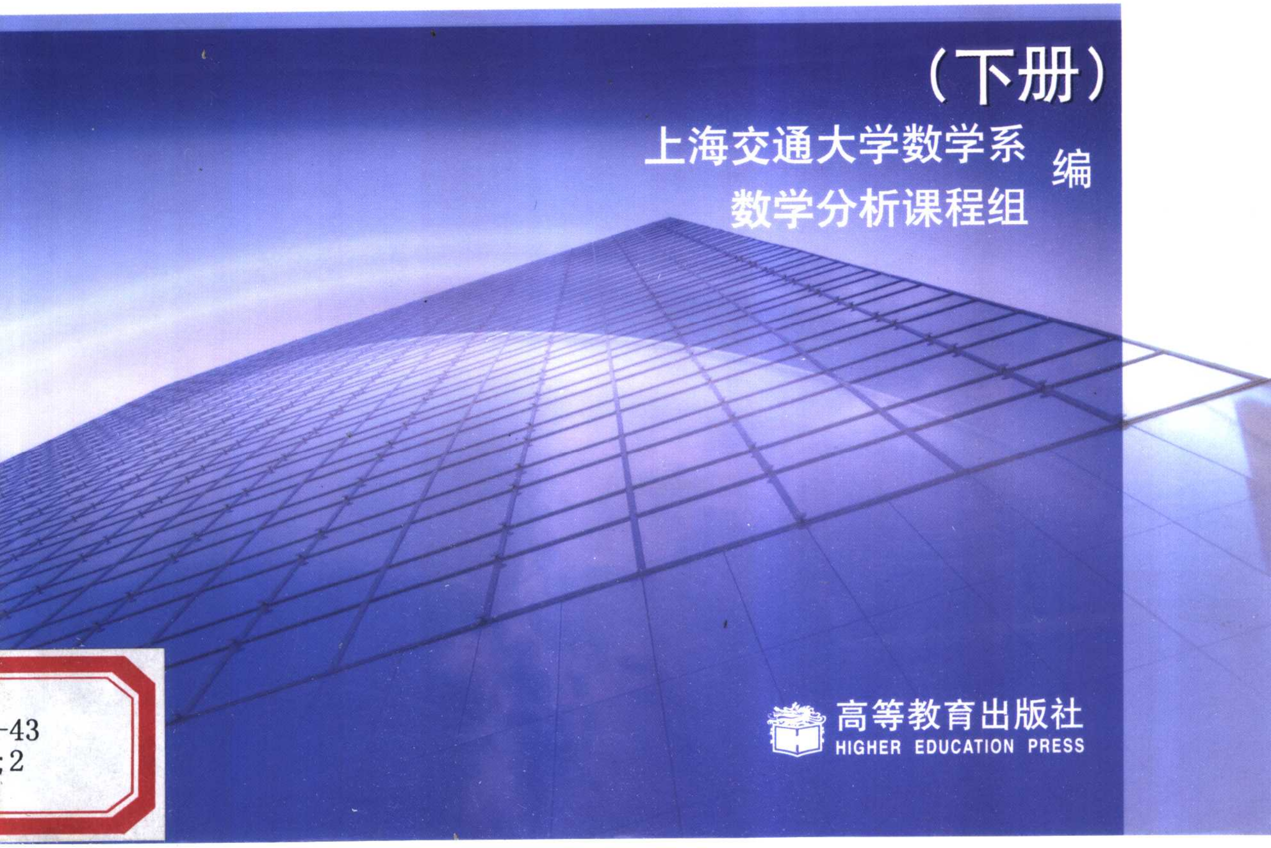
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学

数学分析



（下册）

上海交通大学数学系
数学分析课程组 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学

数学分析

（下册）

上海交通大学数学系
数学分析课程组 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学．数学分析．下册／上海交通大学数学系数学分析课程组编．—北京：高等教育出版社，2007.6

ISBN 978-7-04-021679-0

Ⅰ．大… Ⅱ．上… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材②数学分析－高等学校－教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 064203 号

策划编辑 李艳馥 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 马静如 **责任校对** 刘 莉 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宝旺印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2007 年 6 月第 1 版
印　　张	18.75	**印　　次**	2007 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	350 000	**定　　价**	19.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 21679-00

目　　录

第九章　数项级数 …… 1

9.1　数项级数的概念与性质 …… 1

9.1.1　数项级数的概念 …… 1

9.1.2　级数的性质 …… 3

习题 9.1 …… 5

9.2　数列的上、下极限 …… 6

9.2.1　上极限与下极限的概念 …… 6

9.2.2　数列上、下极限的性质 …… 7

习题 9.2 …… 10

9.3　正项级数 …… 11

9.3.1　正项级数的概念 …… 11

9.3.2　正项级数的收敛性判别法 …… 12

习题 9.3 …… 20

9.4　任意项级数 …… 22

9.4.1　任意项级数的概念与收敛性判别法 …… 22

9.4.2　更序级数 …… 26

9.4.3　收敛级数的乘积 …… 27

习题 9.4 …… 28

第十章　函数列与函数项级数 …… 30

10.1　一致收敛性 …… 30

10.1.1　基本问题 …… 30

10.1.2　一致收敛性 …… 31

习题 10.1 …… 36

10.2　一致收敛性的判别法 …… 37

习题 10.2 …… 40

10.3　一致收敛函数列与函数项级数的性质 …… 40

习题 10.3 …… 45

第十一章　幂级数 …… 47

11.1　幂级数及其基本性质 …… 47

11.1.1　收敛区间与收敛域 …… 47

11.1.2　幂级数的分析性质 …… 51

习题 11.1 …… 54
11.2 函数的幂级数展开 …… 55
习题 11.2 …… 60
第十二章 Fourier 级数 …… 62
12.1 函数的 Fourier 级数 …… 62
12.1.1 三角函数系的正交性 …… 62
12.1.2 周期为 2π 的函数的 Fourier 级数 …… 62
习题 12.1 …… 65
12.2 Fourier 级数的收敛性 …… 65
12.2.1 Dirichlet 积分 …… 65
12.2.2 局部性定理 …… 67
12.2.3 Fourier 级数收敛的判别方法 …… 69
习题 12.2 …… 71
12.3 Fourier 级数的性质 …… 72
12.3.1 周期为 $2T$ 的函数的 Fourier 展开式 …… 72
12.3.2 Fourier 级数的复数形式 …… 73
12.3.3 Fourier 级数的分析性质 …… 74
12.3.4 Fourier 级数的逼近与 Bessel 不等式 …… 76
习题 12.3 …… 78
第十三章 多元函数的极限与连续 …… 80
13.1 n 维 Euclid 空间上的点集 …… 80
13.1.1 Euclid 空间的基本概念 …… 80
13.1.2 平面点集 …… 82
13.1.3 $\mathbf{R}^2$ 上的基本定理 …… 85
习题 13.1 …… 88
13.2 多元函数的极限与连续 …… 88
13.2.1 多元函数 …… 88
13.2.2 二元函数的极限 …… 89
习题 13.2 …… 94
13.3 二元函数的连续性 …… 95
习题 13.3 …… 99
第十四章 多元函数微分学 …… 101
14.1 偏导数与全微分 …… 101
14.1.1 偏导数 …… 101
14.1.2 全微分 …… 104
14.1.3 向量值函数的导数 …… 109
习题 14.1 …… 113

14.2　复合函数微分法 …… 115
14.2.1　复合函数的求导法则 …… 115
14.2.2　复合函数的微分及一阶全微分形式不变性 …… 118
习题 14.2 …… 119
14.3　高阶偏导数与高阶全微分 …… 121
14.3.1　高阶偏导数 …… 121
14.3.2　高阶全微分 …… 126
习题 14.3 …… 127
14.4　Taylor 公式与极值问题 …… 128
14.4.1　Taylor 公式 …… 128
14.4.2　极值问题 …… 131
习题 14.4 …… 136
14.5　隐函数存在定理 …… 137
14.5.1　隐函数存在定理 …… 137
14.5.2　反函数组的存在性 …… 144
习题 14.5 …… 146
14.6　方向导数与梯度 …… 147
14.6.1　方向导数 …… 147
14.6.2　梯度 …… 149
习题 14.6 …… 151
14.7　偏导数的几何应用 …… 151
14.7.1　空间曲线的切线与法平面 …… 151
14.7.2　曲面的切平面与法线 …… 153
习题 14.7 …… 156
14.8　条件极值 …… 157
习题 14.8 …… 164
第十五章　含参变量的积分 …… 166
15.1　含参变量常义积分 …… 167
15.1.1　含参变量常义积分的定义与分析性质 …… 167
15.1.2*　基本定理的推广形式 …… 173
习题 15.1 …… 175
15.2　含参变量广义积分 …… 176
15.2.1　含参变量广义积分的一致收敛性 …… 177
15.2.2　含参变量广义积分的分析性质 …… 183
15.2.3　广义积分的计算问题举例 …… 188
习题 15.2 …… 191
15.3*　Euler 积分 …… 192

15.3.1 Γ函数 …… 192
15.3.2 B函数 …… 194
15.3.3 Euler积分应用举例 …… 196
习题15.3 …… 198
第十六章　重积分 …… 200
16.1　二重积分的概念与性质 …… 200
16.1.1　二重积分的定义 …… 201
16.1.2　二重积分的可积条件 …… 201
16.1.3　二重积分的性质 …… 202
习题16.1 …… 202
16.2　二重积分的计算 …… 203
16.2.1　二重积分与二次积分 …… 203
16.2.2　化二重积分为二次积分 …… 205
16.2.3　用极坐标计算二重积分 …… 208
16.2.4　二重积分的一般变量变换 …… 211
习题16.2 …… 212
16.3　三重积分的概念与性质 …… 215
16.4　三重积分的计算 …… 216
16.4.1　化三重积分为三次积分 …… 216
16.4.2　三重积分的变量变换 …… 218
习题16.4 …… 221
第十七章　第一类线面积分 …… 223
17.1　第一类曲线积分 …… 223
17.1.1　第一类曲线积分的概念与性质 …… 223
17.1.2　第一类曲线积分的计算 …… 224
习题17.1 …… 226
17.2　第一类曲面积分 …… 227
17.2.1　曲面面积的概念与计算 …… 227
17.2.2　第一类曲面积分的概念与计算 …… 230
习题17.2 …… 231
第十八章　第二类线面积分 …… 233
18.1　第二类曲线积分 …… 233
18.1.1　第二类曲线积分的概念与性质 …… 233
18.1.2　第二类曲线积分的计算 …… 235
习题18.1 …… 237
18.2　Green公式 …… 238
18.2.1　平面闭曲线的定向 …… 239

18.2.2　Green 公式 …… 239
18.2.3　平面上的第二类曲线积分与路径无关的条件 …… 242
习题 18.2 …… 244
18.3　第二类曲面积分 …… 245
18.3.1　曲面的侧 …… 245
18.3.2　第二类曲面积分的概念 …… 246
18.3.3　第二类曲面积分的计算 …… 248
习题 18.3 …… 250
18.4　Gauss 公式 …… 250
18.4.1　Gauss 公式 …… 251
18.4.2　散度 …… 253
习题 18.4 …… 255
18.5　Stokes 公式 …… 256
18.5.1　Stokes 公式 …… 256
18.5.2　旋度 …… 258
18.5.3　空间中的第二类曲线积分与路径无关的条件 …… 259
习题 18.5 …… 260
答案与提示 …… 261
索引 …… 286

第九章　数项级数

9.1　数项级数的概念与性质

9.1.1　数项级数的概念

设有数列$\{a_n\}$,本章的目的是讨论它们无穷多项相加的表达式:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots. \tag{1}$$

我们最熟悉的无穷多个实数之和的例子是实数的小数表示,例如,$\frac{1}{3}$的小数形式是0.333 3…,即

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}&=0.3+0.03+0.003+0.000\,3+\cdots\\&=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots.\end{aligned}$$

因为对无穷多个实数逐一地进行加法运算是不可能的,所以我们需要对无穷多个数之"和"给出合理的定义.

我们称形如(1)式的无穷多项相加的表达式为**数项级数**或**级数**,简记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,其中$a_n$称为级数的**通项**或**一般项**.

定义　对于数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots, \tag{2}$$

记

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

并称之为级数(2)的**部分和**.

若$\{S_n\}$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,则称级数(2)**收敛**,且$S$称为级数(2)的**和**,记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S;$$

若$\{S_n\}$发散,则称级数(2)**发散**.特别地,若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$或$-\infty$,则称级数

(2)发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$.

从上述定义可知,级数的收敛与其部分和数列的收敛是一回事,因此关于级数的每一个定理都可以有关于数列的相应的定理,但除了重要定理之外,我们不再写出相应数列的定理,读者可以自己去考虑.

例 1 考虑几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性.

解 (1) 当 $q=1$ 时,部分和 $S_n = na$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$,所以级数发散.

(2) 当 $q \neq 1$ 时,

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

当 $q=-1$ 时,部分和 $S_n = \frac{1}{2}a(1-(-1)^n)$,极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在,所以级数发散;

当 $|q|>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$,因此级数发散;

当 $|q|<1$ 时,极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$,所以级数收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

例 2 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ 的和.

解 考虑级数的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sqrt{1+1}-\sqrt{1}}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{\sqrt{2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$,故得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

例 3 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$ 的和.

解 由反正切函数的加法公式

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}\quad(xy<1),$$

可知

$$\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}=\arctan(n+1)-\arctan n.$$

所以部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\arctan(k+1)-\arctan k)=\arctan(n+1)-\arctan 1.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\arctan(n+1)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}=\dfrac{\pi}{4}$.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛与其部分和数列 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 的收敛是等价的,所以由判别数列$\{S_n\}$收敛的 Cauchy 准则可得下述级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的 Cauchy 收敛准则.

定理 1(Cauchy 收敛准则) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N}:\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right|<\varepsilon.$$

注 由定理 1 可知,对于一个级数,如果略去它的有限项或任意改变它的有限项的值,都不改变这个级数的敛散性.

例 4 证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

证明 对于任意的 $N\in\mathbf{N}$ 和 $\forall n>N$,取 $p=n$,有

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right|\geqslant\left|\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right|=\frac{1}{2},$$

所以由 Cauchy 收敛准则,调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

9.1.2 级数的性质

在这一节里我们将介绍级数的几个重要基本性质.

定理 2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 设级数的和为 S,级数的部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$$

定理 2 表明,若 $\{a_n\}$ 不收敛于 0,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

注 定理 2 的逆并不成立,即如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,我们不能断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛. 例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,由例 4 知调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 是发散的.

例 5 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\ln(n+1)}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)^{\frac{1}{n}}}=+\infty\neq0$,所以级数发散.

定理 3 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为数项级数,α,β 为常数,则

(1) 当 $\alpha\neq0$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$ 同时收敛或发散;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ 也收敛,并且其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

证明 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$ 的部分和分别为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 和 $S_n'=\alpha S_n$,当 $\alpha\neq0$时,由数列 $\{S_n\}$ 和 $\{S_n'\}$ 同敛散可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$ 同敛散.

(2) 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛,设它们的部分和的极限分别为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ 的部分和的极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)=\lim_{n\to\infty}(\alpha S_n+\beta T_n)=\alpha S+\beta T.$$

例 6 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}}$ 收敛,并求其和.

证明 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + 9\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \right),$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$ 都收敛,则由定理 3 知所论级数收敛,并且

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}} &= \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + 9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{9}} + 9\,\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^2}{1-\frac{4}{9}} = \frac{69}{20}. \end{aligned}$$

定理 4　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则对其项任意添加括号后所得的级数仍然收敛,并且其和不变.

证明　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的项任意添加括号后的级数为

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{n_1}) + (a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+\cdots+a_{n_k}) + \cdots.$$

令

$$b_1 = a_1+a_2+\cdots+a_{n_1},\ b_2 = a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_2},\ \cdots,$$
$$b_k = a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+\cdots+a_{n_k},\ \cdots,$$

则这个新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和分别为 S_n 和 T_n,则

$$T_1 = S_{n_1},\quad T_2 = S_{n_2},\quad \cdots,\quad T_k = S_{n_k},\quad \cdots.$$

因此 $\{T_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 的子列,由于 $\{S_n\}$ 收敛,故 $\{T_n\}$ 收敛,且极限相同.

注 1　定理的逆不一定成立,即对一个级数的和式添加了括号后所得的级数收敛,并不能保证原级数收敛. 例如,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1-1+1-1+\cdots$$

是发散的. 但是如果我们每两项添加一个括号,所得的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots+0+\cdots = 0,$$

即添加了括号后所得的级数是收敛的.

注 2　若对级数的项加括号使得括号内的所有项的符号相同,则若这样加括号后所得的级数收敛,原级数必收敛(参见习题 9.1 题 4).

习题 9.1

1. 判断下列级数的敛散性,若收敛试求其和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$,其中 m 为固定的自然数;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{3n^2-2}$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a\neq 0$,证明:$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 又若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$,是否必有 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$?

3. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,若 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,若去掉条件 $a_n>0$,试举例说明结论不成立.

4. 证明:若级数的项加括号后所得的级数收敛,且在同一括号内的项的符号相同,则原级数收敛.

5. 设函数 $f\in C[a,+\infty)$,若无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,证明:$\exists\{x_n\}\subset[a,+\infty)(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty)$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$.

9.2 数列的上、下极限

我们已经知道级数的敛散性可以借助于它的部分和数列的敛散性来判别. 下一节我们将看到,所论及的级数的敛散性只依赖于某些特定数列的上极限和下极限,不必要求该数列极限的存在性. 在本节中我们还通过数列的上极限和下极限得到数列收敛的一个充分必要条件. 由此可知上、下极限是一个非常重要的概念.

9.2.1 上极限与下极限的概念

我们已经知道,单调有界数列必定收敛,所以对于单调数列的敛散性我们只需看它是否有界便可,那么任意给定一个数列 $\{x_n\}$,我们可否通过它构造出相应的单调数列,从而来讨论原数列的敛散性呢?

设 $\{x_n\}$ 为有界数列,记

$$\alpha_n=\inf_{k\geq n}\{x_k\},\quad \beta_n=\sup_{k\geq n}\{x_k\},$$

则数列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 分别是单调递增数列和单调递减数列. 下面我们引入上极限和下极限的概念.

定义　设有数列 $\{x_n\}$.

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 有上界,则记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n}\{x_k\}$;若 $\{x_n\}$ 无上界,则记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=+\infty$. 我们称 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$ 为数列 $\{x_n\}$ 的上极限.

（2）若数列$\{x_n\}$有下界，则记$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$；若$\{x_n\}$无下界，则记$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$. 我们称$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$为数列$\{x_n\}$的下极限.

例 1 求数列$\{2+(-1)^n\}$的上极限和下极限.

解 设$x_n=2+(-1)^n$，则$\alpha_n=\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}=1$，$\beta_n=\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}=3$，所以

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n=3,\quad \varliminf_{n\to\infty} x_n=1.$$

例 2 求数列$\left\{n\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$的上极限和下极限.

解 这个数列为$1,0,-3,0,5,0,-7,\cdots$，这是一个既无上界又无下界的数列，所以

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\sin\frac{n\pi}{2}=+\infty,\quad \varliminf_{n\to\infty} n\sin\frac{n\pi}{2}=-\infty.$$

9.2.2 数列上、下极限的性质

定理 1 设$\{x_n\}$是一个数列，则

（1）$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$；

（2）$\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$；$\varliminf\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$；

（3）若$x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，有$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n}$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n}$.

证明 以下只对$\{x_n\}$，$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$为有界数列时的情形加以说明，其余情形请读者自行考虑. 由确界性质（见上册 1.3.3 节）有

$$\inf_{k\geqslant n}\{x_k\}\leqslant\sup_{k\geqslant n}\{x_k\},\quad \sup_{k\geqslant n}\{-x_k\}=-\inf_{k\geqslant n}\{x_k\},\quad \inf_{k\geqslant n}\{-x_k\}=-\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}.$$

令$n\to\infty$，即得（1）、（2）.

当$x_n>0$时，由

$$\sup_{k\geqslant n}\left\{\frac{1}{x_k}\right\}=\frac{1}{\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}},\quad \inf_{k\geqslant n}\left\{\frac{1}{x_k}\right\}=\frac{1}{\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}},$$

令$n\to\infty$，就得（3）.

定理 2 设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个数列.

（1）若$x_n\leqslant y_n$，则$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$，$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$；

（2）$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\begin{matrix}\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\end{matrix}$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n;$$

(3) 若 $x_n>0, y_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\begin{matrix}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\end{matrix}$$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

我们要求上述各式不出现不定式,即(2)中不出现 $+\infty+(-\infty)$,(3)中不出现 $0\cdot(+\infty)$ 的情况,同时约定

$$+\infty+(+\infty)=+\infty,\quad -\infty+(-\infty)=-\infty,$$
$$a+(+\infty)=+\infty,\quad a+(-\infty)=-\infty.$$

证明 我们只给出当 $\{x_n\},\{y_n\}$ 为有界数列时(2)的证明,其余的证明留给读者.

由习题 1.4 题 2 中函数上、下确界的关系我们有

$$\inf_{k\geqslant n}\{x_k\}+\inf_{k\geqslant n}\{y_k\}\leqslant\inf_{k\geqslant n}\{x_k+y_k\}\leqslant\begin{matrix}\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}+\sup\limits_{k\geqslant n}\{y_k\}\\ \sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}+\inf\limits_{k\geqslant n}\{y_k\}\end{matrix}$$

$$\leqslant\sup_{k\geqslant n}\{x_k+y_k\}\leqslant\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}+\sup_{k\geqslant n}\{y_k\},$$

令 $n\to\infty$,就得(2).

下述定理表明,数列的上极限和下极限分别是收敛的子数列极限中最大和最小的那一个. 若数列的各项互异,则其上极限和下极限分别是点集 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的最大和最小聚点(此处 $+\infty$, $-\infty$ 也看做点).

定理 3 (1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=a$ 的充分必要条件是

1) 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$;

2) 对 $\{x_n\}$ 的任一有极限的子列 $\{x_{n_k'}\}$,有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k'}=a'\leqslant a$.

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=b$ 的充分必要条件是

1) 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=b$;

2) 对 $\{x_n\}$ 的任一有极限的子列 $\{x_{n_k'}\}$,有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k'}=b'\geqslant b$.

证明 (1) 必要性. 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=a$.

① 若 $a=+\infty$,则利用反证法可知 $\{x_n\}$ 无上界,于是存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=+\infty$,且对 $\{x_n\}$ 的任一有极限的子列 $\{x_{n_k'}\}$,当然有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k'}\leqslant+\infty$.

② 若 $a=-\infty$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}=-\infty$,记 $\beta_n=\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$. 因为 $x_n\leqslant\beta_n(n=1,2,\cdots)$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$,从而 1)、2) 成立.

③ 若 a 是有限数，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=a$，存在 $m_1\in\mathbf{N}$，使得 $a-1<\beta_{m_1}<a+1$. 又由 $\beta_{m_1}=\sup\limits_{k\geqslant m_1}\{x_k\}$ 及上确界的定义，对于 $\varepsilon_1=\beta_{m_1}-(a-1)$，存在 $n_1>m_1$，使得 $\beta_{m_1}-\varepsilon_1<x_{n_1}\leqslant\beta_{m_1}$，于是得出

$$a-1<x_{n_1}<a+1;$$

同理，存在 $n_2>n_1$，使得

$$a-\frac{1}{2}<x_{n_2}<a+\frac{1}{2};$$

依此类推，存在 $n_k>n_{k-1}$，使得

$$a-\frac{1}{k}<x_{n_k}<a+\frac{1}{k};\cdots\cdots.$$

这样我们就得到一个子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. 又对于 $\{x_n\}$ 的任一有极限的子列 $\{x_{n_k'}\}$，有 $x_{n_k'}\leqslant\beta_{n_k'}$，而 $\{\beta_{n_k'}\}$ 是 $\{\beta_n\}$ 的子列，因此

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k'}=a'\leqslant\lim_{k\to\infty}\beta_{n_k'}=\lim_{n\to\infty}\beta_n=a.$$

充分性. 设存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

① 若 $a=+\infty$，则数列 $\{x_n\}$ 无上界，因此

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n=+\infty.$$

② 若 $-\infty\leqslant a<+\infty$，则由 $x_{n_k}\leqslant\beta_{n_k}$，我们有

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{k\to\infty}\beta_{n_k}\geqslant\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a.$$

用反证法，假设 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=c>a$，由必要性的证明可知，存在子列 $\{x_{n_k'}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k'}=c>a$，这与条件 2) 矛盾. 所以 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 只需令 $x_n=-y_n$，且注意到 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$，利用(1)的结论便可证得.

定理 4 数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充分必要条件是 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由定理 3，存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n_k'}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k'}=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$. 而由数列极限为 a 的充分必要条件是它的任意子列的极限存在且都为 a，因此 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

充分性. 用反证法，假设 $\{x_n\}$ 的极限不存在，则存在 $\{x_n\}$ 的两个极限不相等的子列，不妨设为 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n_k'}\}$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}<\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k'}$. 由定理 3，有

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim_{k\to\infty}x_{n_k}<\lim_{k\to\infty}x_{n_k'}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n.$$

这与充分性条件矛盾.

注 1 因为 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$，所以定理 4 也可表述为：数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充