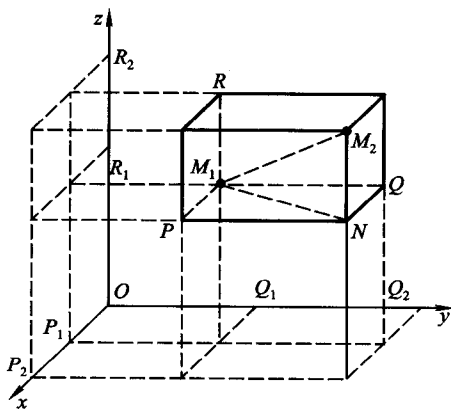


图 8.1.4 三维空间中两点的距离

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2.$$

又 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形, 且

$$|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2,$$

所以

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (8.1.2)$$

这就是空间两点间的距离公式.

特别地,点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (8.1.3)$$

例 1 在 z 轴上求与两点 $A(3, 1, -4)$ 和 $B(5, 3, 2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0, 0, z)$, 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2 + (-4-z)^2} = \sqrt{(5-0)^2 + (3-0)^2 + (2-z)^2}.$$

两边去根号, 解得 $z=1$. 因此, 所求的点为 $M(0, 0, 1)$.

例 2 求点 $A(a, b, c)$ 到 yOz 面以及 x 轴的距离.

解 点 $A(a, b, c)$ 在 yOz 面上的投影点为 $A_1(0, b, c)$, 所以点 A 到 yOz 面的距离为

$$|AA_1| = \sqrt{(0-a)^2 + (b-b)^2 + (c-c)^2} = |a|.$$

又点 $A(a, b, c)$ 在 x 轴上的投影点为 $A_2(a, 0, 0)$, 所以点 A 到 x 轴的距离为

$$|AA_2| = \sqrt{(a-a)^2 + (0-b)^2 + (0-c)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

8.1.2 向量及其线性运算

1. 向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用学科时, 常常会遇到这样一类量, 它们既有大小, 又有方向. 例如力、力矩、位移、速度、加速度等等, 向量就是这些量的数学抽象. 相比较而言, 只有大小没有方向的量称为数量. 例如, 一架从长沙飞往北京的客机, 在飞行过程中, 它的速度和加速度都是向量, 但是飞行时间以及油箱中的油量是数量.

在几何上, 往往用一条带箭矢的线段, 即有向线段来表示向量, 所以, 向量也称为矢量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、 B 为终点的有向线段表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$, 如图 8.1.5 所示. 通常, 向量用印刷体的粗体字母或书写体上面加箭头的字母来表示. 例如, 我们用 $\boldsymbol{v}$ 、 $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{v}$ 、 $\vec{a}$ 、 $\vec{F}$ 分别表示速度、加速度及力这几个向量.

在实际问题中, 有些向量与起点有关, 有些向量与起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向, 所以数学上只研究与起点无关的向量, 并称这种向量为自由向量(以后简称为向量).

对于自由向量, 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等, 且方向相同, 我们就说向

量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是相等的, 记作 $\vec{a} = \vec{b}$. 这就是说, 经过平移后能完全重合的向量是相等的. 这时, 它们看做是同一个向量. 在图 8.1.5 中, 向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与 $\overrightarrow{A_2B_2}$ 都能由向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动得到, 所以, 它们是同一个向量.

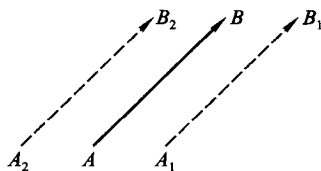


图 8.1.5 向量及其平行移动

向量的大小叫做向量的模. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\vec{a}$ 、 $\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 、 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模等于 0 的向量叫做零向量, 记作 $\vec{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看做是任意的.

两个非零向量如果他们的方向相同或者相反, 就称这两个向量平行. 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, 记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$. 由于零向量的方向可以看做是任意的, 因此可以认为零向量与任何向量平行.

在高中, 我们已经从几何的观点熟悉了向量的概念以及加法与减法等运算. 下面, 我们将从代数的观点来定义向量以及它的运算, 这将为向量的计算提供极大的方便. 我们还会看到, 用代数观点定义的向量及其运算与用几何观点给出的相应概念是一致的.

在平面内, 从点 $A(x_1, y_1)$ 到点 $B(x_2, y_2)$ 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 表示为

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

其中 $x_2 - x_1$ 与 $y_2 - y_1$ 分别称为 $\overrightarrow{AB}$ 的 x, y 轴方向的分量, 它们分别对应 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴、 y 轴上的投影.

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模等于有向线段 AB 的长度, 即 A, B 两点的距离, 所以, 由 (8.1.1) 式知

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

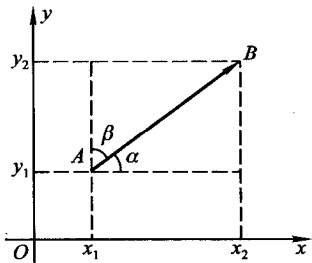


图 8.1.6 平面上的向量及其表示

它的方向可由有向线段 AB 与 x 轴、 y 轴正向的夹角 α, β 确定. 规定 $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$. 称 α, β 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角, $\cos \alpha, \cos \beta$ 为它的方向余弦. 根据图 8.1.6, 容易得到

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

于是, 我们有

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

由平面解析几何知识知道, 对于向量 $\overrightarrow{AB}$ 以及从点 $C(x_3, y_3)$ 到 $D(x_4, y_4)$ 的

向量 $\overrightarrow{CD} = (x_4 - x_3, y_4 - y_3)$, 当且仅当它们的分量对应相等, 即当

$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3, y_2 - y_1 = y_4 - y_3$$

时, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. 向量 $\overrightarrow{CD}$ 可由 $\overrightarrow{AB}$ 平移得到, 所以, 它们是同一向量. 因此, 平面上的向量由它的分量唯一确定.

类似地, 在空间中, 从点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 到点 $B(x_2, y_2, z_2)$ 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 表示为

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

其中 $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ 与 $z_2 - z_1$ 分别称为 $\overrightarrow{AB}$ 的 x, y, z 轴方向的分量, 它们分别对应 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影.

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模等于有向线段 AB 的长度, 即 A, B 两点的距离, 所以, 由 (8.1.2) 式知

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

它的方向可由有向线段 AB 与 x 轴、 y 轴及 z 轴正向的夹角 α, β, γ 确定. 规定 $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi$. 称 α, β, γ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为它的方向余弦, 其中

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}. \end{cases} \quad (8.1.4)$$

根据图 8.1.7, 读者容易证明 (8.1.4) 式.

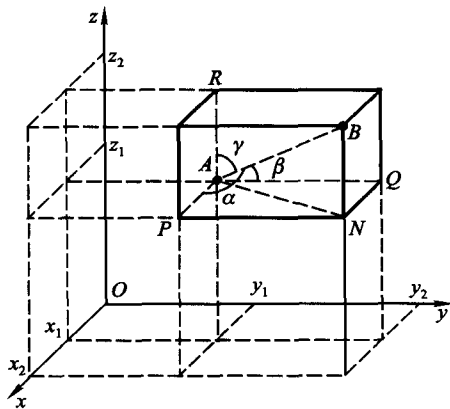


图 8.1.7 空间中的向量及其表示

我们有

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

同样,空间中的向量也由它的分量唯一确定. 因此,一个空间中的向量通常表示为

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

并称它为一个三维向量. 此时,向量 $\mathbf{a}$ 的模为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

它的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos \gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

例 3 求从原点到点 $M(1,1,1)$ 的向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模和方向余弦.

解 $\overrightarrow{OM} = (1-0, 1-0, 1-0) = (1, 1, 1)$. 它的模为

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

它的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

所以,向量 $\overrightarrow{OM}$ 与三个坐标轴成相等夹角.

设 $M(x, y, z)$ 是空间中的任意一点,以坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 为起点,向点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$, 则 $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ 是一个三维向量,这个向量叫做点 M 对于点 $O(0, 0, 0)$ 的向径,那么,向径 $\overrightarrow{OM}$ 与点 $M(x, y, z)$ 一一对应. 我们把所有三维向量的集合叫做三维向量空间. 按照上述点与向径的对应关系,三元数组的集合 $\mathbb{R}^3$ 与三维向量空间是一一对应的,所以,三维向量空间仍然记作 $\mathbb{R}^3$.

一般的,一个 n 元数组的集合记作 $\mathbb{R}^n$. 按类似的观点, $\mathbb{R}^n$ 中任意两点 $M_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 $M_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 的距离定义为

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}, \quad (8.1.5)$$

从 M_1 到 M_2 的向量定义为

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n),$$

称它为一个 n 维向量. 它的模 $|M_1 M_2|$ 由 (8.1.5) 式确定,它的方向由方向余弦 $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n$ 确定,其中

$$\cos \alpha_i = \frac{y_i - x_i}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}}, i = 1, 2, \dots, n.$$

所有 n 维向量的集合称为 n 维向量空间. 同样,一个 n 维向量空间与一个 n 元数组的集合是一一对应的,都记作 $\mathbb{R}^n$. 于是,我们经常把 n 维向量空间的一个向量说成是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点.

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是 n 维向量空间中的两个向量,当且仅当它们对应的分量都相等,即

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

时,称向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 是相等的,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. 这样, $\mathbf{a}$ 为非零向量(通常记作 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$)的充分必要条件是它至少有一个不为 0 的分量.

2. 向量的加法运算

定义 8.1.1 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ 是二维向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中两个向量,定义它们的加法为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2). \quad (8.1.6)$$

我们知道,在物理学中,两个向量的加法(如力的合成)是按平行四边形或三角形法则来确定的. 所谓向量加法的三角形法则是:

设有两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$,任取一点 A 作为向量 $\mathbf{a}$ 的起点,作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$,连接 AC (如图 8.1.8),那么向量 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和,记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$,即 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

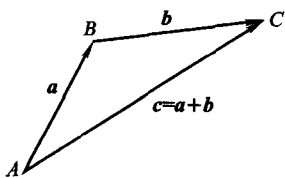


图 8.1.8 向量加法的三角形法则

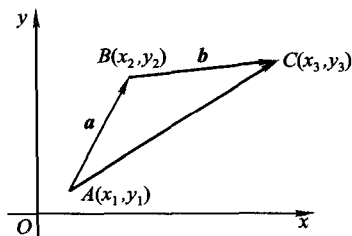


图 8.1.9 按(8.1.6)式定义的向量的加法满足三角形法则

下面说明按(8.1.6)式定义的向量的加法是满足三角形法则的.

事实上,设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是二维向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中两个向量,如图 8.1.9 所示,令 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 分别是向量 $\mathbf{a}$ 的起点和终点,并将向量 $\mathbf{b}$ 的起点移到 $\mathbf{a}$ 的终点 B 处,令 $C(x_3, y_3)$ 是向量 $\mathbf{b}$ 的终点,则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \overrightarrow{BC} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2), \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

按(8.1.6)式,有

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = ((x_2 - x_1) + (x_3 - x_2), (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2)) = (x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

所以,有

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

这就是我们熟悉的三角形法则.

定义 8.1.2 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 是三维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中两个向量,定义它们的加法为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \quad (8.1.7)$$

一般的, 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量, 定义它们的加法为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

即 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的分量是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 对应的分量之和.

容易知道, 向量的加法符合下列运算规律:

- (1) 交换律 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
- (2) 结合律 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

根据向量加法的三角形法则以及“三角形两边之和大于第三边”的原理, 有

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad (8.1.8)$$

其中等号在 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向时成立. 称 (8.1.8) 式为三角不等式, 它可以看做是数的绝对值性质的推广, 有兴趣的读者可以用代数方法给出证明.

3. 向量的数乘运算

定义 8.1.3 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ 是二维向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中一个向量, λ 是实数, 定义 λ 与 $\mathbf{a}$ 的数乘为

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2). \quad (8.1.9)$$

设 $\mathbf{a}$ 是非零向量, λ 是非零实数, 记 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 那么按 (8.1.9) 式, 有

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2} = |\lambda| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda| |\mathbf{a}|,$$

再设 $\mathbf{a}$ 的方向角为 α_1, β_1 , $\mathbf{b}$ 的方向角为 α_2, β_2 , 则它们的方向余弦对应为

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \cos \beta_1 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \\ \cos \alpha_2 &= \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \cos \beta_2 = \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \end{aligned}$$

如果 $\lambda > 0$, 那么 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的方向余弦对应相等, 它们的方向角对应相同, 说明它们方向相同; 如果 $\lambda < 0$, 那么 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的方向余弦互为相反数, 它们的方向角互补, 说明它们方向相反. 所以, 我们得到如下性质:

向量 $\mathbf{a}$ 与实数 λ 的乘积 $\lambda \mathbf{a}$ 是一个与 $\mathbf{a}$ 平行的向量 (如图 8.1.10), 它的模

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|,$$

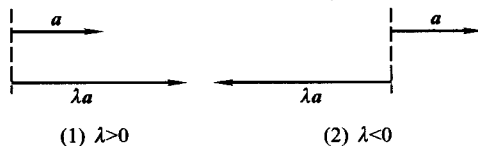


图 8.1.10 向量与数的乘法

它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 $\mathbf{a}$ 相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 $\mathbf{a}$ 相反. 当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda \mathbf{a}| = 0$, 即 $\lambda \mathbf{a}$ 为零向量, 这时它的方向可以是任意的.

定义 8.1.4 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 是三维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中一个向量, λ 是实数, 定义 λ 与 $\mathbf{a}$ 的数乘为

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

一般的, 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量, λ 是实数, 定义 λ 与 $\mathbf{a}$ 的数乘为

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

容易知道, 向量与数的乘积符合下列运算规律:

$$(1) \text{ 结合律 } \lambda(\mu \mathbf{a}) = \mu(\lambda \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a};$$

$$(2) \text{ 分配律 } (\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a};$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}.$$

利用向量的加法与数乘运算, 容易定义两向量的减法为: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$.

根据数与向量乘积的概念, 关于两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行, 我们有下列等价的说法.

$$(1) \mathbf{a} // \mathbf{b};$$

$$(2) \text{ 存在实数 } \lambda, \text{ 使 } \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a};$$

(3) $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 对应的分量成比例. 例如, 对于三维非零向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 与 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 有

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}; \quad (8.1.10)$$

$$(4) \text{ 存在不全为零的常数 } k_1, k_2, \text{ 使得 } k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

前面已经讲过, 模等于 1 的向量叫做单位向量. 设 $\mathbf{e}_a$ 表示与非零向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量, 那么按照向量与数的乘积的规定, 由于 $|\mathbf{a}| > 0$, 所以 $|\mathbf{a}| \mathbf{e}_a$ 与 $\mathbf{a}$ 的方向相同. 又因 $|\mathbf{a}| \mathbf{e}_a$ 的模是 $|\mathbf{a}|$, 因此

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}_a,$$

或者

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量. 通常, 称 $\mathbf{e}_a$ 为 $\mathbf{a}$ 的单位方向向量.

对于三维向量 $\mathbf{a}$, 有

$$\mathbf{e}_a = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

以及

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

例 4 设 $a = (2, 1)$, $b = (-3, 1)$, 求 $c = a + 2b$ 的单位方向向量.

解 因 $c = a + 2b = (2, 1) + 2(-3, 1) = (-4, 3)$,
则 $|c| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$. 于是

$$e_c = \frac{1}{5}(-4, 3) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

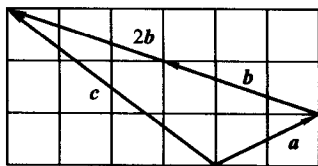


图 8.1.11 例 4 示意图

图 8.1.11 给出了直观图示.

4. 向量的基表示

在二维向量空间, 记 $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$, 则 i, j 分别是与 x 轴、 y 轴同向的单位方向向量, 称之为二维向量空间中的基向量.

设 $a = (a_1, a_2)$ 是二维向量, 则由向量的加法与数乘运算容易知道

$$a = a_1 i + a_2 j. \quad (8.1.11)$$

称(8.1.11)式为二维向量 a 的基表示式或基向量分解式.

在三维向量空间, 记 $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$, 则 i, j, k 分别是与 x 轴、 y 轴、 z 轴同向的单位方向向量, 称之为三维向量空间中的基向量.

设 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 是三维向量, 则由向量的加法与数乘运算容易知道

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k. \quad (8.1.12)$$

称(8.1.12)式为三维向量 a 的基表示式或基向量分解式.

一般的, n 维向量有类似的基表示式.

例 5 设 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 为两已知点, 而在 AB 直线上的点 M 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 为两个有向线段 $\overrightarrow{AM}$ 和 $\overrightarrow{MB}$, 并使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, 其中 $\lambda (\lambda \neq -1)$ 为常数. 求分点 M 的坐标.

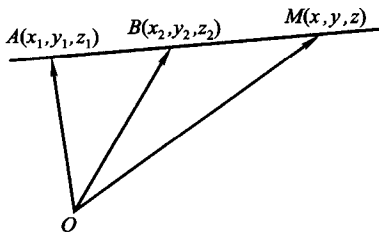


图 8.1.12 例 5 示意图

解 如图 8.1.12 所示, 设点 M 坐标为 (x, y, z) , 则

$$\overrightarrow{OA} = x_1 i + y_1 j + z_1 k,$$

$$\overrightarrow{OB} = x_2 i + y_2 j + z_2 k;$$

以及

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_1) i + (y - y_1) j + (z - z_1) k,$$

$$\overrightarrow{MB} = (x_2 - x) i + (y_2 - y) j + (z_2 - z) k.$$

因为 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, 所以有

$$x - x_1 = \lambda (x_2 - x), y - y_1 = \lambda (y_2 - y), z - z_1 = \lambda (z_2 - z).$$

因此, 有

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

且有 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}$. 特别, 令 $\lambda = 1$, 则点 M 为点 A 和 B 的中点, 对应中点的坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

8.1.3 向量的数量积、向量积

前面我们学习了向量的加法、数乘运算. 在这一节, 我们将介绍向量的数量积和向量积. 这两种运算在数学理论与工程实践中有着广泛的应用.

1. 向量的数量积

我们知道, 若一个物体在常力 F 的作用下产生一个位移 S , 那么, 力 F 所做的功就等于这个力在物体位移方向上的分力的大小与位移的大小的乘积(如图 8.1.13), 用公式表示就是

$$W = |F| |S| \cos \theta, \quad (8.1.13)$$

其中 θ 为 F 与 S 之间的夹角. 如果把问题抽象出来, 这里涉及两个向量 a 与 b 的一种运算, 其结果是一个数量 $|a| |b| \cos \theta$. 我们称之为向量 a 与 b 的数量积.

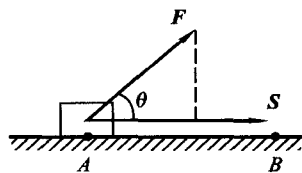


图 8.1.13 物体在力 F 的作用下移动做功

物理学中还有许多这样的例子, 如不可压缩的流体在单位时间内流过平面的质量(即流量)、电通量以及磁通量等问题的数学表示中都涉及两个向量的这种运算.

定义 8.1.5 设 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ 是三维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中两个向量, 定义它们的数量积为

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (8.1.14)$$

向量 a 与 b 的数量积又叫点积或内积.

一般的, 设 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量, 定义它们的数量积(或内积)为

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

从(8.1.14)式看出, 向量 a 与 b 的数量积是一个数量, 其值等于对应的分量乘积之和. 粗略看来, 数量积的这个定义与前面引出的数量积概念相去甚