21世纪全国高等院校通用教材辅导用书

概率论与数理统计学习指导

MATHS

编著 朱弘鑫
侯红卫

中国财政经济出版社

21世纪全国高等院校通用教材辅导用书

概率论与数理统计学习指导

朱弘鑫　侯红卫　编著

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导/朱弘鑫，侯红卫编著．—北京：中国财政经济出版社，2007.5

21世纪全国高等院校通用教材辅导用书

ISBN 978－7－5005－9115－3

Ⅰ．概…　Ⅱ．①朱…②侯…　Ⅲ．①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第058334号

中国财政经济出版社出版

URL：http：//www.cfeph.cn

E－mail：jiaoyu@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100036

发行电话：88190616　88190655（传真）

北京财经印刷厂印刷

787×960毫米　16开　11.75印张　247 000字

2007年8月第1版　2007年8月北京第1次印刷

定价：15.00元

ISBN 978－7－5005－9115－3/O·0053

（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

本书是与中国财政经济出版社出版的《概率论与数理统计》（朱弘鑫编著）配套的辅助书．既可以作为学生学习上述教材的课外练习用书，也可以作为教师的教学参考书．

全书内容与教材的第一章到第九章对应．每一章分成四个部分：第一部分是对相应章节应当掌握的基础知识点的回顾，便于学生理解和查找；第二部分是对《概率论与数理统计》教材习题的简要分析与解答，帮助学生分析自己的解题过程与思路；第三部分是补充习题，提供了形式多样的练习题，但难度没有增加；第四部分是补充习题的参考答案，部分题目有解答过程或提示．

不论是教材上的习题，还是本辅导书上补充的习题，都旨在让学生通过练习掌握这门课程的基本知识点和思想方法，在难度与解题技巧上并无要求．因此，本书并没有解题技巧的归纳和训练，所有题目都是相对容易的基础题，完成这些训练已经能够满足对这门课程要点的理解和以后进一步学习的需要．绝大多数题目可以在教材的例题中找到类似的解法，有助于提高读者学习的自信心，增加学习的乐趣．

学生使用本书时要尽量避免直接翻看答案，一定要自己做过，才会有较深的记忆，起到复习和巩固的效果．

在编写的过程中，作者努力做到精益求精，但囿于水平与时间，难免有疏漏之处，期待专家与读者的指正．

本书的写作参考了众多国内外教材，向这些老师们表示敬意．

编　者

2007 年 2 月

目 录

第1章 事件与概率

[知识点回顾]

一、随机试验与随机事件

可以重复的试验，如果其所得的结果不能完全预言，但其全体可能结果是已知的，则称此试验为随机试验．随机试验的结果，称为随机事件或简称事件．一般采用英文字母 A、B、C 等表示．

试验的全体可能结果称为样本空间，每一个结果称为样本点，事件可以理解为相应样本空间的子集．

只包含一个样本点的事件，称为基本事件．而有多个样本点的事件，称为复合事件．一定发生的事件，称为必然事件，一般用全集符号 Ω 来表示．一定不会发生的事件，称为不可能事件，一般用空集符号 $\varnothing$ 来表示．实际上，必然事件与不可能事件都是确定性的事件，但为了研究和讨论方便，我们把它们当作不确定事件的特例．

二、事件的关系与运算

（一）包含关系

如果事件 A 的发生能导致 B 的发生，则称事件 A 包含于事件 B，或事件 A 是事件 B 的子事件，记为 $A\subset B$.

（二）相等

如果两个事件相互包含，则称它们是相等的．

（三）事件的并（和）

事件 A 与事件 B 当中至少有一个发生，一般也是一个随机事件，称为事件 A 与事件 B 的并事件或和事件，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.

多个事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生，称为多个事件的并或和，可以记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

（四）事件的交（积）

事件 A 与事件 B 同时发生，一般也是一个随机事件，称为事件 A 与事件 B 的交事件或积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB.

多个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生，称为多个事件的交或积，可以记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$.

（五）事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，一般也是一个随机事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$.

（六）互不相容（互斥）

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，也就是 $AB=\phi$，称事件 A 与事件 B 是互不相容或互斥的．相反，若事件 A 与事件 B 可以同时发生，即 $AB\neq\phi$，称事件 A 与事件 B 是相容的．

（七）对立事件

事件 A 发生与不发生都是可能的，事件 A 不发生作为一个事件，称为事件 A 的对立事件或逆事件，记为 $\overline{A}$，也可称 A 与 $\overline{A}$ 是对立事件．

三、事件的运算律

（一）交换律

$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

（二）结合律

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

（三）分配律

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

（四）对偶律

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

上述规律可以推广到多个事件的运算上.

四、概率定义

（一）古典概率

如果随机试验满足如下条件：

（1）基本事件总数有限，

（2）各基本事件等可能，

则古典概率（也称等可能概率）的计算公式为：

$$P(A) = \frac{A\text{ 所含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

古典概率计算的关键是分析基本事件的数量.

（二）几何概率

与几何形状有关的概率，称为几何概率. 如线段的长度、平面区域的面积等.

（三）统计概率

借助大量的试验来估计概率. 称事件发生次数与试验总次数的比值为事件发生的频率. 随着试验次数的增大，事件发生的频率越来越趋向于一个稳定值，这个稳定值就称为统计概率.

（四）条件概率

设 $P(B) > 0$，在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率，称为事件 A 在给定 B 下的条件概率，简称为 A 对 B 的条件概率，记为 $P(A \mid B)$.

前面三类概率都可以有相应的条件概率，可以直接计算，也可以利用公式：

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

五、概率的性质

（一）加法法则

如果两个事件 A 与 B 是互不相容的，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

可以推广到多个事件的情况．设事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则有：

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

另一种常用情况是：

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

此式经常改写为：

$$P(A)=1-P(\bar{A})$$

当某个事件的对立事件的概率比较容易得出时，可以用来简化概率的计算．

（二）广义加法法则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

可以推广为：

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

（三）减法法则

若事件有包含关系 $A\supset B$，则有：

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

对于一般的两个事件，可得：

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

（四）乘法法则

若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$

若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$

也可以推广为多个事件的乘法法则：

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

如果条件概率较易计算，乘法法则在求事件之积时会比较方便．

六、全概率公式与贝叶斯公式

（一）分割

如果 A_1, A_2, …, A_n 两两互不相容，且其和为必然事件，则称 A_1, A_2, …, A_n 为必然事件 Ω 的一个分割，简称分割. A 与 $\overline{A}$ 就是一个最简单的分割.

（二）全概率公式

如果 A_1, A_2, …, A_n 是一个分割，且 $P(A_i)>0$, $i=1, 2, \cdots, n$, 则有：

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+\cdots+P(A_n)P(B\mid A_n)$$

它应用于已知各种原因下结果发生的概率，求结果发生的一般概率的情形.

（三）贝叶斯公式

如果 A_1, A_2, …, A_n 是一个分割，且 $P(A_i)>0$, $i=1, 2, \cdots, n$, 则有：

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+\cdots+P(A_n)P(B\mid A_n)}$$

它应用于已知各种原因下结果发生的概率，当结果发生时，求各原因的概率的情形.

七、事件的独立性

（一）事件的独立关系

如果事件 A 发生的概率不受事件 B 发生的影响，即 $P(A)=P(A\mid B)$，称事件 A 与事件 B 是相互独立的.

如果事件 A_1, A_2, …, A_n 中的任何一个事件发生的可能性都不受其他一个或几个事件发生的影响，则称事件 A_1, A_2, …, A_n 相互独立.

关于相互独立，有如下常用的性质：

(1) 事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是：

$P(AB)=P(A)P(B)$

(2) 若事件 A 与事件 B 是相互独立的，则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中的每一对事件都是相互独立的.

(3) 如果 A_1, A_2, …, A_n 相互独立，则有：

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$

(4) 如果 A_1, A_2, …, A_n 相互独立，则有：

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$

(二) 伯努里公式

若进行 n 次重复独立试验，每次试验中只考虑事件 A 是否发生，这样的试验称为 n 重伯努里试验．

n 重伯努里试验中，事件 A 发生 k 次的概率就是如下的伯努里公式：

$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $q=1-p$, $k=0, 1, 2, \cdots, n$

[教材习题分析与解答]

习题一

1. 填空题

(1) 若 A 表示甲考试及格，B 表示乙考试及格，则 AB 表示__________.

(2) 若路口红绿灯的间隔为 3 分钟，则一个人到达路口遇到红灯后，需要等候的时间不超过 1 分钟的概率是__________.

(3) 袋中有 3 个红球，2 个白球．甲任取一球，不放回，然后乙再任取一球，则乙取到红球的概率为__________.

(4) 已知 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.5$, A 与 B 互不相容，则 $P(A+B)=$__________.

(5) 已知 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.5$, A 与 B 相互独立，则 $P(A+B)=$__________.

解：本题要求熟悉基本的知识点．

(1) AB 表示 A 与 B 同时发生，也就是：甲与乙考试都及格．

(2) 这是几何概率问题，概率值是：1/3.

(3) 教材中已经讲过不放回抽签的公正性，所以乙取到红球的概率与甲取到红球的概率相同，都是 3/5.

(4) 直接由加法法则，有 $P(A+B)=0.8$.

(5) 由广义加法法则及独立性，有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-$

$P(A)P(B)=0.65$.

2. 选择题

(1) 若 A 与 B 是两个对立事件，则不一定成立的结论是 (　　).

(A) $A+B=\Omega$　　(B) $AB=\phi$

(C) A 与 B 独立　　(D) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 对立

(2) 若 A 与 B 是两个概率不为零的互斥事件，则一定有 (　　).

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互斥　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C) $P(A-B)=P(A)$　　(D) $P(AB)=P(A)\ P(B)$

(3) 在 10 件产品中有 4 件是不合格品，任取两件，已知其中一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为 (　　).

(A) 1/9　　(B) 1/3

(C) 1/5　　(D) 2/15

(4) 若两个事件 A 与 B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=0.4$，则 $P(B)=$ (　　).

(A) 0.6　　(B) 0.4

(C) 0.24　　(D) 0.2

(5) 同时抛掷 3 枚匀称的硬币，恰好有两枚正面向上的概率为 (　　).

(A) 0.5　　(B) 0.375

(C) 0.25　　(D) 0.125

解：本题要求熟悉基本的知识点和运算，第 (3) 小题要注意正确理解.

(1) 两事件对立，则它们不独立，答案是 C.

(2) A 与 B 互斥时，$A-B=A$，答案是 C.

(3) 以 A 表示至少有一件合格品，B 表示两件都是不合格品，

$$概率\ P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\dfrac{C_4^2}{C_{10}^2}}{\dfrac{C_4^2+C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}}=\frac{1}{5}，答案是 C.$$

(4) $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，化简后得到，

$P(B)=1-P(A)$，答案是 A.

（5）这是简单的古典概率，算式为 $\frac{3}{2^3}$，或用伯努里公式，$C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$，答案是 B.

3. 设 A，B，C 为三个事件，用 A，B，C 的运算表示下列事件：

（1）A，B，C 中至少有一个发生；

（2）A，B，C 都发生；

（3）A，B，C 都不发生；

（4）A，B，C 至少有两个发生；

（5）A 发生，而 B 与 C 不发生.

解：本题要求熟悉事件的基本运算.

（1）$A+B+C$　　（2）ABC

（3）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$　　（4）$AB+AC+BC$

（5）$A\overline{B}\,\overline{C}$

4. 掷 4 枚硬币，求出现 4 个正面的概率.

解：本题是古典概率的计算. 以 A 表示出现四个正面，基本事件总数是 2^4，而对 A 有利的基本事件只有一个，故：

$$P(A)=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}.$$

5. 一部 4 卷的小说随意放在书架上，求各卷恰好排成自左至右或自右至左的自然顺序的概率.

解：本题是古典概率的计算. 以 A 表示各卷恰好排成自左至右或自右至左的自然顺序，基本事件总数是 $4!$，而对 A 有利的基本事件只有 2 个，故

$$P(A)=\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}.$$

6. 将 E，E，I，N，N，R，T，T 等八个字母随机排成一排，求恰好排出单词 *INTERNET* 的概率.

解：以 A 表示恰好排出单词 *INTERNET* 的事件，基本事件总数是 $8!$，而对 A 有利的基本事件数考虑同一字母的不同位置共有 $2^3=8$ 个，故

$$P(A)=\frac{8}{8!}=\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}.$$

7. 一盒零件有 5 个一等品，3 个二等品，2 个三等品，任取 3 个，求三种等级的零件恰好各取到一个的概率.

解：以 A 表示三种等级的零件恰好各取到一个. 共有 10 个零件，易知

$$P(A)=\frac{C_5^1C_3^1C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{4}.$$

8. 从 4 个正数，6 个负数中任取 4 个数相乘，求乘积为正的概率.

解：以 A 表示乘积为正. 必须取到偶数个负数，所以

$$P(A)=\frac{C_4^4+C_4^2C_6^2+C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{53}{105}.$$

9. 两封信随机投入四个邮筒，求前两个邮筒各有一封信的概率.

解：以 A 表示前两个邮筒各有一封信. 对应有两种情况，所以

$$P(A)=\frac{2}{4^2}=\frac{1}{8}.$$

10. 将 3 个球随机放入 4 个盒子中，求盒子中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率.

解：以 A_i 表示盒子中球的最大个数为 i. A_1 是有 3 个盒子各放一球，A_2 是有一个盒子放了两球，一个盒子放了一球，A_3 是 3 个球全放在某一盒子中，所以

$P(A_1)=\frac{4\times3\times2}{4^3}=\frac{3}{8}$（分子：第 1 球有 4 个选择，第 2 球有 3 个选择，第 3 球有 2 个选择）

$P(A_2)=\frac{4\times3\times1+4\times3\times1+4\times1\times3}{4^3}=\frac{9}{16}$（分子第一项：第 1 球有 4 个选择，第 2 球有 3 个选择，第 3 球与第一球同盒，没有选择）

$$P(A_3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}.$$

11. 甲盒中有 2 个红球，1 个白球. 乙盒中有 2 个白球，1 个红球. 从甲盒中取一个球放入乙盒，再从乙盒中取一球放入甲盒，求甲盒中红白球数量不变的概率.

解：以 A 表示甲盒中红白球数量不变，也就是甲盒中取出的球与乙盒中取出的球是同色的，所以

$$P(A)=\frac{2\times2+1\times3}{3\times4}=\frac{7}{12}.$$

12. 一个盒中有三只球，一红、一白、一黑，取一只后放回去，再取一只后放回去，如此进行直到取得所有颜色的球为止，求取球次数为4次的概率.

解：以 A 表示取球次数为4次. 就是说前3次取球时只取到了两种颜色，比如两次红的，一次白的，这有3种情况，而第4次必须取黑的，由于球的颜色顺序也可以不同，所以

$$P(A)=\frac{P_3^3\times3}{3^4}=\frac{2}{9}.$$

13. 9个人随机排成一排，求指定的3个人排在一起的概率.

解：以 A 表示指定的3个人排在一起，可以将这3个人当作1个人与其他6人排队，但这3人自身也有排队的顺序，所以

$$P(A)=\frac{7!\times3!}{9!}=\frac{1}{12}.$$

14. 9个人随机排成一个圆圈，求指定的两人排在一起的概率.

解：以 A 表示指定的2个人排在一起. 排成圆圈时，如果相对位置不变，可以认为是同一种排法，不妨认为2人中的一个是固定位置的，随机排队时，另一人在其他8个位置是等可能的，而要让两人排在一起，只有两个位置，所以

$$P(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

15. 在10件正品和5件次品组成的产品中，任取3件，求恰好有2件正品的概率.

解：以 A 表示恰好有2件正品，还有一件就是次品，所以

$$P(A)=\frac{C_{10}^2C_5^1}{C_{15}^3}=\frac{45}{91}.$$

注：第4题到第15题都是古典概率的计算，关键在于分析基本事件总数与有关的基本事件数，有时用特别的思路可以更简单一些，如第14题.