

高等学校规划教材

现代控制理论简明教程

许世范 陈颖 侯媛彬

Modern
Control
Theory

中国矿业大学出版社

高等学校规划教材

现代控制理论简明教程

许世范 陈颖 侯媛彬

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是煤炭高校“八五”规划教材之一,是按照工业电气自动化专业本科生教学大纲编写的。全书共分六章,内容包括:系统的状态空间、状态方程解、能控性与能观性、动态系统的稳定性分析、极点配置与观测器设计、最优控制等。本书在选材上力图突出重点,讲明基本概念与方法,避免繁琐的数学推导,并给出部分应用例题。既可作为工业电气自动化专业本科教材,亦可供其它相应专业及工程技术人员学习和参考。

责任编辑 高 专

技术设计 关湘雯

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论简明教程/许世范,陈颖,侯媛彬编著.

徐州:中国矿业大学出版社,1996.1(2002.1重印)

高等学校规划教材

ISBN 7-81040-496-2

I. 现… II. ①许…②陈…③侯… III. 现代控制理论—高等学校—教材 IV. O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 095221 号

中国矿业大学出版社出版发行

(江苏徐州 邮政编码 221008)

出版人 解京选

中国矿业大学印刷厂印刷 新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 11.25 字数 271 千字

1996 年 1 月第 1 版 2002 年 1 月第 2 次印刷

印数 2001~4000 册 定价 12.50 元

序 言

自动化是一个对国计民生、社会进步以及科学发展产生巨大影响的科学技术领域。它是推动一个国家现代化的重要技术手段,又是衡量一个国家现代化水平的重要标志。从社会发展的历史看,人类的生、工作以至生活等活动方式都经历手动、机械化、电气化这个过程,由低级向高级发展,而自动化则是其发展的更高形式。有人预言,21 世纪产业系统将是一个自动化系统,人类将进入一个以自动化为标志的新时代。自动化给人类的影响是深远的,它不仅改变人类的生、生活方式,而且也必将改变人类的社会组合,特别是它将不断地提高人类对客观世界的认识能力和改造能力,从而对人类的认识论和方法论产生积极的影响。而控制理论正是自动化的理论基础与核心。

众所周知,在本世纪四、五十年代形成的控制理论,是以频域方法为基础的古典控制理论。它以传递函数做为描述受控制对象的动态过程的数学模型,进行系统分析与综合。因此,它适用的范围仅限于线性、时不变(定常)、确定性的、集中参数的单变量(即单输入单输出,简称 SISO)系统。它所能解决的问题是以系统稳定性为核心的动态品质。古典控制理论为广大从事自动控制或自动化工作的工程技术人员所掌握,并在众多的工业对象中得到广泛和有效的应用。但是社会的发展,生产的进步,对控制理论不断地提出更加严格的新的要求,如以 50 年代兴起的航天技术为代表的更加复杂的控制对象就是一个多变量系统(即多输入多输出系统,简称 MIMO 系统),有的对象具有非线性和时变特性,甚至具有不确定性的、分布参数特性等。在控制目标上还提出了在某种目标函数意义下的最优化问题,如最少燃料消耗,最小时间等。所有这些,都给包括系统建模和控制方法等在内的理论和方法提出新的问题。而这些问题都是单纯依赖古典控制理论所不能解决的。面对这些挑战,控制理论必须向前发展,而在这一时期,整个科学的进步,特别是现代数学和计算机技术的发展恰好是为控制理论的发展提供了强有力的支持。正是在这种历史背景下,现代控制理论应运而生。在五、六十年代不少科学家为此做出了杰出的贡献,其中应特别提到的有庞特里亚金(Понтрягин)的极值原理,贝尔曼(Bellman)的动态规划以及卡尔曼(Kalman)的滤波、能控性与能观性理论等。正是他们的这些理论上的突破性成果奠定了现代控制理论的基础,并成为控制理论由古典控制理论发展到现代控制理论的里程碑。现代控制理论(Modern Control Theory)这个名称就是在 1960 年召开的美国自动化大会上确定下来的。现代控制理论是以建立在时域基础上的状态空间模型做为描述受控对象动态过程的数学模型,在某种意义上讲,它是以最优控制为核心的控制理论。现代控制理论包括线性系统理论、最优控制、系统辨识及自适应控制等分支。现代控制理论在其诞生的 30 多年来,不论在理论上,还是在应用方面一直处于十分活跃的发展状态。它不仅在航空航天领域内取得令人瞩目的惊人成就,而且在诸如电气、机械、化工、冶金、轻工、交通以及煤炭等工程领域,以及在生物医学、企业管理、社会科学等非工程领域都得到了广泛应用并显示出巨大的魅力。因此,现代控制理论已成为渗透到各学

科领域的一门新兴的横向学科而倍受人们的重视。应指出,现代控制理论的出现,并不是对古典控制理论的否定,而是对它的发展。古典控制理论在工程上仍然是一项重要的控制理论基础和方法。正像当前随着受控对象更加复杂化以及对控制的要求更加苛刻,如由复杂对象在复杂环境下完成复杂任务(简称为复杂系统,即 Complex Systems)的控制问题的提出,使现代控制理论也面临新的挑战,并由此激发了智能控制与智能自动化的突起与发展,但这也并未因此而使现代控制理论失去其理论和应用价值。相反客观实际的需求的不断提高,正为控制理论的发展提供了进一步开拓的天地,这也正是在大学自动化专业及其它专业开设现代控制理论课的目的。

本书是煤炭工业部“八五”规划教材之一,并按照工业电气自动化专业本科生教学大纲编写的。学时数为 50 学时,因此更适合于少学时的教学计划的需要。在选材上力图突出重点,讲明基本概念与方法,避免繁琐的数学推导,并给出部分应用例题。在学习本书时读者可参考由中国矿业大学出版社出版的《自动控制原理辅导与习题》。本书在编排上也考虑到自学的需要,因此也可做为对本课有兴趣的读者自学与应用的参考。

本书共分六章,前五章为线性系统理论,第六章为最优控制。其中一、三、五章由西安矿业学院侯媛彬编写,二、四、六章由中国矿业大学陈颖编写,全书由中国矿业大学许世范担任主编。本书在编写过程中,得到了中国矿业大学、西安矿业学院和湘潭矿业学院以及煤炭工业部教材编审室有关教师的支持,在此一并表示由衷地感谢。但由于编者的能力有限,误谬之处在所难免,恳请各界专家与读者给以批评和指教。

许世范

1995 年 12 月

目 录

第一章 系统的状态空间模型	(1)
第一节 状态空间模型表示法.....	(1)
第二节 状态空间模型的图示法.....	(7)
第三节 连续系统数学模型的转换	(11)
第四节 离散系统的传递函数阵及其实现	(24)
小 结	(27)
第二章 状态方程的解	(29)
第一节 线性定常系统状态方程的解	(29)
第二节 线性时变系统状态方程的解	(38)
第三节 离散系统状态方程的解	(41)
小 结	(43)
第三章 能控性与能观性	(44)
第一节 线性连续系统的能控性	(44)
第二节 线性连续系统的能观性	(50)
第三节 离散系统的能控性与能观性	(55)
第四节 能控性与能观性的对偶关系	(58)
第五节 线性定常系统的结构分解	(59)
第六节 最小实现	(68)
第七节 输出能控性	(72)
小 结	(73)
第四章 动态系统的稳定性分析	(74)
第一节 李雅普诺夫稳定性定义	(74)
第二节 李雅普诺夫间接法	(76)
第三节 李雅普诺夫直接法	(79)
小 结	(87)
第五章 极点配置与观测器设计	(88)
第一节 概述	(88)
第二节 单输入系统的极点配置	(90)
第三节 多输入系统的极点配置	(96)
第四节 观测器及其设计方法.....	(104)
第五节 用状态观测器的反馈系统.....	(112)
小 结.....	(118)

第六章 最优控制	(119)
第一节 概述.....	(119)
第二节 泛函的基本概念.....	(124)
第三节 用古典变分法求解最优控制.....	(126)
第四节 极小值原理.....	(134)
第五节 最小时间控制.....	(139)
第六节 线性二次型最优控制问题.....	(147)
第七节 动态规划.....	(153)
第八节 应用举例.....	(164)
小 结.....	(166)
习题.....	(167)
附录 二次型及其定号性	(169)
参考书目	(171)

第一章 系统的状态空间模型

第一节 状态空间模型表示法

现代控制理论是对系统的状态进行分析和综合的理论,是在引入了状态和状态空间概念的基础上发展起来的。因此,确立系统的状态空间模型是最首要的问题。

一、状态空间法的基本概念

自然界存在输入输出完全不同的两类系统。一类是只要知道输入信息,便可立即获得输出信息,即输入输出之间关系是一个代数方程,例如各种比例放大器;另一类系统若只给输入信息,并不能确定输出信息,为了获得确定的输出信息,除给定输入外,还必须给出该系统的一组初始信息。或者说,描述这类系统输入输出关系的数学表达式是一个微分方程。例如,对一个电源 $u(t)$ 的电感负载电路,当接通电源时,电路的微分方程为

$$L \frac{di(t)}{dt} = u(t) \quad (1-1)$$

则输出电流 $i(t)$ 和输入电压的关系为

$$i(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{L} u(\tau) d\tau + I_0 \quad (1-2)$$

式中, I_0 ——初始时刻 t_0 在电感 L 中流过的初始电流。

从物理意义上看, I_0 是由于电感元件具有贮存信息的能力,把初始时刻 t_0 以前的输入信息以磁能的形式贮存在电感线圈中。因此初始电流 I_0 可以表示为

$$I_0 = \int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{L} u(\tau) d\tau \quad (1-3)$$

把式(1-3)代入式(1-2),则

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_{t_0}^t \frac{1}{L} u(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{L} u(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{L} u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1-4)$$

显然,对于诸如这类含有贮能元件的系统,在 t 时刻的输出信息,不但依赖于 $[t_0, t]$ 时间区间内所施加的输入信息 $u(t)$,而且还依赖于初始时刻 t_0 以前的输入信息。这是一个按确定性规律随时间演化的系统,并称之为动态系统。由于动态系统的理论来源于古典力学,故又称之为动力学系统。

引用一个纯动力学系统的例子,若有一个质量为 m 的质点,其运动方程由牛顿第二定律描述,即

$$ma(t) = f(t) \quad (1-5)$$

或

$$m \frac{dv(t)}{dt} = f(t)$$

则有

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + v_0 \quad (1-6)$$

式中 m ——质点的质量;

$a(t)$ ——质点在 t 时刻的加速度;

$v(t)$ ——质点在 t 时刻的速度;

$f(t)$ ——在 $[t_0, t]$ 时间区间内作用在质点 m 上的作用力。

对比式(1-2)和式(1-6),上述的电感电路和该质点的力学模型具有相同的输入输出关系,所以把能够贮存输入信息的系统或者把能用微分方程描述的系统均可以称作动态系统。

所谓“状态”,是描述系统的过去、现在和将来的运动状况。以上述质点运动为例,质点位移为

$$s(t) = s(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2}at^2 \quad (1-7)$$

从上式可见,若要确定某一时刻的 $s(t)$,除必须给出作用力 $f(t)$ 外,还必须知道初始位置 $s(t_0)$ 和初始速度 $v(t_0)$ 。换句话说,该质点每一时刻的状况,必须用该时刻的位置和速度这两个物理量才能完全地描述。这两个物理量就是能够完全描述该系统运动状态的一组变量。这一组变量可以构成一个二维空间。下面对有关状态空间描述的几个术语作一介绍。

状态:动态系统的状态,是指完全地描述系统时域行为的一个最小变量组。该变量组中的每个变量称为状态变量。所谓完全地描述是指若给定了 $t=t_0$ 时刻这组变量的值和 $t \geq t_0$ 时输入的时间函数,那么系统在 $t \geq t_0$ 的任何瞬时的行为就完全确定了。所谓最小是指这个变量组中的每个变量都是相互独立的。

状态向量:若一个系统有 n 个状态变量, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, 用这 n 个状态变量作为分量所构成的向量 $x(t)$ 就称为该系统的状态向量,即

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

状态空间:状态向量 $x(t)$ 的所有可能的组合构成状态空间。或者说,以状态变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为坐标轴所组成的 n 维空间,称为状态空间,并用 X^n 来表示。

状态空间中的每一点均代表状态变量特定的一组值,即系统的某一特定状态。 $t \geq t_0$ 各瞬时的状态在状态空间构成一条轨线。该轨线的形状完全由系统在 t_0 时刻的初始状态和 $t \geq t_0$ 时的输入以及系统的动态特性所决定。在古典控制理论中所讨论的相平面就是一个特殊的二维状态空间。

二、状态空间模型的一般形式

在现代控制理论中,状态空间模型所能描述的系统可以是单输入单输出的,也可以是多输入多输出的。状态空间表达式是一种采用状态描述系统动态行为(动态特性)的时域描述的数学模型。它包含状态方程和输出方程。状态方程是一个一阶向量微分方程,输出方程是

一个代数变换方程。

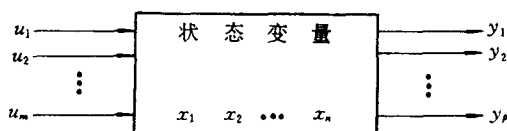


图 1-1 系统表示

设描述某一动态系统的一个状态向量 $x(t) = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n]^T$ (这里 T 为矩阵的转置), 如图 1-1 所示。显然, 该系统是 n 阶系统, 若系统有 m 个输入 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$, 有 p 个输出 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_p$, 且分别记 $u(t) = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_m]^T$ 和 $y(t) = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ \cdots \ y_p]^T$ 为输入和输出向量。则系统的状态空间模型的一般形式为

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1-8)$$

$$y(t) = \Phi(x(t), u(t), t) \quad (1-9)$$

式中, $f = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ \cdots \ f_n]^T$ 是 n 维函数向量; Φ 是向量函数。式(1-8)是一阶向量微分方程, 也可以看作由 n 个一阶微分方程所构成的方程组, 称其为系统的状态方程; 式(1-9)是一个代数方程, 表示系统的输出量与输入量以及状态变量之间的关系, 称之为系统的输出方程, 或称为观测方程。这两个方程总称为系统的状态空间表达式。

若系统是线性的, 则式(1-8)和式(1-9)写成

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1-10)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (1-11)$$

式中, $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $C(t)$ 、 $D(t)$ 分别是 $n \times n$ 系数阵或状态阵, $n \times m$ 输入阵, $p \times n$ 输出阵和 $p \times m$ 传递矩阵, 其元素都是 t 的函数。因此称由式(1-10)和式(1-11)所描述的系统是时变系统。若这些矩阵的所有元素都是与 t 无关的常数, 就称之为时不变或定常系统。所以, 线性定常系统的状态空间模型为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1-12)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1-13)$$

在实际中, D 阵常为零, 故线性定常系统可用 (A, B, C) 表示。

三、状态空间模型的建立

要建立状态空间表达式, 必须先选取状态变量, 状态变量一定要是系统中相互独立的变量。对于同一系统, 状态变量选取的不同, 所建立的状态空间表达式也不同, 通常选取状态变量采用以下三种途径:

(1) 选择系统中储能元件的输出物理量作为状态变量, 然后根据系统的结构用物理定律列出状态方程。

(2) 选择系统的输出及其各阶导数作为状态变量。

(3) 选择能使状态方程成为某种标准形式的变量作为状态变量。

这里先介绍第一种方法, 即根据系统的结构, 用物理定律列出状态空间表达式。其它方法将在后面章节讨论。

一般常见的工程控制系统, 按其能量属性可分为电气(包括电网络、电机等)、机械、液

压、热力等。根据其物理定律(如基尔霍夫定律、牛顿定律、能量守恒定律等)可建立系统的状态方程,当指定系统的输出后,便可容易地写出系统的输出方程。另一方面,既然动态系统是一个贮存输入信息的系统,则根据系统中的贮能元件及其相应的能量方程也能方便地建立起状态方程。

下面举例讨论系统状态空间表达式的列写步骤。为书写方便,以下省写状态变量的 t 。

例 1-1 如图 1-2 所示的电路,试以电压 u 为输入,以电容 C 上的电压 u_C 为输出变量,列写其状态空间表达式。

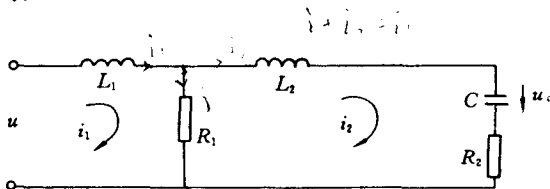


图 1-2 例 1 电路

解 图 1-2 电路中的贮能元件有电感 L_1, L_2 和电容 C 。根据基尔霍夫定律列写电路方程:

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 - R_1 i_2 = u \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_1 i_2 - R_1 i_1 + R_2 i_2 + u_C = 0 \\ C \frac{du_C}{dt} = i_2 \end{cases}$$

考虑到 i_1, i_2, u_C 这三个变量是独立的,故可确定为系统的状态变量,经整理上式变为

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_1 + \frac{R_1}{L_1} i_2 + \frac{1}{L_1} u \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{R_1}{L_2} i_1 - \frac{R_1 + R_2}{L_2} i_2 - \frac{1}{L_2} u_C \\ \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_2 \end{cases}$$

现在令 $x_1 = i_1, x_2 = i_2, x_3 = u_C$, 将上式写成矩阵形式即为状态方程。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1 + R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

由于前面已指出电容上的电压 u_C 为输出变量,故系统的输出方程为

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

由此可见,该电路的系数矩阵、控制矩阵、输出矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1 + R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 1]$$

显然该网络是一个单输入单输出(SISO)的系统。此时,矩阵 B 与 C 均为向量, x_1, x_2, x_3 分别为电路中 i_1, i_2, u_C , 由它们确定电路的内部状态。状态方程式的一个解 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 就确定了电路的一个动态过程。由此可见,向量 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ 完全描述了电路的内部状态,故称它为该电路的状态向量, x_1, x_2, x_3 称为状态变量。由于状态方程是一阶微分方程组,并且该方程组的解由状态的初始值 $x_1(0), x_2(0), x_3(0)$ (即 $i_1(0), i_2(0), u_C(0)$) 和外部输入 u 所唯一确定。换句话说,电路的动态过程,由状态变量的初始值和外部输入唯一确定。

另外,在本例中可看出电路中仅有三个储能元件,其中二个是电感,一个是电容,且这三个储能元件相互独立,状态向量的维数正好等于独立储能元件的个数。

例 1-2 图 1-3a 是一个机械运动的模型,在系统中 M_1 和 M_2 是物体的质量; k_1 和 k_2 是弹性系数,单位是 $N \cdot m$; B_1 和 B_2 是粘性摩擦系数,其单位是 $Nm \cdot s$; f 是加在系统上的外力; y_1, y_2 分别表示两个质量从平衡点的位移。要求写出系统以 f 为输入,以 y_1, y_2 为输出的状态空间表达式。

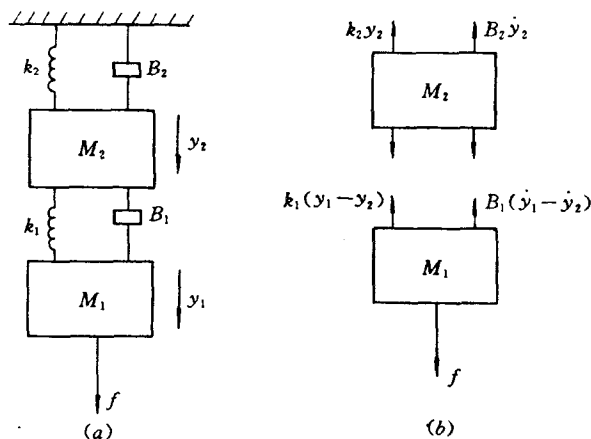


图 1-3 机械运动模型
a—示意图; b—隔离体图

解 图 1-3 中,弹簧 k_1, k_2 , 质量块 M_1, M_2 为储能元件,弹簧的伸长量即质量块的位移 y_1, y_2 和质量块位移的速度 $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ 可选作状态变量。由于这四个状态变量是相互独立的,故可确定为能描述系统行为的一组最小的变量组。为了列写系统的运动方程式,先画出其隔离体图如图 1-3b 所示。根据牛顿第二定律,对 M_1 和 M_2 可写出

$$M_1 \frac{dv_1}{dt} = f - k_1(y_1 - y_2) - B_1\left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right)$$

$$M_2 \frac{dy_2}{dt} = k_1(y_1 - y_2) + B_1\left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right) - k_2 y_2 - B_2 \frac{dy_2}{dt}$$

令状态变量 $x_1 = y_1, x_2 = \dot{y}_1, x_3 = y_2, x_4 = \dot{y}_2, u = f$, 经整理可求得状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k_1}{M_1}x_1 - \frac{B_1}{M_1}x_2 + \frac{k_1}{M_1}x_3 + \frac{B_1}{M_1}x_4 + \frac{1}{M_1}u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{k_1}{M_2}x_1 + \frac{B_1}{M_2}x_2 - \frac{k_1 + k_2}{M_2}x_3 - \frac{B_1 + B_2}{M_2}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M_1} & -\frac{B_1}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & \frac{B_1}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{M_2} & \frac{B_1}{M_2} & -\frac{k_1 + k_2}{M_2} & -\frac{B_1 + B_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

系统已规定了 y_1 (即 x_1)、 y_2 (即 x_3) 为输出, 则输出方程为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

这是一个单输入两输出含有四个状态变量的系统, 输入矩阵 B 是 $n \times m = 4 \times 1$ 维, 系数矩阵 A 是 $n \times n = 4 \times 4$ 维, 输出矩阵 C 是 $p \times n = 2 \times 4$ 维。

例 1-3 两个蓄水池系统模型如图 1-4 所示。设蓄水池 1 和蓄水池 2 的横断面积分别为 S_1, S_2 , 液面高度为 h_1, h_2 , 离开平衡状态单位时间的流量为 Q , 通过阀的流量为 C_1 , 漏流量为 C_2 , 阀和漏流量的阻抗为 R_1, R_2 , 并指定蓄水池 2 的液位 h_2 为被控量即系统的输出。求出该系统的数学模型。

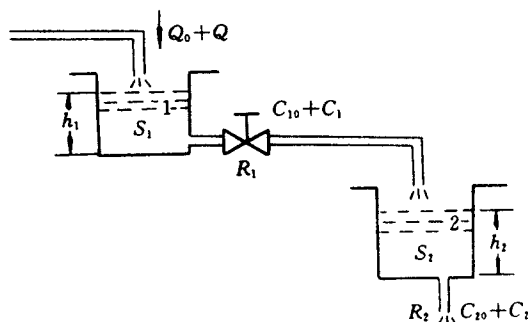


图 1-4 两个蓄水池系统

解 根据流体力学定律, 考虑到离开平衡状态的液面变化, 可写出下面一组微分方程式

$$\begin{cases} S_1 \frac{dh_1}{dt} = Q - C_1 \\ S_2 \frac{dh_2}{dt} = C_1 - C_2 \end{cases}$$

选择液面高度 h_1, h_2 为两个状态变量, 并令 $x_1 = h_1, x_2 = h_2$, 流入量即输入 $u = Q$, 上式变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{C_1}{S_1} + \frac{u}{S_1} \\ \dot{x}_2 = \frac{C_1}{S_2} - \frac{C_2}{S_2} \end{cases}$$

此时, C_1 、 C_2 与液位成正比, 因此, $C_1 = \frac{x_1}{R_1}$, $C_2 = \frac{x_2}{R_2}$ 。经整理可得状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_1}{S_1 R_1} + \frac{u}{S_1} \\ \dot{x}_2 = \frac{x_1}{S_2 R_1} - \frac{x_2}{S_2 R_2} \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{S_2 R_1} & -\frac{1}{S_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

其输出方程为

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

以上三例是结构和参数已知的系统建立状态空间表达式的步骤, 对于结构和参数未知的系统, 其状态方程的建立, 通常可通过辨识的途径确定其数学模型, 读者可参考有关的书籍。

第二节 状态空间模型的图示法

在状态空间分析中, 状态空间表达式用状态变量图来表示, 或者采用模拟计算机的模拟结构图来表示系统各状态变量之间的信息传递关系, 如同在古典控制理论中的传递函数表达式可以用方框图来表示一样, 具有清晰、直观的特点。这里先给出几个系统状态空间模型涉及到的基本元件的表示符号, 如图 1-5 所示。

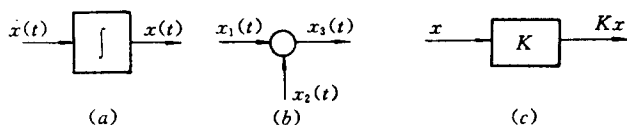


图 1-5 状态结构图基本元件

a—积分器; b—加法器; c—比例器

状态空间表达式的结构图的绘制步骤是, 积分器的数目应等于状态变量数, 并把它们画在适当的位置; 每个积分器的输出表示相应的某个状态变量, 并注明相应变量的编号; 然后根据所给状态方程和输出方程画出加法器和比例器; 最后用箭头把这些元件连接起来。系统结构图分为模拟结构图和状态结构图两种, 但两者是等效的。

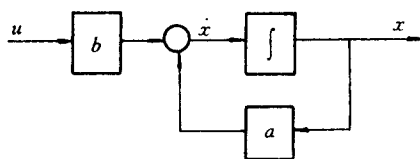


图 1-6 一阶系统状态结构图

图 1-6 是一个一阶标量系统的状态结构图, 其状态表达式为

$$\dot{x} = ax + bu$$

同理,对于式(1-12)和式(1-13)所表示的多输入多输出系统,状态空间模型所对应的结构图如图 1-7 所示。

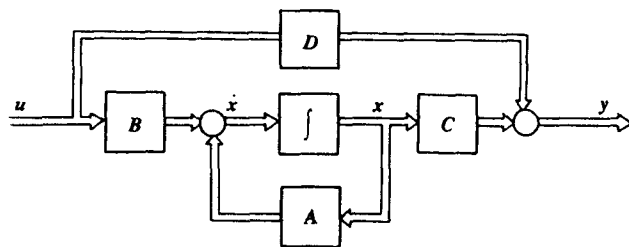


图 1-7 多输入多输出系统的状态结构图

图中双线箭头表示向量信号的传递通道。显然,图 1-6 单输入单输出一阶系统结构图是多输入多输出系统图 1-7 的特殊形式。

单输入单输出线性定常系统微分方程的标准形式为

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\ = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1} \dot{u} + b_m u \end{aligned} \quad (1-14)$$

考虑到系统实际物理意义及可实现性, $n \geq m$, 这里设 $m = n - 1$ 。与式(1-14)对应的传递函数表达式为

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1-15)$$

在现代控制理论中,为了分析问题更简单、直观,总希望其状态空间表达式是某种标准(规范型)的形式,常用的有能控标准形、能观标准形、对角标准形和约当标准形,下面分别表示出其状态空间模型及对应的状态结构图。

一、能控标准形

如果把式(1-15)的状态空间表达式表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_{n-1} & \\ 0 & & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1-16)$$

$$y = [b_m \ b_{m-1} \ \cdots \ b_1 \ b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

式(1-16)中的 I_{n-1} 为 $n-1$ 阶单位矩阵,把这种形式的 A 阵称为友阵。只要系统状态方程的系数阵 A 和输入阵 B 具有式(1-16)的形式, C 阵的形式可以任意,则称之为能控标准形,能

The diagram illustrates a continuous-time system with state variables $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$. The input u is fed into a summing junction. The output of this junction is $\dot{x}_n$, which is integrated to produce x_n . This state x_n is then integrated to produce x_{n-1} , and so on, until x_1 . The output y is the sum of x_1 and the output of a block b_m . The output y is also fed back through a block b_0 to the input summing junction. Intermediate states x_{n-1} and x_1 are also fed back through blocks $-a_1$ and $-a_n$ respectively to the input summing junction. The diagram shows a chain of integrators with feedback paths from the output y and intermediate states x_1, x_{n-1} through blocks labeled $b_0, b_1, \dots, b_m$ and $-a_1, -a_2, \dots, -a_n$.

二、能观标准形

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ & & & -a_{n-1} \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & -a_2 \\ & & & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (1-18)$$

$$y = [0 \ 0 \ \cdots \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

还应该指出,从上述能控标准形和能观标准形的结构可以看出,二者的系数阵 A 是互为转置的;二者的 B 阵与 C 阵是互为转置的。这种互为转置的关系称为对偶性,并在第三章讨论。

实际上,能控标准形和能观标准形均各有另一种形式。另一种形式的能控标准形的 A 阵是式(1-16) A 阵的转置,或者说是式(1-18)的 A 阵,其 B 阵为 $[1\ 0\ 0\ \cdots\ 0]^T$, C 阵仍同式(1-17)的 C 阵。另一种形式的能观标准形 A 阵同式(1-16)的 A 阵或者说是上述能观标准形 A 阵的转置, B 阵仍同式(1-18)中的 B 阵, C 阵为 $[1\ 0\ 0\ \cdots\ 0]$ (参见第三章第八节)。

若式(1-15)的特征方程具有互异的特征值或称为无重极点,其状态空间表达式可写成对角标准形,即

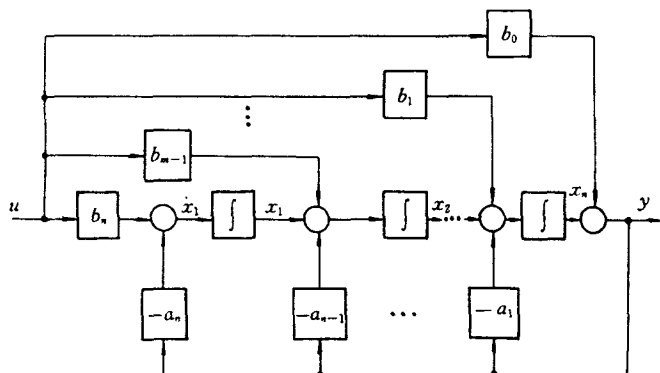


图 1-9 能观标准形结构图

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1-20)$$

$$y = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

式中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为系统互异的特征值, $c_1, c_2, \dots, c_n$ 为对应特征值的待定系数。在这种情况下, 系统的结构图如图 1-10 所示。

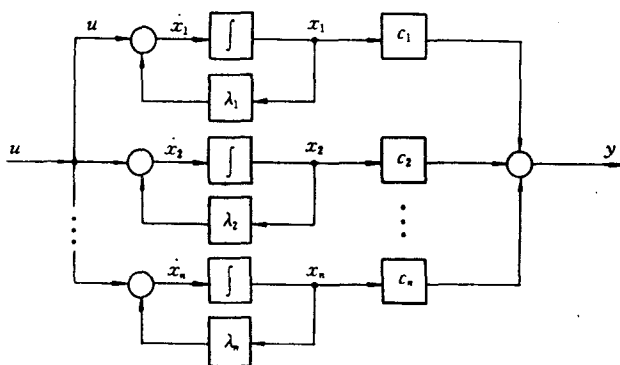


图 1-10 对角标准形结构图

四、约当标准形

当式(1-15)的特征值有重时, 为简单起见, 设只有一个重特征值, 重数为 j , 多个重特征值的情况可完全照此处理, 其对应的状态空间表达式为