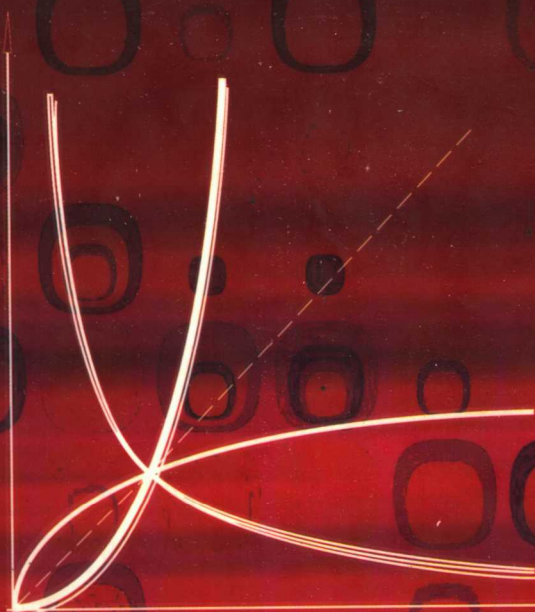


微积分 基本教程

丁正中 等 编著

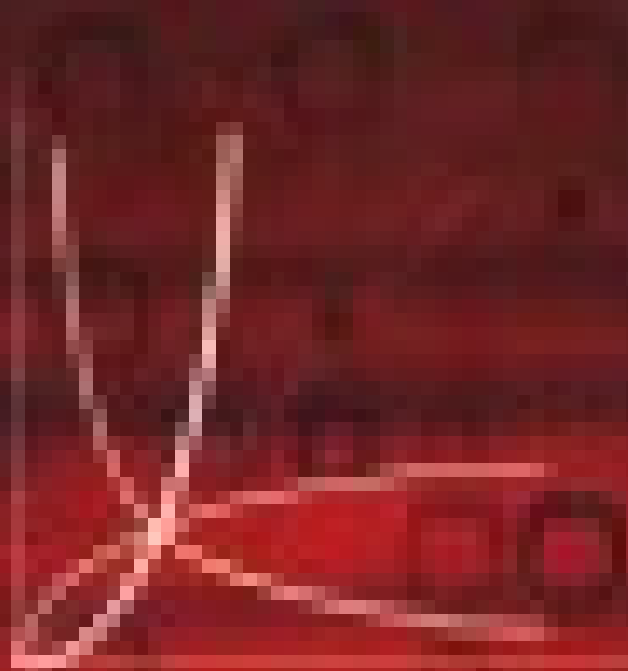
[上]



中国物资出版社

微积分 基本教程

[上]



科学出版社

微积分基本教程

上 册

丁正中 朱 灵 翁嫫娣

王海敏 李剑秋 华就昆

编 著

中国物资出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分基本教程/丁正中等编著. - 北京:中国物资出版社,2002.8
ISBN 7-5047-1884-X

I.微... II.丁... III.微积分-教材 IV.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 049525 号

责任编辑:沈兴龙 责任校对 顾 勇

封面印制:沈兴龙 责任设计 金 辉

中国物资出版社出版发行

网址:<http://www.clph.com.cn>

社址:北京市西城区月坛北街 25 号

电话:(010)68392746 邮编:100834

全国新华书店经销

保定市印刷厂印刷

开本:787×1092mm 1/16 印张:27.375 字数:700 千字

2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-5047-1884-X/G.0434

印数:5800 册

定价:43.00 元(上下册)

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前言

我国现代化建设的迅速发展,需要造就一大批掌握现代经济理论与现代管理知识的专门人材。在现代经济学与现代管理科学中,由于日益强调定量分析,因此大量引进了近代数学的概念、理论及其方法。几乎在每一本现代经济理论的书籍中,都可找出一大堆近代数学的符号与公式。可以说,不懂得近代数学,特别是经济应用数学,在现代经济领域里将寸步难行。

大学中的经济应用数学通常包括应用数理统计、运筹学和计量经济学等基本课程,而作为这些课程的基础是以微积分为主体的高等数学知识。由于高等数学具有高度的抽象性与严密的逻辑性等特点,故对于刚入学的文科本科学生来说,历来是一门较难学好的课程。这个问题还反映在至今还没有一本公认的比较有特色的适合于经济管理类本科学生使用的经济数学基础教科书。多年来的教学实践,使我们深切地体会到这方面的迫切要求。为此,我们试编了这本教材,以期起到抛砖引玉的作用。

在编写这本教材时,我们在以下几个方面作了一些尝试:

(1)注意对基本概念作深入浅出的描述。在基本概念的引入时,例如在介绍极限、导数、弹性、微分等概念时,我们对它们的背景问题以及这些概念的实质都作了详尽的阐述,以希望学生不仅知道这些概念的抽象数学定义,并且还能透过这些字眼知道为什么要这样下定义,从而能够学到一点如何对实际问题进行数学定量化刻划的思想与方法。

(2)增大理论在实际中应用的部分的篇幅。考虑到文科本科学生的特点以及高等数学在经济管理类系科中的应用作用,我们对数学理论部分的内容作了较大限度的压缩,一些并非必要的理论证明和应用意义不大的内容,都被作了删略,以便有较多的篇幅来叙述应用方面的知识。例如,我们加强了对函数最大、最小值问题的讨论,增加了导数以及与之相关的“边际”、“弹性”等概念在经济学上应用的例子等。

(3)对于普通教科书上一些常见的概念性错误及易混淆之处,例如复合函数、反函数、反正弦函数等,作了必要的澄清与纠正。

(4)注意与中学知识的衔接。例如,近年来中学数学教学中对于文科学生均删去了有关三角函数的知识,我们特地作了专节介绍,以使前后知识不脱节。

(5)重视练习题的配备。一套精心编写的练习题往往可以使一本教材增色不少。数学的特点决定了学生必须通过演算一定量难易适当的习题,才能真正领会概念,掌握定理及公式,故我们在习题编写方面作了一些努力。同时我们也适当配备了一些涉及前后知识点的综合题和近年来的考研试题,以期达到前后章节知识能被贯串运用的目的和使越来越多希望考研的本科生在一、二年级就打好一个扎实的基础。这一设想,对于学有余力的学生,似尤为必要。除此之外,我们在每一章后面还编写了复习题。这些复习题分为:客观性习题、基本计算题、应用题及少量证明题四大部分。每章后的这部分题目主要是供学生学完该章后进行系统复习或准备阶段测验和期末考试之用的。

本教材是针对每周学时为4学时,共33~34教学周数的本科教学需要而编写的。为了便于教师的教学以及学生的自学,我们尽量按两个学时的讲授内容作为一节进行章节

划分。全书一共分八章(上下册),第一章和第二章由丁正中教授编写,第三章由华就昆副教授编写,第四章由翁嫫娣讲师编写,第五章和第六章由王海敏副教授编写,第七章和第八章由朱灵副教授编写,第九章和第十章由李剑秋讲师编写,最后由丁正中教授总纂各章。在编写过程中,我们主要参考了杭州商学院 1988 年至 1994 年内部所用的两版《经济应用数学基础》教材和 1998 年中国商业出版社出版的《文科微积分》教材。由于有那些教材的基础,我们得以在较短的时间里完成此书的重新编写。上面这些教材编写时,还有王淑茜副教授、王爱娟副教授、谈善宝副教授和朱晓航讲师的辛勤劳动。

由于编者的水平有限,错误不妥之处在所难免,恳切希望广大读者批评指正。

杭州商学院统计与计算科学学院

经济数学系列教材编写组

2002 年 7 月

目录(上册)

第一章 函数	(1)
第一节 变量	(1)
第二节 函数概念	(5)
第三节 函数的特性	(15)
第四节 反函数与反三角函数	(20)
第五节 复合函数与初等函数	(28)
复习题一	(37)
第二章 极限与连续	(41)
第一节 数列的极限	(41)
第二节 函数的极限	(47)
第三节 极限的四则运算法则及极限函数的基本性质	(55)
第四节 单侧极限与无穷大	(51)
第五节 两个重要极限	(66)
第六节 无穷小及无穷小比较	(75)
第七节 函数的连续与间断	(83)
第八节 连续函数的运算法则与初等函数的连续性	(92)
第九节 函数连续性的应用	(96)
复习题二	(103)
第三章 导数	(109)
第一节 导数概念	(109)
第二节 基本初等函数的导数及导数的四则运算法则	(115)
第三节 复合函数求导法则	(121)
第四节 隐函数求导法	(125)
第五节 高阶导数	(128)
第六节 微分的概念及应用	(131)
第七节 函数变化率在经济分析中的应用	(137)
复习题三	(143)
第四章 中值定理与导数的应用	(148)
第一节 中值定理	(148)
第二节 洛必达法则	(155)
第三节 函数单调性和曲线凹向的判定	(162)
第四节 函数的极值与最值问题的应用	(168)
第五节 函数图像的描绘	(181)
复习题四	(189)
第五章 不定积分	(194)

第一节 不定积分的概念	(194)
第二节 不定积分的运算法则	(198)
第三节 换元积分法	(202)
第四节 分部积分法	(220)
第五节 综合举例	(226)
复习题五	(235)
复习题参考答案(上册)	(240)

第一章 函 数

第一节 变 量

一、变量概念

我们在观察各种经济现象或研究实际问题的时候,会遇到许多的量.这些量在我们考察过程中常常会不断变化,例如某种商品的市场需求量,某种股票的股市价格,等等.这种量,我们称之为变量.

在数学上,我们总是抽去变量的具体含义来研究它们在某一过程中的数值变化情况,并且常常用小写字母 $x, y, z, \dots$ 简练地称呼各种所要研究的变量.需要注意的是,为了数学研究的方便,上述变量的概念应广义的理解.这里提到变量的所谓变化,并不排斥变量在某一过程中始终保持一个数值的情况.这就是说,可以有一种“特殊”的变量,它在某一个阶段(甚至整个过程)中所取的数值并不起变化.例如,市场经济下某种商品的价格是一个变量,但在某个时期内这个价格恒定不变.

确定一个变量的要素在于确定它的变化范围,也就是指出该变量的取值范围.本书研究的变量的变化范围均为实数集合中的某一个子集.变量的变化范围通常是用大写字母 $X, Y, D, Z, \dots$, 来表示之.

变量的取值可以是离散型的.例如,某个给定变量 x 的所有取值为 $1, 2, 3, \dots, 6, 7$. 又如,某个给定变量 y 的所有取值为 $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ (n 为自然数). 根据前面的规定,这两个例子分别可以叙述为:“给定(离散型)变量 $x \in X = \{1, 2, 3, \dots, 6, 7\}$ ”和“给定(离散型)变量 $y \in Y = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ (n 为自然数)”.

变量的取值也可以是连续型的.例如,给定变量 x 的取值为满足不等式 $0 \leq x \leq 1$ 的一切实数 x , 或者说:“给定(连续型)变量 $x \in X = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ ”.

二、区间与邻域

连续型变量是本教材的主要研究对象.通常,它的变化范围可表示为一个或几个所谓的区间.本教材中采用的各类区间的名称、意义及记号介绍如下.

设 a, b 为两个实常数,且 $a < b$.

(一)闭区间 $[a, b]$

我们把满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 的全体,叫做闭区间,记为 $[a, b]$. 换言之,

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

(二)开区间 (a, b)

我们把满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 的全体,叫做开区间,记为 (a, b) . 换言之,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

(三) 半开区间(也称“半闭区间”)[a, b)或(a, b]

它们的意义是:

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

以上各种情况中,均称 a, b 为区间的端点,而 $b - a$ 叫做区间的长度.在无需辨明端点是否在内时,以上各种情况可以统一简称为区间.它们的图示,如图 1-1:

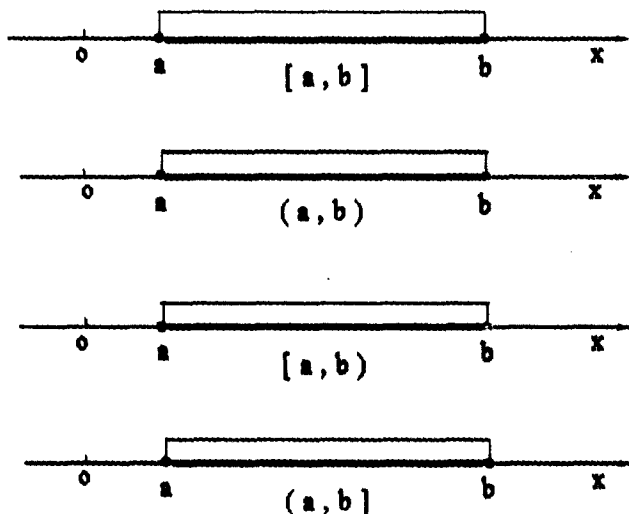


图 1-1

(四) 无穷型区间

我们把满足不等式“ $x \geq a$ ”的一切实数的全体,叫做(半)无穷区间,记为 $[a, +\infty)$.也就是

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\}.$$

类似地还有(半)无穷区间 $(a, +\infty)$ 、 $(-\infty, b]$ 和 $(-\infty, b)$,它们分别规定如下:

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}.$$

另个还有无穷区间 $(-\infty, +\infty)$,它的意义是全体实数集合.它们的图示,如图 1-2 所示.

(五) 邻域

设 a 为实常数, δ 为正常数,我们把满足不等式“ $|x - a| < \delta$ ”的一切实数的全体,叫做以 a 为中心,以 δ 为半径的邻域,或简称为 a 的 δ 邻域,记为:

$$(a - \delta, a + \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

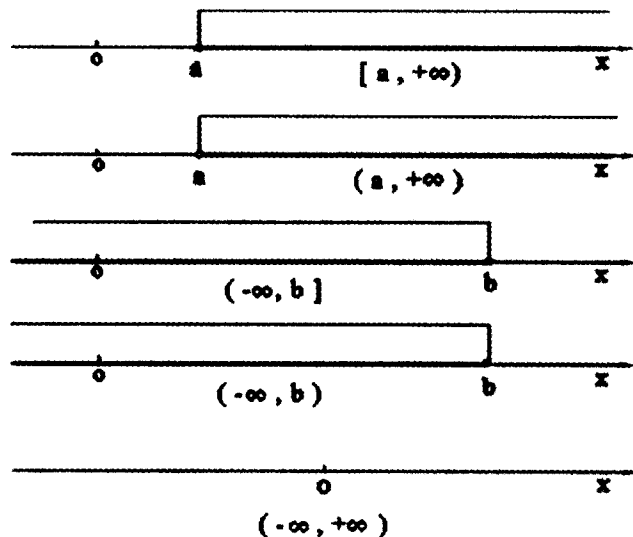


图 1-2

类似地,把满足不等式“ $0 < |x - a| < \delta$ ”的一切实数的全体,叫做以 a 为中心,以 δ 为半径的去心邻域,或简称为 a 的 δ 去心邻域,记为:

$$(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

把满足不等式“ $-\delta < x - a < 0$ ”的一切实数的全体,叫做以 a 为中心,以 δ 为半径的左邻域,或简称为 a 的 δ 左邻域,记为:

$$(a - \delta, a) = \{x \mid -\delta < x - a < 0\}.$$

同时,把满足不等式“ $0 < x - a < \delta$ ”的一切实数的全体,叫做以 a 为中心,以 δ 为半径的右邻域,或简称为 a 的 δ 右邻域,记为: $(a, a + \delta) = \{x \mid 0 < x - a < \delta\}.$

各种邻域的图示,如图 1-3 所示:

显然,“ a 的 δ 邻域”是一个开区间,其长度为 2δ .“ a 的 δ 去心邻域”是两个开区间的并集,每个开区间的长度均为 δ .这两个开区间,分别就是“ a 的 δ 右邻域”和“ a 的 δ 左邻域”.

【例 1】某地某天,最高温度为 30°C ,最低温度为 20°C .这样,这天的气温 t 是一个变量,它的变化范围是 $20 \leq t \leq 30$.也就是变量 $t \in [20, 30]$.

【例 2】用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x| \leq 1$

(2) $|x + 1| \leq 1$

(3) $|x - a| < \epsilon$ (a, ϵ 为常数, $\epsilon > 0$)

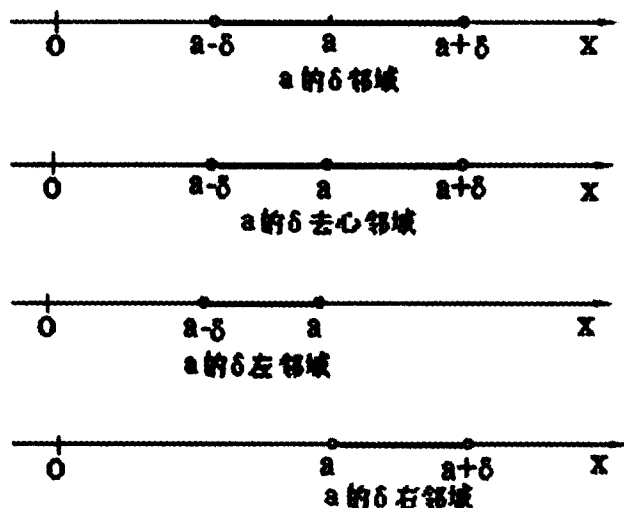


图 1-3

$$(4) \quad |x| > b \quad (b > 0 \text{ 为常数})$$

$$(5) \quad |x+2| > 3$$

$$(6) \quad x^2 < 9$$

解 (1) 由 $|x| \leq 1$, 利用绝对值知识, 可得

$$-1 \leq x \leq 1,$$

于是 $\{x \mid |x| \leq 1\} = [-1, 1]$.

$$(2) \quad \text{由 } |x+1| \leq 1, \text{ 可得 } -1 \leq x+1 \leq 1$$

或 $-2 \leq x \leq 0$, 于是

$$\{x \mid |x+1| \leq 1\} = [-2, 0].$$

$$(3) \quad \text{由 } |x-a| < \varepsilon, \text{ 可得 } -\varepsilon < x-a < \varepsilon$$

或 $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$, 于是

$$\{x \mid |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

所求集合即为“以 a 为中心, 以 ε 为半径的邻域(a 的 ε 邻域)”.

$$(4) \quad \text{由 } |x| > b \text{ 可得 } x > b \text{ 或 } x < -b.$$

因此

$$\{x \mid |x| > b\} = (-\infty, -b) \cup (b, +\infty).$$

$$(5) \quad \text{由 } |x+2| > 3, \text{ 可得 } x+2 > 3 \text{ 或 } x+2 < -3. \text{ 即 } x > 1$$

或 $x < -5$.

因此

$$\{x \mid |x+2| > 3\} = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty).$$

$$(6) \quad \text{由 } x^2 < 9, \text{ 可得 } |x| < 3, \text{ 故有}$$

$$\{x \mid x^2 < 9\} = (-3, 3).$$

习 题 1.1

1. 用区间表示满足下面不等式的变量的变化范围:

(1) $-2 < x \leq 4$; (2) $y \leq 0$;

(3) $z^2 \leq 16$; (4) $|x - 2| < 3$;

(5) $|3y - 2| \geq 1$; (6) $|x - x_0| < \delta$ ($\delta > 0$ 及 x_0 均为常数).

2. 用区间表示下面的邻域:

(1) 1 的 0.01 邻域; (2) -2 的 1 000 邻域;

(3) 0 的 0.1 去心邻域; (4) -1 的 2 左邻域;

(5) x_0 的 ε 右邻域 ($\varepsilon > 0$); (6) x_0 的 δ 去心邻域.

第二节 函数概念

一、函数的定义

中学教学中,我们已接触过函数这一概念.这里,我们作一简要的复习,并着重指出其中一些要点.

在同一个经济现象中,往往同时有几个变量在变化着,这几个变量并不是孤立地在变,而是相互联系并遵循着一定的变化规律.现在我们先就两个变量的情况(多于两个变量的情形以后在第七章再讲)举出几个例子.

【例 1】考虑工厂生产某种产品的总成本 c 与该产品生产数量 q 之间的相依关系.它们之间的关系往往可以由公式

$$c = c_0 + aq$$

给定.这里 c_0 是生产该产品的固定成本,它与生产出多少产品无关,为一常数; a 是每生产一个单位产品的成本,也为一个固定的常数.当生产数量 q 在 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个整数值时,由上式就可以确定此时的总成本的相应数值.

【例 2】某运输公司规定货物的吨公里运价为:在百公里以内,每公里 5 元;超过百公里时,超过部分每公里为 4 元.考虑运价 M 和里程 s 之间的相依关系.它们的相依关系是:

当 s 不超过 100 时, $M = 5s$;

当 s 超过 100 时, $M = 500 + 4(s - 100) = 4s + 100$.

显然,里程数 s 在 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时,由上面计算方法可以确定此时运价的相应数值.

【例 3】用铁皮做一个容积固定为 $V_0(\text{cm}^3)$ 的圆柱形带盖罐头筒.考虑罐头筒的铁皮用料 $S(\text{cm}^2)$ 与罐头筒底半径 $r(\text{cm})$ 之间的相依关系.显然罐头筒的表面积即铁皮用料

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

而其中

$$h = \frac{V_0}{\pi r^2}.$$

故铁皮用料 S 与筒底半径 r 之间的相依关系可由公式

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}$$

给定. 当底半径 r 在 $(0, +\infty)$ 中任意取定一个数值时, 罐头筒的铁皮用料可由以上公式确定出相应的数值.

抽出上面几个例子中所考虑的量的实际意义, 它们都表达了两个变量之间的明确的相依关系或明确的对应规律, 当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时, 另一个变量根据这种对应规律就有一个确定的值与之对应. 两个变量的这种对应关系就是我们常说的函数概念的实质.

定义 1.1 若有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变化范围为 X . 如果对于 X 中的每一个 x 值, 按照某一明确的对应规律 f , 都可以惟一地确定变量 y 相应的取值, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为:

$$y = f(x), x \in X$$

其中变量 x 称为自变量, 实数子集 X 称为该函数的定义域, 变量 y 称为因变量.

二、函数的表示法

在说明两个变量中一个变量是另一个变量的函数时, 关键的问题是应说明:

(一) 定义域 X

由于定义域 X 是一个实数子集, 所以它的常见表示法有集合表示形式, 例如:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \quad \text{以及} \quad X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -1\}$$

等等.

另一常用表示定义域的形式为区间(开, 闭或半开半闭)表示法, 例如上面的集合表示形式可改写为:

$$X = (0, 1) \text{ 以及 } X = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty), \text{ 等等.}$$

在实际问题中, 函数的定义域可以根据问题的实际意义来确定. 例如前面的例 2 与例 3 中函数的定义域均为 $X = (0, +\infty)$, 而例 1 中函数的定义域应为 $X = \mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^+$ 表示正整数集合).

(二) 函数的对应规律 f

函数的对应规律 f 最重要的表示法是所谓的解析表示法. 它指示出, 对 x 的给定数值必须进行哪些数字运算, 才可以得出 y 的对应数值. 这里所说的“数学运算”, 只限于加、减、乘、除、乘方、开方、指数、对数、三角函数和以后将学到的反三角函数运算(以后, 随着我们微积分知识的发展, 还可以加入其他的运算, 例如极限运算等).

如果不考虑实际问题的背景, 只从数学意义上(即数学运算的合理性)来考虑问题的, 一个用解析表示法来表明对应规律的函数, 它的定义域通常认为就是自变量所能取的、使对应规律表示法中所有数学运算均有意义的一切实数所组成的数集. 例如, 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1, 1]$; 函数 $y = 1/\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $(-1, 1)$. 这种函数定义域, 通常称之为自然定义域, 或者, 在不引起混淆时, 简称定义域. 由于自然定义域在数学意义

上是一个完全确定的数集,为了今后叙述方便,我们规定:自然定义域可以略写.当然,如果必须考虑问题的实际意义并且此时实际意义的定义域与自然定义域不一样时,则应明确表示清楚,不能略写,以免引起混淆.

【例4】求函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ 的(自然)定义域.

解 求 $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ 的定义域,即是求不等式 $x^2 - x - 6 \geq 0$ 的解.解之,得

$$(x-3)(x+2) \geq 0$$

$$-\infty < x \leq -2 \text{ 或 } 3 \leq x < +\infty$$

故得定义域

$$X = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty).$$

【例5】确定 $f(x) = \frac{x+1}{\lg(4-x^2)}$ 的(自然)定义域.

解 求 $f(x)$ 的定义域,即要求满足

$$\begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ \lg(4-x^2) \neq 0 \end{cases}$$

的所有 x 的数集.解之,得

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

由此,所求的定义域

$$X = \{x \mid -2 < x < 2 \text{ 且 } x \neq \pm\sqrt{3}\},$$

或者写为

$$X = (-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2).$$

【例6】下列各组函数是否是相同函数?

$$(1) f(x) = x, \quad g(x) = \frac{x^2}{x}$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x^2}, \quad g(x) = |x|$$

$$(3) f(x) = \lg x^2, \quad g(x) = 2\lg x$$

$$(4) f(x) = \sqrt[6]{x^2}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

解 (1)因 $f(x) = x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$g(x) = \frac{x^2}{x} \text{ 的定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

即它们的定义域不同,故不是相同函数.

(2) 因 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = |x|$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 且对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 总成立

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应规律亦相同,故它们是相同函数.

(3) 因 $f(x) = \lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

$g(x) = 2\lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

即它们的定义域不同,故不是相同函数.

(4) 尽管 $f(x) = \sqrt[9]{x^2}$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x}$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 但当 $x < 0$ 时, 例如取 $x = -1$, $f(-1) = \sqrt[9]{(-1)^2} = 1$, $g(-1) = \sqrt[3]{-1} = -1$, 即 $f(-1) \neq g(-1)$, 也就是说它们的对应规律不相同, 故它们是不相同函数.

【例 7】 设函数 $y = f(x) = 2x^2 + x + 1$.

指出函数对应关系 f 的意义, 并求

$$f(-1), \quad f(x_0), \quad f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ 和 } f(f(x)).$$

解 所给函数的对应关系 f 是用解析表示式给出的. 自变量 x 通过一连串代数运算而得到函数值 y ; 具体而言, f 作用于“ $(\cdot)$ ”的意义是

$$f(\cdot) = 2(\cdot)^2 + (\cdot) + 1$$

现令 $(\cdot)$ 为 (-1) , 则得

$$f(-1) = 2(-1)^2 + (-1) + 1 = 2.$$

若令 $(\cdot)$ 为 (x_0) , 则得

$$f(x_0) = 2(x_0)^2 + (x_0) + 1 = 2x_0^2 + x_0 + 1.$$

若令 $(\cdot)$ 为 $\left(\frac{1}{x}\right)$, 则得

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right) + 1 = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1.$$

若令 $(\cdot)$ 为 $f(x)$, 则得

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= 2(f(x))^2 + (f(x)) + 1 \\ &= 2[(2x^2 + x + 1)^2] + (2x^2 + x + 1) + 1 \\ &= 8x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 5x + 4. \end{aligned}$$

【例 8】 设 $f(x+1) = x^2 + 2x$.

求 (1) $f(x)$; (2) $f(\sin x)$.

解 (1) 令 $x+1 = t$, 则 $x = t-1$. 故

$$f(t) = f(x+1) = x^2 + 2x = (t-1)^2 + 2(t-1) = t^2 - 1.$$

改写自变量 t 为 x , 得 $f(x) = x^2 - 1$.

(2) 由(1)得 $f(t) = t^2 - 1$.

以 $\sin x$ 替代 t , 得

$$f(\sin x) = (\sin x)^2 - 1 = -\cos^2 x.$$

在用解析表示法表示一个函数时, 还可以对于它的定义域内自变量 x 不同的值, 用两个或两个以上的数学运算表达式来表明它的对应规律. 这时, 这样表示出的函数, 形式上有一个方便的名词, 称之为分段函数. 例如:

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

和

$$y = F(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

都是定义在实数集 R 上的分段函数, 它们的函数图像如图 1-4 和 1-5 所示.

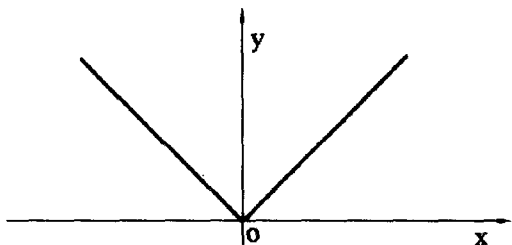


图 1-4

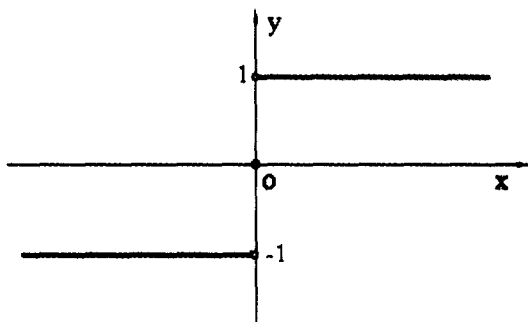


图 1-5

【例 9】 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \end{cases}$$

求 $\frac{f(t) - f(0)}{t} \quad (t \neq 0)$.

解 因为 $t \neq 0$, 故 $f(t) = t^2 \cdot \sin \frac{1}{t}$. 又因 $f(0) = 0$, 故最后

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{t^2 \cdot \sin \frac{1}{t} - 0}{t} = t \cdot \sin \frac{1}{t}.$$

【例 10】 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin x, & x \leq 0 \\ 2x + 3, & x > 0 \end{cases}$$