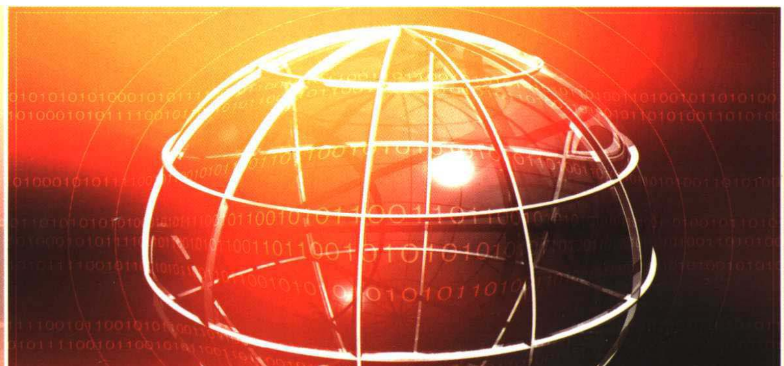
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

Linear Algebra and Analytic Geometry

# 线性代数与空间解析几何

（第2版）

主　编　薛方津
编著者　薛方津　宋眉眉　苟长义
主　审　刘保泰



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

LINEAR ALGEBRA AND ANALYTIC GEOMETRY

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

# 线性代数与空间解析几何

（第2版）

主　编　薛方津
编著者　薛方津　宋眉眉　苟长义
主　审　刘保泰

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

## 内容提要

本书是在第1版的基础上修订而成的.在修订过程中,根据读者对教材的意见和建议,重新编写了该书的某些章节;调整了一些章节的次序;补充了部分例题与习题.修订后力求使全书层次清晰,逻辑性强,叙述深入浅出,通俗易懂,便于教学与自学.本书已被评为普通高等教育"十一五"国家级规划教材.

本书系统介绍线性代数与空间解析几何的基本理论和方法,内容包括行列式,矩阵,向量代数,线性方程组,线性空间与线性变换,特征值与特征向量,二次型,平面与空间直线及其方程,二次曲面及线性规划初步,并配有适量习题供读者练习.

本书可作为高等院校理工类、经管类专业的教材,也可作为教学参考书,供读者自学或考研使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数与空间解析几何(第2版)/薛方津主编.—天津:天津大学出版社,2007.5

ISBN 978-7-5618-2460-3

Ⅰ.线...　Ⅱ.薛...　Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材　②空间几何:解析几何－高等学校－教材　Ⅳ.0151.2　0182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第070755号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址　www.tjup.com
短信网址　发送"天大"至916088
印　　刷　天津泰宇印务有限公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　14.25
字　　数　338千
版　　次　2007年5月第2版
印　　次　2007年5月第1次
印　　数　1－5 000
定　　价　20.00元

# 第 1 版前言

在工科大学教育中，数学课程既是基础理论课程，又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用．知识经济社会对高素质、高智力人才的需求，对大学数学课程的改革提出了前所未有的挑战，要求数学课程在教学内容、课程体系上有新的突破，教学方式和方法、教学环节和手段要反映时代水平．为适应培养 21 世纪工程技术人才对数学的要求，我们按照原国家教委关于数学系列课程改革的精神，近些年来在数学课程教学改革方面进行了探索和研究，广泛吸取了全国重点院校的改革经验，参考和学习了有关教材，取得和积累了一定的经验．作为 2000 年原国家教委教学改革重点资助项目的主要研究内容之一，我们自编的《线性代数与空间解析几何》教材，在 2000 年级教学中进行了试用．现在此基础上我们又对该教材的内容、结构、例题、习题作了细致研究和精心修改，在今年正式出版．

数学是几何、代数、分析有机结合的整体．它们之间既有区别又有联系．线性代数是讨论有限维空间的线性理论的课程，由于线性问题广泛存在于科学、技术的各个领域，某些非线性问题在一定条件下也可以转化为线性问题来处理．尤其在计算机普遍应用的情况下，线性代数的概念和方法，广泛地应用在各个科技领域，成为从事自然科学和工程技术工作的不可缺少的工具．几何问题更是广泛出现和应用于日常生活及科学技术之中，电视技术的动画制作、工程中的计算机辅助设计技术、科学计算的可视化等等，它们的基本数学工具都是解析几何和线性代数．

解析几何的研究对象是用代数方法解决几何问题，而线性代数的许多基本概念和方法都有很强的几何背景，代数与几何有着密切的联系．在大学数学课程体系改革中把这两部分内容整合成一门课程，目的在于通过它们之间的联系，使学生更好地掌握代数方法和几何方法去处理科学技术中的问题．本书力求做到代数方法和几何方法的结合，一方面通过矩阵方法研究和解决线性代数和解析几何中的问题，另一方面对代数方法的几何背景有更深入的了解．对一些抽象的概念通过平面或空间中的具体实例加以说明，增强了抽象概念的实际背景和几何背景．作为线性代数的应用，介绍了线性规划的初步知识．

本教材共分 9 章，讲授全部内容需 70 学时，也可根据不同专业的需要选择其中部分内容讲授．

本书第 1,2,3 章由刘保泰编写；第 4,5,6 章由苗文利编写；第 7,8,9 章由薛方津编写．天津大学徐绥教授、天津理工学院徐永权教授审阅了全稿，提出了宝贵的意见和建议．天津理工学院教务处、基础教育学院对于本课程体系改革及本教材的编写给予了积极的支持和帮助，在此表示感谢．

由于水平所限，不当之处在所难免，敬请读者批评指正，不吝赐教．

编　者

2001 年 7 月于天津

# 第2版前言

2001年,我们按照原国家教委关于工科数学课程体系改革的精神,对数学课程教学改革进行了研究与探索,作为2000年原国家教委教学改革重点资助项目的主要研究内容之一,我们编写了《线性代数与空间解析几何》教材.该书发行后,不少同人及读者表示了关心和支持,并提出了宝贵的意见与建议,对此,我们表示衷心感谢.

本书是在第1版的基础上,根据读者的使用情况修订而成的.在保持原书特色的前提下,重新编写了该书的某些章节;调整了一些章节的次序;调整并补充了部分例题与习题.编写过程中从线性代数的基本思想和方法入手,充分考虑了在内容上的科学性、系统性和逻辑性,按照教学基本要求,突出知识重点和难点,注意了各章节内容之间的内在联系.框架安排力求简洁.在叙述上力求层次清晰,深入浅出,通俗易懂,便于教学与自学.本书已被评为普通高等教育"十一五"国家级规划教材.

本书的内容既有一定的深度,又有一定的广度,不仅考虑到课程的基本要求,同时兼顾报考硕士研究生学生的需求,在某些章节的例题、习题配置上,选取了历届的部分考研试题,以满足读者的需要.

为方便读者更好地掌握教材内容,提高分析和解决问题的能力,该书还有配套的教学指导书《线性代数与空间解析几何导学》与教材相辅相成,同步使用.

本书第1,2,3,9章由薛方津编写;第4,5,6章由宋眉眉编写;第7,8章由荀长义编写.天津理工大学的刘保泰教授对本书的修订给予了关心指导,亲自主审了全稿并给出了十分有益的意见和建议.天津理工大学教务处董培蓓处长、理学院印寿根院长对本课程体系改革及本教材编写给予了积极支持与帮助.在此一并表示最诚挚的感谢.

我们相信《线性代数与空间解析几何》第2版将会受到不同层次读者的欢迎,并希望广大读者继续给我们关心与支持.

编　者

2007年4月于天津

# 目　录

# 第1章　行列式

行列式是重要的数学工具,不但在数学中有广泛应用,在工程技术和科学研究中也经常会用到它.在初等代数中,为求解二元和三元线性方程组,引入了二阶和三阶行列式.本章在二阶和三阶行列式的基础上,进一步建立了 $n$ 阶行列式的理论,并讨论 $n$ 阶行列式对求解 $n$ 元线性方程组的应用.

## 第1节　$n$ 阶行列式

在讨论 $n$ 阶行列式之前,先对二阶和三阶行列式的定义以及如何利用它们求解二元和三元线性方程组,做一简单回顾.

### 1.1.1　二阶行列式与三阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

对方程组(1.1)做加减消元得:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,则方程组(1.1)有惟一解:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

式(1.2)就是方程组(1.1)的求解公式.为便于记忆,引入二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$称为行列式的**元素**,第一个下标 $i$ 称为**行标**,表示该元素位于第 $i$ 行,第二个下标 $j$ 称为**列标**,表示该元素位于第 $j$ 列.这个行列式又称为方程组(1.1)的**系数行列式**.

对线性方程组(1.1),记:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}(\neq 0),$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

则方程组的惟一解(1.2)可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

**例 1.1** 解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=7,\\3x_1+7x_2=6.\end{cases}$$

**解** 由于

$$D=\begin{vmatrix}2&3\\3&7\end{vmatrix}=2\times7-3\times3=5\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}7&3\\6&7\end{vmatrix}=7\times7-3\times6=31,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&7\\3&6\end{vmatrix}=2\times6-7\times3=-9.$$

所以得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{31}{5},\\[2mm]x_2=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{9}{5}.\end{cases}$$

类似地,为求解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}\tag{1.3}$$

定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由三阶行列式的定义可以看出以下结论.

(1)三阶行列式是 3! 项的代数和,它的结果是一个数值.

(2)代数和的每一项都是位于不同行,不同列的 3 个元素的乘积.

(3)各项的正负号各占一半,其规律由对角线法则给出,即主对角线(从左上角到右下角这条线)上 3 个元素的乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$取正号;副对角线(从右上角到左下角这条线)上 3 个元素的乘积 $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$取负号.

通过类似于对方程组(1.1)所做的讨论,可以得到方程组(1.3)的下述解法.若方程组(1.3)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq0,$$

则方程组(1.3)有惟一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中:

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

在实际应用中,遇到的线性方程组所包含的未知量往往多于3个,为将上面二元和三元线性方程组的解法推广到包含 $n$ 个未知量、$n$ 个方程的线性方程组,需要把二阶和三阶行列式加以推广,引入 $n$ 阶行列式的概念.为了给出 $n$ 阶行列式的定义,首先要介绍全排列及其逆序数.

### 1.1.2 全排列与逆序数

把 $n$ 个不同的元素排成一列,叫做这 $n$ 个元素的**全排列**(简称**排列**).$n$ 个不同元素的所有排列的种数,通常用 $\boldsymbol{P}_n$ 表示,$\boldsymbol{P}_n=n!$.

例如,自然数1,2,3的排列的种数共有 $3!=6$ 种,即

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321.$$

为讨论方便,不失一般性,不妨设 $n$ 个元素为 $1,2,\cdots,n$ 这 $n$ 个自然数,并设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 $n$ 个自然数的一个排列.对排列 $p_1p_2\cdots p_n$,若当 $j>i$ 时有 $p_i>p_j$,则称数 $p_i$ 与 $p_j$ 构成一个**逆序** $(i,j=1,2,\cdots,n)$,人们把排在 $p_i$ 前面且比 $p_i$ 大的数的个数 $t_i$ 称为 $p_i$ 的**逆序数** $(i=1,2,\cdots,n)$.把这个排列中各数的逆序数之和

$$t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i,$$

称为这个**排列的逆序数**,记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.排列 $1,2,\cdots,n$ 的逆序数为0,故它是偶排列.并称其为**自然排列**.

**例 1.2** 求排列42153的逆序数.

**解** 在排列42153中,4的逆序数是0,2的逆序数是1,1的逆序数是2,5的逆序数是0,3的逆序数是2,故排列42153的逆序数

$$\tau(42153)=0+1+2+0+2=5.$$

**例 1.3** 求排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数.

**解** $\tau(n(n-1)\cdots21)=0+1+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{1}{2}n(n-1)$.

所以,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,$n(n-1)\cdots21$ 是偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,$n(n-1)\cdots21$ 是奇排列.

在一个排列中,对换其中某两个数,而其他的数保持不动,这种变动称为一个**对换**.两个相邻数的对换称为**相邻对换**.

**定理 1.1** 对换改变排列的奇偶性.(即经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.)

**证** 先证相邻对换的情形.

设排列 $a_1a_2\cdots a_rabb_1b_2\cdots b_s$,对换 $a$ 与 $b$ 后,排列变为 $a_1a_2\cdots a_rbab_1b_2\cdots b_s$.显然,经过这次对换后,数 $a_1,a_2,\cdots,a_r,b_1,b_2,\cdots,b_s$ 的逆序数并不改变,而 $a,b$ 两数的逆序数改变为:当 $a<b$ 时,$a$ 的逆序数增加1而 $b$ 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,$a$ 的逆序数不变而 $b$ 的逆序数减

少 1.所以排列 $a_1a_2\cdots a_rabb_1b_2\cdots b_s$ 与排列 $a_1a_2\cdots a_rbab_1b_2\cdots b_s$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列 $a_1a_2\cdots a_rab_1b_2\cdots b_sbc_1c_2\cdots c_m$，对它作 $s$ 次相邻对换，排列变成 $a_1a_2\cdots a_rabb_1b_2\cdots b_sc_1c_2\cdots c_m$，再作 $s+1$ 次相邻对换，排列变成 $a_1a_2\cdots a_rbb_1b_2\cdots b_sac_1c_2\cdots c_m$. 总之，经过 $2s+1$ 次相邻变换，排列 $a_1a_2\cdots a_rab_1b_2\cdots b_sbc_1c_2\cdots c_m$ 变成排列 $a_1a_2\cdots a_rbb_1b_2\cdots b_sac_1c_2\cdots c_m$. 所以，这两个排列的奇偶性相反.

**推论 1**　由 $1,2,\cdots,n(n\geqslant 2)$ 这 $n$ 个数构成的所有排列中，奇偶排列各占一半.

**证**　设在所有排列中有 $r$ 个奇排列和 $s$ 个偶排列，只需证 $r=s$.

若将 $r$ 个奇排列前两个数对换，则这 $r$ 个奇排列全变成偶排列，并且彼此不同，所以 $r\leqslant s$. 若将 $s$ 个偶排列的前两个数对换，则这 $s$ 个偶排列全变成奇排列，并且彼此不同，于是又有 $s\leqslant r$，所以 $r=s$.

**推论 2**　奇排列变成自然排列所用对换次数为奇数，偶排列变成自然排列所用对换次数为偶数.

**证**　由定理 1.1 可知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而自然排列是偶排列，因此结论成立.

### 1.1.3　$n$ 阶行列式的定义

**定义 1.1**　$n^2$ 个数排成的 $n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

等于所有取自不同行、不同列的 $n$ 个元素的乘积，并附以符号 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$，即

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

的和. 这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是这个排列的逆序数. $n$ 阶行列式可记做

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

这里，$\sum$ 表示对所有的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和，也可把行列式简记做 $\det(a_{ij})$.

由定义可知，$n$ 阶行列式是 $n!$ 项的代数和. 正负号根据排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的奇偶性确定. 由定理 1.1 的推论 1，取正号的项与取负号的项个数相同.

由此定义的二阶、三阶行列式与前面的定义显然是一致的. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号混淆.

主对角线（从左上角到右下角的对角线）以下（上）的元素都是 0 的行列式称为**上（下）三角行列式**.

**例 1.4**　证明上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n\,n} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\,n-1}a_{n\,n}.$$

**证** 这是 $n$ 阶行列式,在展开式中共有 $n!$ 项.但在每项乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1p_{n-1}}a_{np_n}$ 中,只要有一个元素等于零,乘积就为零,所以只需计算乘积中不出现零的项.由于第 $n$ 行元素中除了 $a_{n\,n}$外,都是零,故只能取 $p_n=n$.又由于在第 $n-1$ 行中,除 $a_{n-1\,n-1}$, $a_{n-1\,n}$外,其他元素都是零,而 $p_n=n$,故只能取 $p_{n-1}=n-1$.依次类推,可知在展开式中不为零的项只可能是 $a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\,n-1}a_{n\,n}$,其行标已按自然顺序排好,列标的排列为 $1\ 2\cdots n$,因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n\,n} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1\,2\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\,n-1}a_{n\,n} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\,n-1}a_{n\,n}.$$

这个例子说明上三角行列式等于主对角线元素的乘积.

同理可证下三角行列式也等于主对角线元素的乘积.

作为它们的特例,对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n\,n}.$$

类似例 1.4 的讨论可证明

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\tau(n\,n-1\cdots 2\,1)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}.$$

$\left(因为\ \tau(n\,n-1\cdots 2\,1)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}.\right)$

下面对 $n$ 阶行列式的展开式中各项符号的确定方法做一点补充说明.

$n$ 阶行列式的展开式的一般项为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,若对 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 任意调换其中因子的次序,得到

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

其中行标 $i_1i_2\cdots i_n$ 和列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 分别是 $1,2,\cdots,n$ 的排列.下面证明它们的逆序数之间有如下关系:

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

**证** 只需证 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$和 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$有相同的奇偶性.因为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$可由 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 经有限次因子对调得出,而对调乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中任意两个因子时,排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和$j_1j_2\cdots j_n$ 同时做了一次对换,于是 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$和 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$同时改变奇偶性,故 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$的奇偶性不变.所以 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$有相同的奇偶性.

由以上结论可知,若 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$,则有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn},$$

因此,可以得到 $n$ 阶行列式按列的自然顺序的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

## 第2节　$n$ 阶行列式的性质

当行列式的阶数 $n$ 较大时,直接利用行列式的定义计算行列式是较繁的.因此,需要从定义推导出行列式的一些性质,以便于对行列式的进一步讨论及简化行列式的计算.记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 $D^{\mathrm{T}}$ 为行列式 $D$ 的**转置行列式**(行列式的行和列对应互换).

**性质1** 行列式 $D$ 与它的转置行列式$D^{\mathrm{T}}$ 相等.

**证** 记 $b_{ij}=a_{ji},(i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

而 $D$ 按列的自然顺序展开式为

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

所以 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由此性质可知,在行列式中,行与列的地位是对称的,行列式的性质凡是对行成立的,对列也同样成立,反之亦然.以下仅对行讨论行列式的性质.

**性质2** 互换行列式的两行,行列式变号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}.$$

**证** 设:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

由题设,$D_1$ 是交换 $D$ 的第 $i$ 行与第 $j$ 行所得(不妨设 $i<j$),且当 $k \neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}$;而 $b_{ip}=a_{jp}$,$b_{jp}=a_{ip}$.于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} = \\ &\sum(-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n} = \\ &\sum(-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = \\ &-\sum(-1)^{\tau(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D. \end{aligned}$$

**推论** 如果行列式有两行完全相同,则行列式等于零.

**证** 把行列式 $D$ 中相同的两行交换,由性质 2 有 $D=-D$,故 $D=0$.

**性质 3** 用数 $k$ 乘以行列式的某一行所有元素等于用数 $k$ 乘以该行列式.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**证** 由行列式的定义

$$\text{左式} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{i-1p_{i-1}} (ka_{ip_i}) a_{i+1p_{i+1}} \cdots a_{np_n} =$$

$$k \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = \text{右式}.$$

由性质 3 可知行列式的某一行的所有元素的公因子可以提取到行列式符号的外面.

**推论 1** 如果行列式的某一行元素全为零,则行列式等于零.

**推论 2** 如果行列式中有两行成比例,则行列式等于零,即

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array} = 0. \end{array}$$

**证** 由性质 3 及性质 2 推论可得

$$\text{左式} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

**性质 4** 如果行列式的某一行的元素都是两数之和,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D$ 等于下列两个行列式之和为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用行列式的定义,很容易证明性质 4,请读者自证.

**性质 5** 把行列式的某一行的 $k$ 倍加到另一行上去,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**证** 右式 $\xlongequal{\text{性质 4}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ ka_{i1} & a_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 3 推论 2}}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = \text{左式}.$$

利用以上性质可以简化行列式的计算,为表述简洁清楚起见,互换行列式 $i,j$ 两行(列),记做 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$;行列式第 $i$ 行(列)乘以数 $k$,记做 $r_i \times k(c_i \times k)$;行列式第 $i$ 行(列)提取公因子 $k$,记做 $r_i \div k(c_i \div k)$;行列式第 $i$ 行(列)的 $k$ 倍加到第 $j$ 行(列)上去,记做 $r_j + kr_i(c_j + kc_i)$.

下面通过例子说明如何应用行列式的性质计算行列式.

**例 1.5** 已知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a, \quad \begin{vmatrix} a_1' & c_1 & b_1 \\ a_2' & c_2 & b_2 \\ a_3' & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = b,$$

计算

$$D = \begin{vmatrix} a_1+2a_1' & a_2+2a_2' & a_3+2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+3b_1 & c_2+3b_2 & c_3+3b_3 \end{vmatrix}.$$

**解** $D \xlongequal{r_3+(-3)r_2} \begin{vmatrix} a_1+2a_1' & a_2+2a_2' & a_3+2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 4}}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_1' & 2a_2' & 2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 3}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 1}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 2}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} a_1' & c_1 & b_1 \\ a_2' & c_2 & b_2 \\ a_3' & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = a - 2b.$$

**例 1.6** 具有如下形状的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

称为**反对称行列式**.试证奇数阶反对称行列式等于 0.

**证** 设

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

是奇数阶反对称行列式,于是

$$D \xlongequal{\text{性质 1}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[(i=1,2,\cdots,n)]{r_i \div (-1)} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D.$$

因为 $n$ 为奇数,所以 $D = -D$,故 $D = 0$.

**例 1.7** 计算 $n$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}.$$

**解**
$$D \xlongequal{c_1 + (c_2 + c_3 + \cdots + c_n)} \begin{vmatrix} (n-1)a+b & a & \cdots & a \\ (n-1)a+b & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)a+b & a & \cdots & b \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \div [(n-1)a+b]}$$