TANXING
JIEGOU
DE
ZIKONGZHI
YU
YOUHUA

谢能刚　孙林松　包家汉　著

弹性结构的自控制与优化

合肥工业大学出版社

弹性结构的自控制与优化

谢能刚　孙林松　包家汉　著

安徽建筑大学
藏书
图书馆

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

弹性结构的自控制与优化/谢能刚,孙林松,包家汉著.
—合肥:合肥工业大学出版社,2007.5

ISBN 978-7-81093-581-4

Ⅰ.弹…　Ⅱ.①谢…　②孙…　③包…　Ⅲ.弹性—结构—研究　Ⅳ.0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 065276 号

弹性结构的自控制与优化

谢能刚　孙林松　包家汉　著　　　责任编辑　章　建　朱移山

出　版	合肥工业大学出版社	**版　次**	2007 年 5 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	**印　次**	2007 年 5 月第 1 次印刷
邮　编	230009	**开　本**	710×1000　1/16
电　话	总编室:0551-2903038	**印　张**	15.25
	发行部:0551-2903198	**字　数**	273 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	**印　刷**	合肥现代印务有限公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn	**发　行**	全国新华书店

ISBN 978-7-81093-581-4　　　定价:25.00 元

如果有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换。

前　言

分析工程实际问题的一般技术路径是首先对该问题进行一定的概化假定，得到力学模型，其次采用数学语言（即数理方程）对其作用机理进行描述，得到该问题的数学模型，最后采用适当的计算模式对数学模型进行求解。

一个抽象的数学力学模型主要由两个要元组成：1）基本控制方程；2）定解条件：a. 作用区域；b. 材料参数；c. 作用载荷；d. 边界条件；e. 初始条件。

由于作用区域（结构形式）和材料参数对方程的解存在影响，因此在弹性结构所有允许形式中确定最佳形式、在材料参数的取值范围内确定最佳值，使结构的某种性能指标达到极值（一般为极小值），就构成了弹性结构的形式自控制和材料自控制问题。根据对性能指标及目标集的不同选取，将形成丰富多样的自控制问题。

对于分布参数系统的自控制问题，由于形式的拓扑可变性和系统的连续性，可进行理论求解的不多。有效的求解方法是将分布参数系统离散为集中参数系统，将自控制模型转化为优化模型进行求解。

一、弹性结构问题的分类

在弹性结构的问题分析中，有下面几种分类：

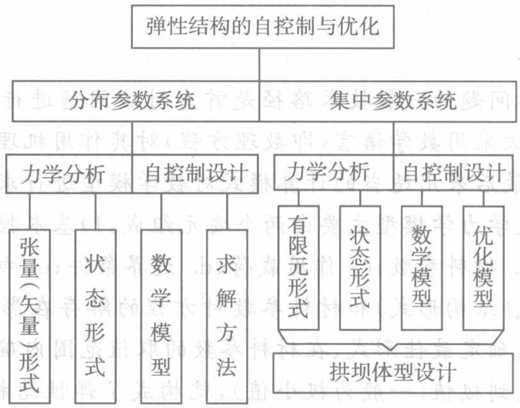
1. 根据弹性体的连续和离散，结构系统可分为：
   a. 分布参数系统；b. 集中参数系统。
2. 根据结构所受外力类型，弹性结构的力学问题可分为：
   a. 弹性静力学问题；b. 弹性动力学问题。
3. 根据弹性力学问题的分析求解体系，力学模型（数理方程）的描述形式可分为：
   a. 张量（矢量）形式（拉格朗日体系）；
   b. 状态形式（哈密顿体系）。
4. 根据分析研究的方向性，结构问题可分为：
   a. 结构的力学分析（正问题）；b. 结构的控制设计（反问题）。

5. 根据控制的来源，结构控制问题可分为：

a. 自控制问题(控制来源于结构的自身特性)；

b. 外控制问题(控制来源于结构的外部环境)。

二、本书的技术体系



全书共分8章：第一章从能量变分原理出发，阐述了分布参数系统的弹性静、动力学定解问题，给出了张量表达形式、矢量表达形式以及动力问题的状态表达形式；第二章建立了分布参数系统的弹性自控制问题的数学模型；第三章采用有限单元法将分布参数系统离散为集中参数系统，并进行了动力求解分析；第四章对集中参数系统的自控制模型与优化求解方法进行了研究；第五章探讨了被动悬架材料参数的多目标优化；第六章采用能量法，分析了能量函数在集中参数系统动力分析中的应用；第七章对拱坝体型进行了静力自控制和优化设计；第八章对拱坝体型进行了动力自控制和优化设计。另外在附录中还给出了基于FORTRAN语言的8自由度汽车悬架系统多目标模糊优化计算程序和小湾拱坝优化体型的多拱梁法计算结果。

作者希望本书的出版能将传统控制问题的内涵有所拓展，引起对结构自控制问题的思考，进一步明晰优化方法与控制方法之间的区别和联系。同时，由于作者的知识所限，书中难免有疏漏错误之处，欢迎读者批评指正。

作 者

2007年3月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　分布参数系统弹性力学问题的分析

弹性结构是工程中经常遇到的力学系统，若将其看作是由无数个质点借弹性体系组成的连续系统，则由于其中每个质点都具有独立的自由度，结构的空间位置需要用无数个点的独立空间坐标来确定，因此它具有无限多个自由度，属于分布参数系统。

假设所研究的弹性系统为：均匀连续；各向同性；满足虎克定律。另外，我们的讨论仅限于小变形问题。

§1-1　分布参数系统的弹性静力学分析

在本书中，我们将广泛采用卡氏张量符号，其中 $x_i(i=1,2,3)$ 表示三个卡氏坐标，应力、应变分量写为 σ_{ij} 和 $\varepsilon_{ij}(i,j=1,2,3)$。相应的系统位移函数的三个分量为 $u_i(x_1,x_2,x_3)$；体力密度的三个分量为 $f_i(x_1,x_2,x_3)$；面力的三个分量为 $\bar{p}_i(x_1,x_2,x_3)$；系统的质量密度分布函数为 $\rho(x_1,x_2,x_3)$；弹性参数（弹性模量 E 和泊松比 v）分布函数为 $[E(x_1,x_2,x_3)\quad v(x_1,x_2,x_3)]$。并且采用求和约定，凡在同一项中指标符号出现两次时，则对此下标从 1 到 3 求和。

将某一弹性连续系统抽象为边界 Γ 围成的区域 Ω，设 Ω 为三维空间 R^3 中的一个有界区域，边界 Γ 是分片光滑曲面。该系统受外力作用在小位移下达到静力平衡，在边界 Γ 的一部分 Γ_σ 上作用已知面力 $\bar{p}_i$，在边界 Γ 的另一部分 Γ_u 上位移条件已知，所受体力的密度为 f_i。

对于小位移问题，弹性系统中应变与位移的关系为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\qquad(i,j=1,2,3)\tag{1-1}$$

对于各向同性的弹性系统，应力应变关系为

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}\qquad(i,j=1,2,3)\tag{1-2}$$

式中：λ 和 μ 称为拉梅常数，它们与弹性模量 E、泊松比 v 的关系为

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)};\quad \mu = \frac{E}{2(1+v)} \tag{1-3}$$

δ_{ij} 为克氏符号，它的定义是

$$\begin{cases}\delta_{ij} = 1 & i = j \\ \delta_{ij} = 0 & i \neq j\end{cases} \tag{1-4}$$

下面利用最小位能原理建立分布参数系统的静力学平衡方程。

一、最小位能原理

最小位能原理表述为：在所有满足给定边界条件和小位移问题应变与位移关系条件的位移和应变中，只有满足平衡条件的位移和应变使系统的总位能取极小值，即总位能泛函 Π 的变分为零，其数学表达式为

$$\delta\Pi = 0 \tag{1-5}$$

其中：$\Pi = U - W$；U 为系统的应变能；W 为外力位能。

1. 系统的应变能

系统的应变能为

$$U = \int_{\Omega} A(\varepsilon_{ij})\,\mathrm{d}\Omega \tag{1-6}$$

其中：$A(\varepsilon_{ij})$ 为微元 $\mathrm{d}\Omega$ 内由于变形而储存的应变能密度。

$$A(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1-7}$$

将式(1－2)代入式(1－7)，得

$$A(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}[\lambda\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}] \tag{1-8}$$

2. 外力位能

作用在系统上的外力主要有体力和面力，外力位能为

$$W = \int_{\Omega} f_i u_i\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i u_i\,\mathrm{d}\Gamma \tag{1-9}$$

3. 总位能泛函

综合式(1－6)和式(1－9)，总位能泛函为

$$\Pi = \int_{\Omega} [A(\varepsilon_{ij}) - f_i u_i] \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i u_i \mathrm{d}\Gamma \tag{1-10}$$

二、分布参数系统弹性静力学平衡方程的张量形式

式(1－10)中总位能泛函的变分为

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} [\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} - f_i \delta u_i] \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma \tag{1-11}$$

由式(1－1)小位移问题的应变与位移关系，有

$$\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \tag{1-12}$$

由于应力、应变中下标 i,j 的互换性

因此
$$\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ji}} \tag{1-13}$$

则
$$\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta(\varepsilon_{ij}) = \frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta u_{i,j} \tag{1-14}$$

通过分部积分得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left[\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta(\varepsilon_{ij}) \right] \mathrm{d}\Omega &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta(u_{i,j}) \right] \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta u_i \right)_{,j} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{,j} \delta u_i \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{1-15}$$

用格林定理可以证明

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta u_i \right)_{,j} \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta u_i n_j \mathrm{d}\Gamma \tag{1-16}$$

式中：n_j 为边界 Γ 上外法线的单位矢量。

在位移边界 Γ_u 上位移确定，位移的变分为零，因此

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta u_i n_j \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma} \frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j \delta u_i \mathrm{d}\Gamma \tag{1-17}$$

根据式(1－15)、式(1－16)和式(1－17)，式(1－11)可简化为

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} [-(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}})_{,j} - f_i] \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} [\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j - \bar{p}_i] \delta u_i \mathrm{d}\Gamma \quad (1-18)$$

根据最小位能原理即式(1-5)，得欧拉方程和边界条件

$$\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j} + f_i = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (1-19)$$

$$\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j - \bar{p}_i = 0 \quad (\text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上}) \quad (1-20)$$

由式(1-1)和式(1-8)得

$$\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j} = (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} \quad (1-21)$$

将式(1-21)代入式(1-19)，分布参数系统的静力学平衡方程为

$$(\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + f_i = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (1-22)$$

上式即为基于位移的张量形式的弹性静力学平衡方程。

应力边界条件(1-20)也可改写为用位移表示

$$\lambda u_{j,j} n_i + \mu (u_{i,j} n_j + u_{j,i} n_j) - \bar{p}_i = 0 \quad (\text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上}) \quad (1-23)$$

三、静力学平衡方程的矢量形式

矢量形式的结构位移和外力密度表示为

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$$
$$\vec{f} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}$$

采用算子符号：

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{k} \quad (\text{梯度算子})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (\text{拉普拉斯算子})$$

则存在等式

$$\begin{cases} u_{i,jj} = (\nabla^2 \vec{u})_i \\ u_{j,ij} = (\vec{\nabla}\, \vec{\nabla} \cdot \vec{u})_i \end{cases} \quad (1-24)$$

将式(1－22)张量形式的弹性静力学平衡方程改写为矢量形式

$$\mu\,\nabla^2\vec{u}+(\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+\vec{f}=0 \tag{1-25}$$

四、索密格连纳势

定理1：对于任何足够平滑的矢量场 $\vec{u}(X)$，都可以表示成下面的形式

$$\vec{u}(X)=2(1-v)\,\nabla^2\vec{G}(X)-\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{G}(X)$$

其中矢量函数 $\vec{G}(X)$ 称为矢量场 $\vec{u}(X)$ 的索密格连纳势。

将弹性结构的位移矢量用索密格连纳势表示，则式(1－25)为

$$2\mu(1-v)\,\nabla^2\,\nabla^2\vec{G}+\vec{f}=0 \tag{1-25-a}$$

§1－2　分布参数系统弹性静力学定解问题

一、弹性静力学问题的边界条件

弹性系统的边界 Γ 上存在边界值未给定的自然边界和边界值给定的固定边界，对于固定边界，又可分为应力给定边界 Γ_σ 和位移给定边界 Γ_u 两类，通常有三种提法。

1. 边界上(在 Γ_u 上)的位移 $\bar{u}_i$ 给定：

$$\begin{cases}\text{张量形式：}\ u_i=\bar{u}_i\\ \text{矢量形式：}\ \vec{u}=\bar{\vec{u}}\end{cases} \tag{1-26}$$

2. 边界上(在 Γ_u 上)位移的法向微商 $\bar{v}_i$ 给定：

$$\begin{cases}\text{张量形式：}\ \dfrac{\partial u_i}{\partial n}=u_{i,j}n_j=\bar{v}_i\\ \text{矢量形式：}\ \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial n}=\bar{\vec{v}}\end{cases} \tag{1-27}$$

3. 边界上(在 Γ_σ 上)面力 $\bar{p}_i$ 给定：

$$\begin{cases}\text{张量形式：}\ \lambda u_{j,j}n_i+\mu(u_{i,j}n_j+u_{j,i}n_j)-\bar{p}_i=0\\ \text{矢量形式：}\ \lambda\vec{n}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+2\mu\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial n}+\mu\vec{n}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})-\bar{\vec{p}}=0\end{cases} \tag{1-28}$$

二、分布参数系统的弹性静力学定解问题

分布参数系统的弹性静力学定解问题描述为：当 a. 系统区域 Ω（从而其边界 Γ）确定；b. 系统弹性参数 (E,v) 的分布函数确定；c. 系统体力密度 f 的分布确定；d. 系统边界条件确定时；根据平衡方程求解分布参数系统的位移响应 $u_i(x_1,x_2,x_3)$。

上述定解问题相应的数学模型如下；建立流程如图 1-1。

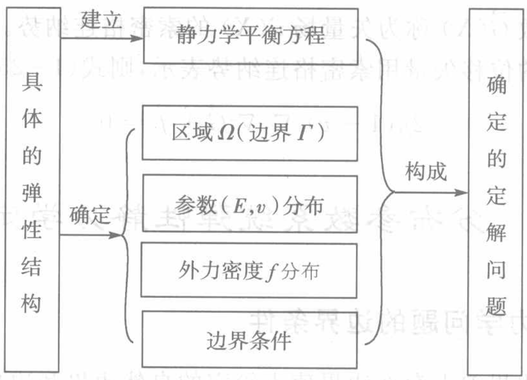


图 1-1

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{静力学平衡方程：}(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\mu u_{i,jj}+f_i=0 \quad (\text{在 }\Omega\text{ 内}) \\
\text{或 }\mu\nabla^2\vec{u}+(\lambda+\mu)\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+\vec{f}=0 \quad (\text{在 }\Omega\text{ 内}) \\
\text{或}\left\{
\begin{array}{l}
\vec{u}=2(1-v)\nabla^2\vec{G}-\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{G} \\
2\mu(1-v)\nabla^2\nabla^2\vec{G}+\vec{f}=0 \quad (\text{在 }\Omega\text{ 内})
\end{array}
\right. \\
\text{边界条件：}u_i=\bar{u};\ u_{i,j}n_j=\bar{v}_i \quad (\text{在 }\Gamma_u\text{ 上}) \\
\lambda u_{j,j}n_i+\mu(u_{i,j}n_j+u_{j,i}n_j)-\bar{p}_i=0 \quad (\text{在 }\Gamma_\sigma\text{ 上}) \\
\text{或 }\vec{u}=\bar{\vec{u}};\ \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial n}=\bar{\vec{v}} \quad (\text{在 }\Gamma_u\text{ 上}) \\
\lambda\vec{n}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+2\mu\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial n}+\mu\vec{n}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})-\bar{\vec{p}}=0 \quad (\text{在 }\Gamma_\sigma\text{ 上})
\end{array}
\right.
\tag{1-29}
$$

§1－3　分布参数系统的弹性动力学分析

一、哈密顿原理

哈密顿原理表述为：系统在给定初始和终了运动状态之间的真实运动和运动学上许可的运动的区别在于，对真实运动而言，泛函（$H=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t$）的变分为零，其数学表达式为

$$\delta\left(\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t\right)=0 \tag{1-30}$$

其中：$L=T-U+W$；T 为系统的动能；U 为系统的应变能；W 为非保守力对系统所做的功。

二、分布参数系统的弹性动力学平衡方程

将哈密顿原理应用到弹性系统的动力学问题上，且位移和应变满足给定边界条件和小位移问题时应变与位移关系条件。

1．系统的动能

$$T=\int_{\Omega}\mathrm{d}T=\int_{\Omega}\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i\mathrm{d}\Omega \tag{1-31}$$

2．系统的应变能

$$U=\int_{\Omega}A(\varepsilon_{ij})\mathrm{d}\Omega \tag{1-32}$$

3．非保守力对系统所做的功

作用在系统上的非保守力主要有体力 f、面力 $\bar{p}$ 和阻尼力 f_c，非保守力对系统所做的功为

$$W=\int_{\Omega}[f_iu_i-f_{ci}u_i]\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}\bar{p}_iu_i\mathrm{d}\Gamma \tag{1-33}$$

4．动力学平衡方程

综合式（1－31）、式（1－32）和式（1－33）得

$$H = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i - A(\varepsilon_{ij}) + f_i u_i - f_{ci}u_i\right]\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\sigma}\bar{p}_i u_i \mathrm{d}\Gamma\right\}\mathrm{d}t \quad (1-34)$$

将上式变分得

$$\delta H = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_{\Omega}\left[-\rho\ddot{u}_i + \left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j} + f_i - f_{ci}\right]\delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\sigma}\left[\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}n_j - \bar{p}_i\right]\delta u_i \mathrm{d}\Gamma\right\}\mathrm{d}t \quad (1-35)$$

根据哈密顿原理即式(1－30)，得欧拉方程和边界条件

$$\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j} + f_i - f_{ci} - \rho\ddot{u}_i = 0 \quad (在\ \Omega\ 内) \quad (1-36)$$

$$\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}n_j - \bar{p}_i = 0 \quad (在\ \Gamma_\sigma\ 上) \quad (1-37)$$

将式(1－21)代入式(1－36)，系统张量形式的动力学平衡方程为

$$(\lambda+\mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + f_i - f_{ci} - \rho\ddot{u}_i = 0 \quad (在\ \Omega\ 内) \quad (1-38)$$

上式即为弹性动力学理论中著名的纳维方程。

一般认为阻尼力与速度的一次方成正比且方向相反，因此令阻尼力密度为

$$f_{ci} = -c\dot{u}_i \qquad (i=1,2,3) \quad (1-39)$$

式中：$c(x_1, x_2, x_3)$ 为反映阻尼力分布的阻尼系数。

应力边界条件(1－37)也可改写为用位移表示

$$\lambda u_{j,j}n_i + \mu(u_{i,j}n_j + u_{j,i}n_j) - \bar{p}_i = 0 \quad (在\ \Gamma_\sigma\ 上) \quad (1-40)$$

三、弹性动力学平衡方程的矢量形式和状态形式

1. 动力学平衡方程的矢量形式

根据式(1－24)和式(1－39)，将式(1－38)改写为矢量形式

$$2\mu\,\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \vec{f} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + c\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \quad (1-41)$$

利用恒等式 $\qquad \nabla^2\vec{u} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u} \qquad (1-42)$

将式(1－42)代入式(1－41)得

$$(\lambda+2\mu)\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}-\mu\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u}+\vec{f}=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}+c\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\tag{1-43}$$

2. 动力学平衡方程的波动方程形式

定理 2：对于任何一个足够光滑的矢量场 $\vec{r}(X,t)$ 都可以分解成无旋的和管状的部分，即可以表达成

$$\vec{r}(X,t)=\vec{\nabla}\,r(X,t)+\vec{\nabla}\times\vec{R}\,(X,t)\tag{1-44}$$

其中第一项没有旋度，第二项没有散度；这就是斯托克斯 —— 亥姆霍兹分解定理。

根据定理 2，将系统的体力密度矢量场 $\vec{f}(X,t)(X\in\Omega)$ 分解为

$$\vec{f}(X,t)=\vec{\nabla}\,f(X,t)+\vec{\nabla}\times\vec{f}(X,t)\tag{1-45}$$

其中：

$$f(X,t)=-\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\left(\frac{1}{|X-X_0|}\vec{\nabla}_0\cdot\vec{f}(X_0,t)\right)\mathrm{d}\Omega(X_0)$$

$$\vec{F}(X,t)=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\left(\frac{1}{|X-X_0|}\vec{\nabla}_0\times\vec{f}(X_0,t)\right)\mathrm{d}\Omega(X_0)\tag{1-46}$$

$\vec{\nabla}_0$ 定义为在 X_0 处的梯度算子。

将定理 2 应用到系统位移矢量场中，可得到

$$\vec{u}(X,t)=\vec{\nabla}\,\Phi(X,t)+\vec{\nabla}\times\vec{\Psi}(X,t)\tag{1-47}$$

其中：标量函数 $\Phi(X,t)$ 和矢量函数 $\vec{\Psi}(X,t)$ 称为位移场的拉梅势；它们与位移矢量存在以下关系：

$$\nabla^2\Phi(X,t)=\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(X,t);\;-\nabla^2\vec{\Psi}(X,t)=\vec{\nabla}\times\vec{u}(X,t)\tag{1-48}$$

我们不难验证，体积应变 $\varepsilon_V=\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ 和转动 $\vec{w}=\vec{\nabla}\times\vec{u}$ 是系统位移场的一对拉梅势。

将式(1-45)、式(1-47) 代入式(1-43)，得

$$\vec{\nabla}\left(a_1\,\nabla^2\Phi+f-\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-c\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\vec{\nabla}\times\left(a_2\,\nabla^2\vec{\Psi}+\vec{F}-\rho\frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial t^2}-c\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial t}\right)=0\tag{1-49}$$

式中：$a_1=\lambda+2\mu$；$a_2=\mu$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com