G A O D E N G S H U X U E

面向21世纪普通高等教育规划教材

（经管类）

高等数学 上册

主编 赵利彬 副主编 张丽琴 杨维 主审 史金麟

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪普通高等教育规划教材

高等数学

（经管类）

上 册

主　编　赵利彬
副主编　张丽琴　杨　维
主　审　史金麟

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本教材是在贯彻、落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”要求的基础上，按照“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求，并结合多数本专科院校学生基础和教学特点进行编写的，是面向21世纪课程教材．全书分上、下两册出版．上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用和广义积分；下册内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程．各节后均配有相应的习题，书末附参考答案．

本教材结构严谨、知识系统、讲解透彻、难度适宜、通俗易懂、适应面宽．适合作为普通高等院校经济管理类有关专业的高等数学课程的教材使用．也可作为大学本、专科理工类学生高等数学课程的教学参考书，可供成教学院或申请升本的专科院校选用，也可供相关专业人员和广大教师参考．

与本教材同步出版的《高等数学学习指导（经管类）》是教材内容的补充、延伸、拓展和深入，对教学中的疑难问题和授课中不易展开的问题以及诸多典型题目进行了详细探讨，对教师备课、授课和学生学习、复习以及巩固本教材的教学效果大有裨益，亦可作为本教材配套的习题课参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类．上册/赵利彬主编．—上海：同济大学出版社，2007.8

面向21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-5608-3529-7

Ⅰ．高… Ⅱ．赵… Ⅲ．高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第095066号

面向21世纪普通高等教育规划教材

高等数学(经管类)上册

主　编　赵利彬

副主编　张丽琴　杨　维

主　审　史金麟

责任编辑　曹　建　责任校对　谢惠云　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021－65985622）

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　14.5

印　数　1—5100

字　数　290000

版　次　2007年8月第1版　2007年8月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-3529-7/O·300

定　价　22.00元

前　言

“高等数学”是普通高等院校本、专科各专业普遍开设的一门公共基础课程.在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用.为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求,适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变,满足一些高等院校扩招或升本出现的新的教学形势、学生基础和教学特点,根据我们多年的教学改革实践,在多次研讨和反复实践的基础上,编写了这部经管类高等数学课程的教材.

本教材在编写过程中认真贯彻、落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神,严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新修订的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”,参考了近几年来国内出版的一些优秀教材,结合编者多年的教学实践经验.全书以通俗易懂的语言和丰富的例题,深入浅出地讲解高等数学的知识,并着重培养学生分析问题和解决问题的能力.本书的主要特色有以下几点:

(1) 在满足教学基本要求前提下,淡化理论推导过程.

(2) 较为简明,篇幅比传统教材要少,但高等数学的基本内容都讲到了,且有一定的理论深度.

(3) 较为通俗、易懂,便于教师授课,也便于学生阅读、理解.

(4) 注重理论联系实际,增加了数学在经济上应用的例子,培养学生解决实际问题的能力.

(5) 注重渗透现代化教学思想及手段,注重渗透数学建模思想.

本教材结构严谨、知识系统、讲解透彻、难度适宜、通俗易懂、适应面宽.适合作为普通高等院校经济管理类有关专业的高等数学课程的教材使用.也可作为大学本、专科理工类学生高等数学课程的教学参考书,可供成教学院或申请升本的专科院校选用,也可供相关专业人员和广大教师参考.

与本教材同步出版的《高等数学学习指导(经管类)》是教材内容的补充、延伸、拓展和深入.对教学中的疑难问题和授课中不易展开的问题以及诸多典型题目进行了详细探讨,对教师备课、授课和学生学习、复习以及巩固本教材的教学效果大有裨益,亦可作为本教材配套的习题课参考书.

本教材由赵利彬主编,张丽琴、杨维副主编.第1章由郭晶编写,第2章、第3章由王宜洁编写,第4章、第5章由黄建吾编写,第6章由赵利彬编写,第7章由任丽编写,第8章由董哈微编写,第9章由马合保编写,第10章由林志宝编

写，杨维、张丽琴参与了本书编写大纲的讨论与制定工作，并对各章的编写提出了具体的意见和建议．全书由赵利彬统稿、定稿．

本书由史金麟教授主审．史金麟教授对本书进行了深入细致的审阅，提出了许多宝贵的修改意见和建议，使本书避免了一些错误和不妥之处．对史金麟教授的热心指导，我们在此表示诚挚的谢意！在本书的编写过程中还得到作者单位及参编者单位领导的大力支持和热情帮助．刘梅玲小姐为本书习题的参考答案做了仔细的核对，在此一并表示衷心的感谢！

由于作者水平与学识有限，本书疏漏与错误之处在所难免，书中一定还有不少不尽人意之处，敬请专家和读者不吝批评和赐教．

赵利彬

2007年6月

目　次

第1章　函数、极限与连续

高等数学是关于变量的数学，函数的关系就是变量之间的依赖关系，极限的方法是研究变量的一种基本方法．本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质．

1.1　函　　数

1.1.1　集合、常量和变量

“集合”是数学中的一个重要概念，现代数学各个分支几乎都构筑在严格的集合理论上．为今后学习的需要，本节从介绍高等数学所涉及的有关集合的一些基本知识开始．

1. 集合的概念

所谓集合，就是具有某种特定性质的事物的全体，简称集．组成这个集合的事物称为该集合的元素，简称元．通常用大写字母 $A,B,X,Y\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,x,y\cdots$ 表示元素．若集合不含任何元素，则称为空集，记为 $\varnothing$．仅含有限个元素的集合称为有限集，否则，称为无限集．

若元素 x 在集合 A 中，则称 x 属于 A，记为 $x\in A$；若元素 x 不在集合 A 中，则称 x 不属于 A，记为 $x\notin A$．

设 A,B 是两个集合，若集合 A 中的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$（读为 A 包含于 B），或 $B\supset A$（读为 B 包含 A）．

若集合 A 和 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 和 B 相等，记为 $A=B$．

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subsetneq B$．

例如，我们一般用字母 $\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数集合，$\mathbf{Z}$ 表示全体整数集合，$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数集合和 $\mathbf{R}$ 表示全体是实数集合，则 $\mathbf{N}^+\subset\mathbf{Z}\subset Q\subset\mathbf{R}$．另外，通常 $\mathbf{R}^*$ 表示非零的实数的集合，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合．

2. 集合的表示方法

表示集合的方法有两种，一种是枚举法，即把集合中的元素一一列举出来．如 $\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$．

另一种是描述法，即把元素的特性描述出来．例如

$$\mathbf{R}^+ = \{x \mid x > 0\};$$

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} \middle| p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 和 } q \text{ 互质}\right\}.$$

3. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差三种.

设 A,B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记为 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

一般地,n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,即

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2 \cdots \text{ 或 } x \in A_n\}.$$

由所有属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记为 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

一般地,n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$,即

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ 且 } x \in A_2 \cdots \text{ 且 } x \in A_n\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记为 $A \backslash B$,即 $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$.

有时,我们仅把问题限于某一个确定的集合 X 中进行,所研究的其他集合 A 都是它的子集,这时称集合 X 为全集或基本集,称 $X \backslash A$ 为 A 的余集或补集,记为 A^C,即

$$A^C = \{x \mid x \in X \text{ 且 } x \notin A\}.$$

集合的并、交、差三种运算满足下列法则:

设 A,B,C 为任意三个集合,则有

(1) 交换律:$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

　　结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(2) 分配律:$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(3) 对偶律:$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

以上法则都可根据集合相等的定义验证.

此外,我们还可以定义两个集合的笛卡儿乘积.

设 A,B 是任意两个集合,在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,组成一个有序对(x, y),把这样的有序对作为新元素,它们全体

组成的集合称为集合A与集合B的笛卡儿乘积或直积，记为$A\times B$，即$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A 且 y\in B\}$.

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R} 且 y\in\mathbf{R}\}$即为$xOy$面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$常记作$\mathbf{R}^2$.

4. 区间和邻域

区间是一类用得较多的数的集合. 设a和b为实数，且$a<b$.

数集$\{x\mid a<x<b\}$称为开区间，记为(a,b)，即$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.

数集$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间，记为$[a,b]$，即$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

数集$\{x\mid a<x\leqslant b\}$和$\{x\mid a\leqslant x<b\}$均称为半开区间，分别记为$(a,b]$和$[a,b)$.

a,b称为上述各区间的端点，数$b-a$称为区间长度，由于a,b是有限的实数，故上述各区间均称为有限区间.

此外，引进记号$+\infty$（读作正无穷大）和$-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$和$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$等均为无限区间.

全体实数的集合$\mathbf{R}$也可记作$(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

以后在不需要明确所论区间是否包含端点以及是有限还是无限区间时，就简称为“区间”，并且常用字母I表示它.

邻域也是常用到的一类集合. 设$\delta>0$，则开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为a的一个δ邻域，记为$U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中，点a称为邻域的中心，δ称为邻域的半径（图1-1）. $U(a,\delta)$也可表示为$\{x\mid |x-a|<\delta\}$.

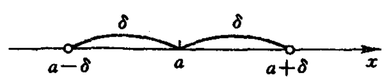

图 1-1

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 例如，由于$0<|x-a|$表示$x\neq a$，故集合$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$不包含点a，称为点a的去心δ邻域，记为$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

另外，把开区间$(a-\delta,a)$称为a的左δ邻域，把开区间$(a,a+\delta)$称为a的右δ邻域. 有时，不关心δ的大小时，就将a的邻域表示为$U(a)$.

5. 常量和变量

我们在研究各种自然现象和实际问题时，会遇到许多量，这些量一般分为两种，一种是在考察过程中保持不变的量，即保持一定的数值，称为**常量**；另一种是在这一过程中会起变化的量，即可以取不同的数值，称为**变量**. 例如，在生产过程中，产品的数量、原材料的消耗量等都是变量，而产品的规格则是常量.

一个量是常量还是变量，要根据具体的情况作出分析.

通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z,t 等表示变量.

在变化过程中，我们发现有些变量是连续变化的，例如时间、路程等，而有些变量不是连续变化的，如商品的价格、产品的件数等. 变量的变化范围就是变量的取值范围，如果变量是连续变化的，当变量取实数值时，常用区间表示它的变化范围.

1.1.2 函 数

1. 函数概念

在研究实际问题时，常常有几个量同时变化，它们的变化往往不是彼此独立，而是相互联系着，其间的关系复杂. 为了便于研究，我们先考察两个变量之间的关系. 下面是一些具体的例子.

例 1.1.1 某商品的单价为 10 元，该商品的销售总收益 y 取决于销售量 x，它们的关系由公式 $y=10x$ 确定. 这里单价是常量，销售总收益 y 和销售量 x 为变量. 当 x 取某个值时，按变量间的依赖关系，就有一个确定的值 y 与之对应.

例 1.1.2 实验室动物所用药物在血液中的浓度(用每百万个中占多少个来度量) 随着时间在递减，下表列出了浓度和时间的关系：

浓度 $/10^{-6}$	853	587	390	274	189	130	97	67	50	40	31
时间	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

这里时间和浓度均为变量，对于时间 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 中的每一个值，由表格可定出它的对应浓度.

例 1.1.3 人在奔跑后心博率会回复到正常，图 1-2 所示的曲线描绘了某人锻炼后几分钟心博率与时间这两个变量的对应关系. 在时间的变化范围内 $\{0\leqslant t\leqslant 10\}$ 每取一个值，在图 1-2 中，就有一个确定的心博率与之对应.

从数学的角度看以上例子变量间对应关系的共同特征，可以得到如下的函数概念：

定义 1.1.1 设 D 是一个给定的非空数集，x 和 y 是两变量，若存在对应关系 f，使得当变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照对应关

系 f，总会取到唯一确定的数值和 x 对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记为

$$f:D \to R.$$

此时，x 称为自变量，y 的值由它所依赖的变量 x 所确定，故称 y 为因变量. 数 x 对应的数 y 称为函数 f 在 x 处的函数值，记为 $y = f(x)$. 数集 D 称为函数 f 的定义域，函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 f 的值域，用 $f(D)$ 或 R_f 表示. 即

$$R_f = f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

由此可见，例 1、例 2 和例 3 中变量之间的关系都是函数关系.

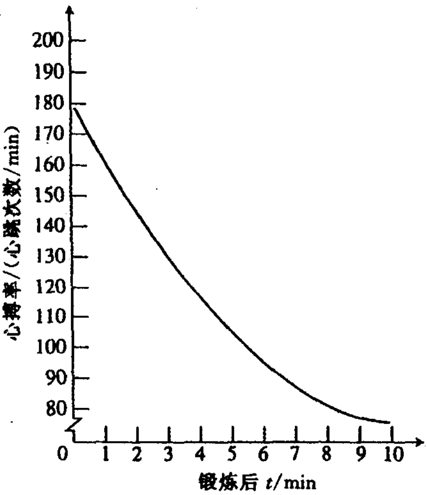

图 1-2

函数概念的几点说明：

(1) 在定义中，我们用符号"$f:D \to R$"表示 f 是定义在数集 D 上的函数，这是个抽象的符号. 在具体问题中，对应关系 f 有不同的表达式. 如例 1 中收益和销售量的关系是 $y = 10x$，又如圆的半径 R 和圆的面积 S 关系是 $S = \pi R^2$，等等.

为了便于表达函数，我们也用符号"$y = f(x), x \in D$"表示定义在数集 D 上的函数 f. 当不需要指明函数的定义域时，又可简写为"$y = f(x)$".

(2) 表示函数的符号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如"g"，"φ"，"ψ"，"F" 等. 相应地，函数记为 $y = g(x)$，$y = \varphi(x)$，$y = \psi(x)$ 或 $y = F(x)$ 等. 有时，还可以用因变量的符号表示函数，即 $y = y(x)$.

(3) 函数的定义中有两个基本要素：一是定义域，一是对应关系. 若两个函数的定义域相同，对应关系也相同，则这两个函数是相同的函数，否则就是表示不同的函数.

(4) 函数的定义域的确定通常有两种方式：一是对有实际背景的函数，根据它的实际意义来确定定义域，如例 1.1.2 中的定义域为 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，例 3 中的定义域为 $[0,10]$；另一种是不考虑函数的实际意义，只抽象地研究用数学式子表示的函数，这时约定：函数的定义域就是自变量所能取的使数学式子有意义的一切实数值. 这种定义域称为函数的自然定义域. 例如，函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的自然定义域是 $[-1,1]$，$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域是 $(-1,1)$. 一般来说，给出一个函数的具体表达式的同时，应该指出它的定义域. 否则表明默认它的定义域就是自然定义域.

(5) 在函数的定义中，对每个 $x \in D$，按对应关系 f，与之对应的函数值 y 是唯一确定的，这样定义的函数 f 称为单值函数. 否则，若 y 不总是唯一的，则函数 f 就称为多值函数. 例如，变量 x 和 y 的对应关系由方程 $y^2 = x$ 给出，当 $x = 0$ 时，y 取唯一的值 0 与之对应，当 $x = a, a \geqslant 0$ 时，y 有 $\sqrt{a}$ 和 $-\sqrt{a}$ 两个值与之对应. 因此，这个方程确定了一个多值函数. 对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以转化为单值函数. 例如，在由方程 $y^2 = x$ 给出的对应关系中，附加“$y \geqslant 0$”的条件，即以“$y^2 = x$ 且 $y \geqslant 0$”作为对应关系，就可以得到一个单值分支 $y = y_1(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$.

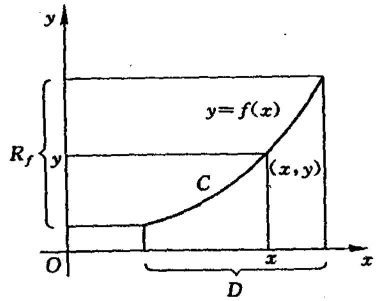

图 1-3

(6) 函数的图形. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $x \in D$，对应的函数值为 $y = f(x)$. 这样，以 x 为横坐标，y 为纵坐标就在 xOy 平面上确定了一点 (x, y). 当 x 取遍 D 上的每一个数值时，就得到点 (x, y) 的一个集合 C，即 $C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$. 则点集 C 称为函数 $y = f(x), x \in D$ 的图形，如图 1-3 所示，图中的 R_f 表示函数的值域.

2. 函数的表示法

熟知的函数的表示法有三种：表格法、图形法和解析法. 表格法，即变量间的函数关系用列表的方法来表示，这种方法有利于查找函数值. 例如，火车的时刻表、银行的外汇兑换表等.

图形法，即在坐标平面上把函数的图形描绘出来.

解析法，即把变量间的函数关系用方程给出，这些方程通常称为函数的解析表达式. 具体地，又分为三种情形：

(1) 显函数，即函数 y 由 x 的解析式直接表示出来. 例如 $y = \arctan x + x^2$.

(2) 隐函数，即 x 和 y 的对应关系由方程给出，但函数 y 不能由 x 的解析式直接表示出来，例如天体力学中著名的开普勒(Kepler) 方程 $y - x - \varepsilon \sin y = 0$（这里 ε 为常数，$0 < \varepsilon < 1$）. 显然，隐函数是函数更一般的形式.

(3) 分段函数，即一个函数在其定义域的不同范围内具有不同的解析表达式.

下面给出几个分段函数的例子，以及它们的图形表示.

例 1.1.4 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数，其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$，它的图形如图 1-4 所示.

例 1.1.5 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

称为绝对值函数，其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = [0, +\infty)$，它的图形如图 1-5 所示.

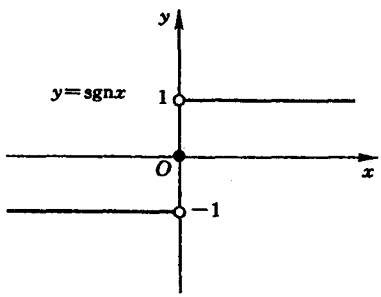

图 1-4

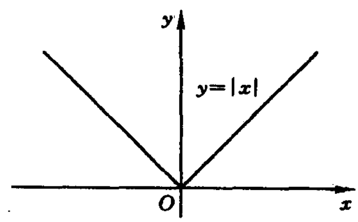

图 1-5

例 1.1.6 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$. 它的图形如图 1-6 所示.

注意，分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是几个函数. 另外，它也可以用无限多个式子来表示一个函数，如下例.

例 1.1.7 函数

$$y = [x] = n, \quad n \leqslant x < n+1, \quad n \in \mathbf{Z}$$

称为取整函数，即 x 是任意实数，y 是不超过 x 的最大整数，记为 $[x]$. 如 $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$，$[-2.5] = -3$. 其中，定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = \mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-7 所示.

例 1.1.8 某工厂生产某种产品，年产量为 x，每台售价 250 元. 当年产量为 600 台以内时，可以全部售出，当年产量超过 600 台时，经广告宣传又可以再多售

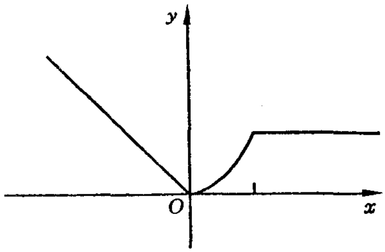

图 1-6

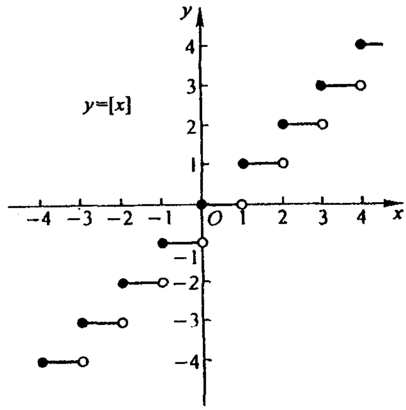

图 1-7

出 200 台，每台平均广告费 20 元，生产再多，本年就售不出去了. 建立本年的销售总收入 R 与年产量 x 的函数关系.

解 依照题意可列出函数关系为

$$R=\begin{cases}250x, & 0\leqslant x\leqslant 600,\\ 250\times 600+(250-20)\times(x-600), & 600<x\leqslant 800,\\ 250\times 600+(250-20)\times 200, & x>800,\end{cases}$$

即

$$R=\begin{cases}250x, & 0\leqslant x\leqslant 600,\\ 12\,000+230x, & 600<x\leqslant 800,\\ 196\,000, & x>800.\end{cases}$$

这里销售总收入 R 与年产量 x 的函数关系用分段函数表示，定义域为 $[0,+\infty)$. 大家可以自己试着画出函数的图形.

3. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 图形特点是 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_1$ 的下方.

如果存在数 K_2，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_2$ 的上方.

如果存在正数 M，使对任一 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 图形特点是，函数

$y = f(x)$ 的图形在直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 的之间.

函数 $f(x)$ 无界，就是说对任何 M，总存在 $x \in X$，使 $|f(x)| > M$.

例如，$f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的，因为对任意的实数 x，恒有 $|\sin x| \leqslant 1$，它的图形位于两条平行直线 $y = \pm 1$ 之间. 1 是它的一个上界，-1 是它的一个下界. 又如，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无上界的，而在 $[1, +\infty)$ 上有界.

(2) 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的. 图形特点是沿 x 轴正向逐渐上升(图1-8).

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 图形特点是沿 x 轴正向逐渐下降(图 1-9).

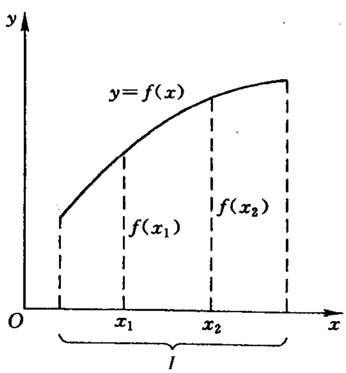

图 1-8

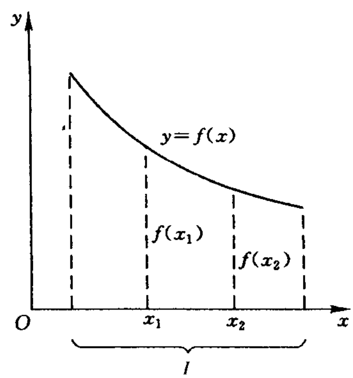

图 1-9

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如，函数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调增加的，在 $(0, +\infty)$ 上是单调减少的(图 1-10)，又如函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的，在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调的(图 1-11).

(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$，则 $-x \in D$). 如果对于任一 $x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于任一 $x \in D$，有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

对于偶函数，若点 $A(x, f(x))$ 在图形上，由于 $f(-x) = f(x)$，则 A 点关于 y 轴的对称点 $A'(-x, f(x))$ 也在图形上，故偶函数的图形关于 y 轴对称，如