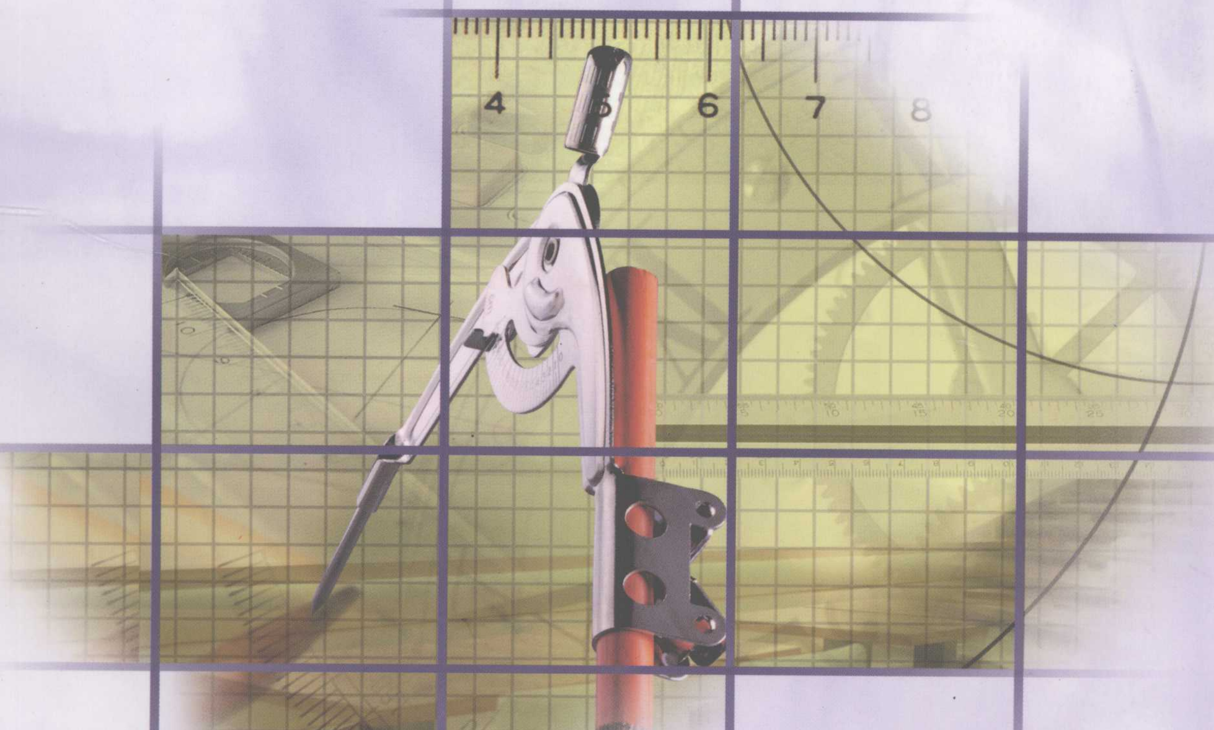
中等职业学校教材试用本

数学

（基础版）

第二册

康士凯　丁百平　主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

中等职业学校教材试用本

SHUXUE

数 学(基础版)

第二册

康士凯 丁百平 主编

高等教育出版社

内容提要

本套教材是根据上海市教委 2005 年最新颁布的《上海市中等职业学校数学课程标准(试用稿)》的精神和要求，参照全国中等职业学校的培养目标，在大量调研了目前实际教学情况的基础上，结合各类中等职业院校数学教学的共性要求编写而成的。

本套教材共 9 册：《数学》(第一册)；《数学习题册》(第一册)；《数学》(第二册)；《数学习题册》(第二册)；《数学(基础版)》(第一册)；《数学习题册(基础版)》(第一册)；《数学(基础版)》(第二册)；《数学习题册(基础版)》(第二册)；《数学教学参考书》。本套教材可供实行学分制的学校或专业使用，按 8 学分(约 136～144 课时)或 12 学分(约 204～216 课时)分别选用适合本专业的课程内容进行教学。

本书为《数学(基础版)》(第二册)，主要内容包括：数系的扩展；平面向量与矩阵；简单多面体和旋转体；直线与圆；数列。

本书可作为各类中等职业学校的数学教材。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学：基础版．第 2 册/康士凯，丁百平主编．—北京：高等教育出版社，2007.1

ISBN 978-7-04-020876-4

Ⅰ．数…　Ⅱ．①康…　②丁…　Ⅲ．数学课—专业学校—教材　Ⅳ．G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 005844 号

责任编辑　徐　东　　封面设计　吴　昊　　责任印制　潘文瑞

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		021-56964871
邮政编码	100011	免费咨询	800-810-0598
总　　机	010-58581000	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
排　　版	南京理工出版信息技术有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	江苏南洋印务集团	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2007 年 1 月第 1 版
印　　张	9.5	印　　次	2007 年 1 月第 1 次
字　　数	210 000	定　　价	14.00 元

物料号　20876—00

出版说明

上海市教育委员会大力推动中等职业教育课程教材改革，于2005年8月出台了《上海市中等职业学校文化基础学科课程标准（试用稿）》（以下简称《课程标准》），并以此为依据进行示范性教材编写的立项工作。高等教育出版社积极配合上海市教委的工作，组织中等职业教育教学专家与经验丰富的上海市职业学校骨干教师，认真学习《课程标准》，领会教材改革精神，深入调查研究上海市中职教育教学现状，反复推敲，形成了教材编写方案，该方案于2005年11月通过了立项评审的答辩。之后，高等教育出版社立项教材编写队伍广泛听取专家与师生的意见和建议，数易其稿，编写了这套上海市中等职业教育课程改革文化基础课教材（包括语文、数学教材及教学参考书、练习册等相关教学辅助用书）。本套教材经上海市中等职业教育课程教材审定委员会审定，准予试用。

本套教材在编写理念、编写形式和教学内容上进行了一些有益的探索：

1. 体现“以就业为导向”的人才培养观。

上海作为国际化大都市，对人才质和量的需求显得尤为迫切。教材编写过程中，我们注重对学生能力的培养，从实用角度帮助学生接受职业道德教育和职业技能训练，提高学生对职业岗位乃至就业大环境的认识水平和适应能力，按就业目标来设定可能的教学内容、设计教学解决方案（包括组织形式和具体方法），力求打造出能满足师生授受双方教学需求的新文本、新载体，从而适应上海地区对高素质技能型人才的需求。

2. 贯彻“因材施教”的原则。

针对上海市中等职业学校学生实际情况，我们根据《课程标准》要求，降低了教学内容的难度，并将较高要求的内容作为拓展内容，供学有余力的同学选学，以期有效减轻学生负担，使学生能够将更多的精力用于与职业教育更密切相关的教学内容上来。另外，我们还编了一套数学基础版教材，涵盖了《上海市中等职业学校数学课程标准

（试用稿）》的必学内容，帮助数学起点低的同学打好基础，不断进步。

3. 编排新颖科学，富有趣味。

教材编写遵循“以学生发展为本”的教育理念，在体例编排上活泼大方，将学练要点、科学常识、精彩点评及学习技巧等小板块合理安排于适当位置，有效利用版面，使学生喜闻乐见，便于他们明确学习目标，有效地检测自己对所学知识的了解程度；同时，也有利于教师各取所宜而采用多种教学方式和教学方法。

4. 提供全程教学解决方案。

上海拥有先进的教育教学资源优势，因此，我们在教材基础上还提供了教学参考书和练习册，并将陆续补充网络教学资源，最终构建起立体化教学服务平台，有利于更好地提高教学效果。

本套教材的编写得到了上海市教委职成教处、上海市教委教研室以及众多中职学校的大力支持，谨此表示诚挚的感谢！书中不足之处恳请广大师生指正，以便不断修订完善。

高等教育出版社

2006 年 7 月

前　言

为了更好地满足上海城市新一轮发展对技术技能型人才的需要，我们根据上海市教育委员会2005年颁布的《上海市中等职业学校数学课程标准（试用稿）》（以下简称《课程标准》）的要求编写了本套数学教材。

在本套教材编写前，我们对全国和上海市中职数学课程的改革和教材的使用情况进行了充分的调研，收集了大量的第一手资料。此外，全体编写人员对《课程标准》的基本理念、设计思路以及数学课程的目标、内容也进行了认真学习。在调研、学习和研讨的基础上，确定了教材的编写理念：

1. 高度关注中职学生数学的学习过程，从问题解决出发构建课程内容。教材针对职业学校学生的学习实际，注重“过程教学”。让学生在实际场景事物中学习，让学生在手脑并用状态下学习，强调学习的过程而不是强调学习的结果，对学生学习的评价也重在过程而不在结论，让学生体验学习过程以及获得技能过程的乐趣。

教材采用由实际问题引出数学概念的编写方式，并选择合适的学习载体，使用浅显亲切的语言，安排适当的学习坡度以贴近学生实际。“问题解决”意识的培养是职业学校教育的重要目标。教材以“问题解决”作为理论支撑是鉴于当前“以就业为导向”的职业教育改革方向。

2. 立足职业教育特色，做到教师好教、学生好学。教材内容的展开从学生的生活实际和职业特点出发，知识的讲授过程遵循“以学生为本”的理念，力求从简选取能够体现《课程标准》基本要求的问题加以阐述，做到整体设计、系列配套，为教师提供完整的教学服务解决方案，让教师好教、学生好学，从而帮助学生掌握基本的数学知识，培养具有一定的文化素养、胜任职业岗位的合格劳动者。

3. 处理好基础和发展、稳定与改革的关系。教材根据《课程标准》的模块组织内容，以《课程标准》中必学单元为基础，帮助学生达到作为一个社会人和职业人应具备的基本学习要求。根据终身教育和学生职业生涯规划的需要，教材通过《课程标准》所规定的选学单元和拓展部分的内容为学生构建发展的平台。

本套教材提倡计算器的全面使用。教材中的课堂练习题的教学形式可丰富多样（如口头、书面、个体操作、小组讨论、集体活动、案例教学等），教师可根据具体情况掌握，以达到较好的实际教学效果。

为适应不同专业、不同类别的中等职业学校的实际需要，也为了方便中等职业学校教学工作的开展，本套教材及其配套教学资源的安排如下：

1. 以《课程标准》为依据，提供两个系列的教材。系列一，《数学》(第一册)和《数学》(第二册)，涵盖《课程标准》的全部内容(包括基础部分和拓展部分的全部内容)；系列二，《数学(基础版)》(第一册)和《数学(基础版)》(第二册)，包括《课程标准》基础部分的全部必学内容和拓展部分的部分专题内容。各校可以根据实际情况选择不同的教材。

2. 各系列教材均配有按章节编排的同步习题册。习题册中的习题分 A(基础题)、B(提高题)两个层次编写，体现分层教学的原则，提供学习的可选择性。

3. 配有提供给教师的教学参考书。教学参考书将更好地帮助教师领会《课程标准》中的课程定位、课程基本理念、课程目标与教学的基本内容、要求，内容包括：知识框图、编写说明、教学建议、习题的参考答案和提示、现代信息技术应用资料等。本书将免费提供给使用本套教材的教师。

4. 供教师和学生使用的数字化课程资源网络平台，陆续提供教学演示文档、教案、试题库、网络课程等。

本教材的编写充分考虑了目前学生的实际状况，下面提供三种教学课时方案的建议，供广大教师参考：

方案一(选用系列一教材)：

开设两学期的数学课程；周课时 6，每学期：6 课时/周×17 周＝102 课时；两学期合计 204 课时。

方案二(选用系列一教材)：

开设三学期的数学课程；周课时 4，每学期：4 课时/周×17 周＝68 课时，三学期合计 204 课时。

方案三(选用系列二教材)：

开设两学期的数学课程；周课时 4，每学期：4 课时/周×17 周＝68 课时；两学期合计 136 课时。

本套教材包括：《数学》(第一册)、《数学》(第二册)、《数学习题册》(第一册)、《数学习题册》(第二册)；《数学(基础版)》(第一册)、《数学(基础版)》(第二册)、《数学习题册(基础版)》(第一册)、《数学习题册(基础版)》(第二册)；《数学教学参考书》。参加本套教材编写的有丁百平、王文琴、王宇华、朱玉华、孙萍、严捷、余俊燕、张紫芳、周智朝、钟丛香、俞建雄、敖文彬、徐荣堂、黄庆昌、康士凯、蒙春荞。其中，第一册教材及配套习题册的副主编为余俊燕和钟丛香，第二册教材及配套习题册的副主编为严捷和俞建雄，全套教材由康士凯、丁百平担任主编。

本套教材的编写得到了上海市教育委员会教学研究室和中国职业技术教育学会教学工作委员会有关领导的热情关心与指导，在此表示衷心的感谢。

限于编者水平，教材中难免存在不妥之处，恳请有关专家和广大职业学校的师生提出宝贵的修改意见。

编 者

2006 年 10 月

目录
Contents

* 为拓展部分的内容

第六章

数系的扩展

还记得吗？小时候，刚开始学数时是通过扳手指进行的，那时你可能只理解整数，慢慢地，当你吃半个西瓜等食品时，你可能理解了分数，当你接触钱币时，你可能理解了小数，在计算正方形对角线的长度时，你接触了无理数．一个人学数的过程恰好是人类将数系扩展的过程．当你在这儿学习复数以后，你是否会想到将数系扩展的新的范畴，比如，反映四维时空的四维数？

人类社会不断地进步，数学及科学技术也会不断地进步．

6.1 复数的概念

数学家简介

祖冲之（429—500），字文远，祖籍范阳（现河北涞水县）．年轻时候没上过学，但经过刻苦勤奋的自学，他在数学、天文历法、机械制造等领域都有卓越的贡献，成为我国南北朝时期一位非常杰出的科学家．

祖冲之对圆周率（π）的研究便是一个突出的事例．他计算出圆周率在 3.141 592 6 ～ 3.141 592 7 之间，在世界数学史上第一次把圆周率推算准确到小数点后七位．在国外直到 1 000 年以后，15 世纪阿拉伯数学家阿尔·卡西计算到小数点后十六位，才打破了祖冲之的记录．所以有人主张把圆周率叫做"祖率"．

6.1.1 数的产生和发展简史

正整数 1，2，3，……是数学之起点，其他所有的数都是从正整数衍生出来的．正整数的实物原型可能是十个手指，否则我们不会采用十进位制．

负整数的引入解决了"小数"不能减"大数"的困难，例如 $1-2=-1$．负整数也是有原型的，欠债不就是负资产吗？所以负整数概念的形成恐怕与人类早期的商业借贷活动有关．

零是数学史上的一大发明，其意义非同小可．首先，零代表"无"，没有"无"何来"有"？因此零是一切数之基础．其次，没有零就没有进位制，没有进位制就难以表示大数，数学就走不了多远．零的特点还表现在其运算功能上，任何数加减零，其值不变；任何数乘以零，得零；任何数除以零，比值无意义，即不存在．

零、正整数和负整数统称为整数．以零为中心，将所有的整数从左到右依次等距排列，然后用一根带方向的水平直线将它们连起来，这就是"数轴"．每个整数对应于数轴上的一个点，这些点以等距离互相分开．你看！负整数和正整数分列左右如雁阵般一字排开，零居中央，颇有王者气概．

分数的引入解决了不能整除的困难，例如 $1\div 3=\frac{1}{3}$．分数当然也有原型，例如三人平分一个西瓜，每人得三分之一．

数轴上相邻两个整数之间可以插入无限多个分数以填充数轴上的空白，数学家一度认为这下子总算把整个数轴填满了．事实上有些数就根本无法以整数或分数来表示，如，已知正方形的边长为 2，要求它的一条对角线长，就无法用整数和分数来表示．而最著名的就是圆周率，分数只能表示其近似值而非准确值．人们将分数化为十进位小数以后，发现有两种情况：一种是有限位小数．例如 $\frac{1}{2}=0.5$；另一种是无限循环小数，例如 $\frac{1}{3}=0.333\,33\cdots$ 两者虽貌似不同，但都包含有限的信息，因为循环部分只是重复原有的，并不包含新的信息．圆周率 π 则根本不同，3.141 592 653 589 793 238 46…既不循环，也无终结，所以包含着无限的信息．想想看！北京图书馆里浩如烟海的藏书所包含的信息虽然极多，但仍是有限的，而圆周

率却包含着无限的信息，怎能不令人惊叹！数学家将像圆周率那样无法用整数或分数来表示的数叫做“无理数”. 自从祖冲之算出圆周率的数值介于“约率”$\frac{22}{7}$和“密率”$\frac{355}{113}$之间以来，一直有人在计算圆周率的更精确数值，最近利用电脑算到了小数点后两百多万位！圆周率本是圆周长与直径的一个确定的比值，但它产生的无穷数值却具有最大的不确定性. 我们不能不为大自然的神奇奥妙而感到惊讶和震撼. 有了无理数以后，原来的整数和分数统称为有理数.

我们把有理数和无理数合并，构成了实数. 这样，数学王国更扩大了，在零这位国王两边排开的阵容就更加威武雄壮了.

对于数的寻求是否到此为止呢？数学家并不满足，继续孜孜以求，寻找尚未发现的新数，果然被他们找到了. 发现的契机是研究一些数的平方根：4 的平方根是 ± 2，这是早就知道的整数，不足为奇；2 的平方根是$\pm\sqrt{2}$，和圆周率类似，也不新鲜. -1 的平方根是什么？这可不好办！大家都知道乘法的符号规则是：正正得正，负负得正，正数负数的平方均为正数，据此-1 的平方根就根本不存在，即方程 $x^2=-1$ 在原来的数集范围内无解. 但不存在的东西可以创造出来！这就是科学的创新精神. 所以，为了使这类问题得到解决，也为了数学自身发展的需要，数的概念需要再一次扩展. 这就是本章所要研究的复数.

6.1.2 复数及有关概念

1. 虚数单位

我们先来考察一元二次方程 $x^2+1=0$ 的解，因为任何实数的平方都不可能是负数，所以在实数范围内，这个方程无解.

为了使此类方程有确定的解，在 16 世纪，数学家引进了一个在实数集中没有的新数，用记号 i 来表示，称之为**虚数单位**.（在本章中，i 均表示虚数单位）并规定：

(1) 它的平方等于-1，即 $i^2=-1$.

(2) 它与实数之间，可以按照实数的运算法则进行四则运算.

在这种规定下，i 可以与实数 b 相乘，其乘积为 bi，0 与 i 相乘，有 $0\cdot i=0$，bi 与实数 a 相加，其和可写成 $a+bi$.

数学家简介

卡尔丹（Girolamo Cardano，1501—1576），意大利医生、数学家，帕多瓦大学医学博士，曾任帕维亚大学和波伦亚大学教授，在数学上有多项建树. 他为了找出和等于 10，乘积等于 40 的两个数，通过解方程

$$x(10-x)=40,$$

求得这两个数分别为 $x_1=5+\sqrt{-15}$，$x_2=5-\sqrt{15}$，从而成为世界第一个使用负数的平方根的数学家.

2. 复数及其分类

以后说到复数 $a+bi$ 时，若不作特殊说明，都有 a、$b\in\mathbf{R}$.

定义 把形如 $a+bi$ 的数叫做**复数**，其中 a、b 都是实数. 一个复数通常用一个字母 z 表示，即 $z=a+bi\ (a、b\in\mathbf{R})$，其中 a、b 分别叫做复数 z 的**实部**、**虚部**. 例如，$-2+\mathrm{i}$，$3+5\mathrm{i}$，$-\sqrt{3}\mathrm{i}$，-2 都是复数，全体复数组成的集合叫做**复数集**，用字母 $\mathbf{C}$ 表示.

例 1 已知四个复数 $z_1=2-3\mathrm{i}$，$z_2=-3$，$z_3=8\mathrm{i}$，$z_4=-\sqrt{2}\mathrm{i}+3$，试分别说出它们的实部与虚部.

解 $z_1=2-3\mathrm{i}$ 的实部是 2，虚部是 -3；

$z_2=-3$ 的实部是 -3，虚部是 0；

$z_3=8\mathrm{i}$ 的实部是 0，虚部是 8；

$z_4=-\sqrt{2}\mathrm{i}+3$ 的实部是 3，虚部是 $-\sqrt{2}$.

容易知道，复数 $z=a+bi$，当 $b=0$ 时，就是实数 a，特别地，当 $a=b=0$ 时，就是实数 0. 当 $b\neq 0$ 时，这个复数也叫做**虚数**，例 1 中 $2-3\mathrm{i}$，$8\mathrm{i}$，$-\sqrt{2}\mathrm{i}+3$ 都是虚数. 特别地，当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，$z=bi$ 又叫做**纯虚数**. 例 1 中的 $8\mathrm{i}$ 就是纯虚数.

显然，实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集，即 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

引进复数以后，数的范围得到了扩展，现在把复数的分类系统列表如下：

你能说出常用数集 $\mathbf{N}^*$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 之间的关系吗？

复数 $a+bi$，当 $b=0$ 时是实数；当 $b\neq 0$ 时是虚数，区分的要点是 b 是否等零.

$$
\text{复数 } a+bi\begin{cases}\text{实数 } a\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}\\\text{虚数 } a+bi\text{——纯虚数 } bi\end{cases}
$$

例 2 当 m 为何实数时，复数 $z=m^2-m-2+(m+1)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数？(2) 纯虚数？

解 (1) 当 $m+1=0$，即 $m=-1$ 时，复数 z 是实数；

(2) 当 $m^2-m-2=0$ 且 $m+1\neq 0$，即 $m=2$ 时，复数 z 是纯虚数.

例 3 设 $m\in\mathbf{R}$，且复数 $(m^2-3m+2)+(m^2-1)\mathrm{i}$ 是实数 0，求 m.

解 当 $m^2-3m+2=0$ 且 $m^2-1=0$ 时，复数 $(m^2-3m+2)+(m^2-1)\mathrm{i}$ 是实数 0.

由 $m^2-3m+2=0$，解得 $m=1$ 或 $m=2$；

由 $m^2-1=0$，解得 $m=1$ 或 $m=-1$.

所以只有当 $m=1$ 时，复数 $(m^2-3m+2)+(m^2-1)\mathrm{i}$ 是实数 0.

3. 复数的相等

如果两个复数的实部相等，虚部也相等，那么我们就说这**两个复数相等**，这就是说，如果 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$，那么

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c，且\ b=d.$$

特别地，$a+b\mathrm{i}=0\Leftrightarrow a=b=0$.

> **思考**
> 若两个复数不全是实数，能比较它们的大小吗？

例 4 设 x、$y\in\mathbf{R}$，且 $(3x+y)+\mathrm{i}=-2+(y-3)\mathrm{i}$，求 x 和 y.

解 由复数相等的定义，得到方程组

$$\begin{cases}3x+y=-2,\\ y-3=1.\end{cases}$$

解方程组，得 $\begin{cases}x=-2,\\ y=4.\end{cases}$

4. 共轭复数

观察两个复数 $1+\mathrm{i}$ 和 $1-\mathrm{i}$，它们的实部相等而虚部互为相反数.

一般地，两个复数，当它们的实部相等而虚部互为相反数时，称这两个复数为**共轭复数**.

复数 z 的共轭复数记作 $\bar{z}$，读作"复数 z 的共轭复数"，即当 $z=a+b\mathrm{i}$ 时，$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，例如：$2\mathrm{i}$ 的共轭复数为 $-2\mathrm{i}$，实数 3 的共轭复数仍为 3.

> 由共轭复数的定义可知，任意一个实数 a 的共轭复数仍是 a 本身.

例 5 分别写出复数 $z_1=-1-3\mathrm{i}$，$z_2=-8\mathrm{i}$，$z_3=-1$，$z_4=2-\mathrm{i}$ 的共轭复数.

解 由共轭复数的定义可知

$$\bar{z}_1=-1+3\mathrm{i}，\bar{z}_2=8\mathrm{i}，\bar{z}_3=-1，\bar{z}_4=2+\mathrm{i}.$$

例 6 已知复数 $(2x+4)+\mathrm{i}$ 和复数 $2-(3-y)\mathrm{i}$ 是共轭复数，求实数 x 和 y 的值.

解 由共轭复数的定义得方程组

$$\begin{cases}2x+4=2,\\ 1=3-y.\end{cases}$$

解这个方程组，得 $x=-1$，$y=2$.

6.1.3 复数的向量表示

1. 复平面

在初中我们所学的平面直角坐标系的横轴和纵轴都是实数轴. 单位都是 1, 在平面直角坐标系内的点与有序实数对是一一对应的, 虽然复数 $a+bi$ 也是由一对有序实数 a 和 b 确定, 但 a 和 b 的单位不同, a 的单位是 1, b 的单位是 i, 所以不能用平面直角坐标系内的点来表示复数. 那么复数如何来表示呢?

复数 $z=a+bi$ 可以用直角坐标平面上的点 Z 来表示, 点 Z 的横坐标是 a, 纵坐标是 b, 如图 6-1 所示.

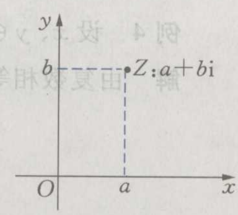


图 6-1

这时, x 轴叫做**实轴**, y 轴(除去原点)叫做**虚轴**, 坐标平面叫做**复平面**. 表示实数的点都在实轴上, 表示纯虚数的点都在虚轴上.

按照这种表示方法, 每一个复数, 都有复平面内唯一的点来表示它; 反过来, 复平面内每一个点都表示唯一的一个复数. 这就是说, 复数与复平面内的点是一一对应的. 比如, 复数 $2-i$, $3i$, $-\frac{3}{2}$ 在复平面内表示的点分别为 $(2, -1)$, $(0, 3)$, $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

2. 复数的向量表示

> **思考**
> 什么是向量? 满足什么条件的向量是位置向量?

设复数 $z=a+bi$ $(a、b\in\mathbf{R})$ 在复平面内对应的点为 $Z(a, b)$, 连结 OZ, 以原点 O 为起点, 点 Z 为终点, 那么向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示复数 $z=a+bi$ (图 6-2). 当点 Z 与点 O 重合时, $\overrightarrow{OZ}$ 就是零向量, 它表示实数 0. 显然, 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是由点 Z 唯一地确定的; 反过来, 点 Z 也可以由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 唯一地确定. 这就是说, 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与复平面内的点 Z 是一一对应的. 因此, 复数 $z=a+bi$ 与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 也是一一对应的. 即复数集 $\mathbf{C}$ 和复平面内所有以原点 O 为起点的向量(位置向量)所组成的集合是一一对应的.

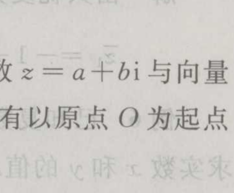


图 6-2

$$\text{复数 } a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{点 } Z(a, b) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{向量 } \overrightarrow{OZ}.$$

例 7 在图 6-3 中, 用复平面内的点和向量分别表示复数:

$$4,\ -i,\ -3+2i,\ -3-2i.$$

解 如图 6-3 所示,

复数 4 用点 $A(4, 0)$ 或向量 $\overrightarrow{OA}$ 表示；

复数 $-\mathrm{i}$ 用点 $B(0, -1)$ 或向量 $\overrightarrow{OB}$ 表示；

复数 $-3+2\mathrm{i}$ 用点 $C(-3, 2)$ 或向量 $\overrightarrow{OC}$ 表示，

复数 $-3-2\mathrm{i}$ 用点 $D(-3, -2)$ 或向量 $\overrightarrow{OD}$ 表示.

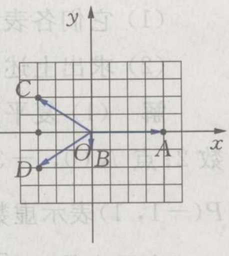


图 6-3

从例 7 可以看出，两个共轭复数 $-3+2\mathrm{i}$ 和 $-3-2\mathrm{i}$ 在复平面内所对应的点 $C(-3, 2)$ 和 $D(-3, -2)$ 是关于实轴 Ox 轴对称的.

一般地，两个共轭复数 z 和 $\bar{z}$，它们在复平面内所对应的点是关于实轴对称的，这就是共轭复数的几何性质.

向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模（即复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 在复平面内所对应的点 $Z(a, b)$ 到坐标原点的距离）叫做**复数 z 的模**（或绝对值），记作 $|z|$，由模的定义可知，

思考

复数的模能小于零吗?

$$|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

当 $b=0$ 时，复数 z 是实数 a，它的模等于 $|a|$（即实数 a 的绝对值）；

当 $z=0$ 时，它的模等于 0. 可见，复数的模的概念是实数的绝对值的概念的延伸.

因为 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，所以

$$|\bar{z}|=|a-b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

因此 $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$，即两个共轭复数的模相等.

在复平面内，以 x 轴正半轴为始边，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线 OZ 为终边的角 θ 叫做复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的**辐角**（图6-4）. 若一个复数的模和辐角都确定了，则这个复数就确定了. 不等于 0 的复数的辐角有无限多个值，这些值中的任意两个相差 2π 的整数倍（或 360° 的整数倍）. 对于复数 0，由于零向量没有确定的方向，所以复数 0 没有确定的辐角.

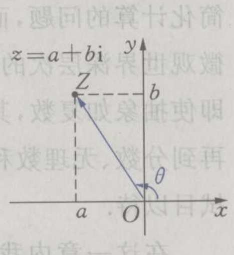


图 6-4

例 8 如图 6-5 所示，在复平面内已知点 $M(2, 0)$、$N(0, -3)$、$P(-1, 1)$、$Q(-\sqrt{3}, -1)$.

(1) 它们各表示什么复数?

(2) 求出上述各复数的模.

解 (1) 复平面内点 $M(2, 0)$ 表示实数 2;点 $N(0, -3)$ 表示纯虚数 $-3i$;点 $P(-1, 1)$ 表示虚数 $-1+i$;点 $Q(-\sqrt{3}, -1)$ 表示虚数 $-\sqrt{3}-i$;

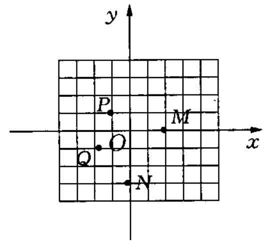


图 6-5

(2) 实数 2 的模 $|2|=\sqrt{2^2+0^2}=2$;

纯虚数 $-3i$ 的模 $|-3i|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$;

虚数 $-1+i$ 的模 $|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$;

虚数 $-\sqrt{3}-i$ 的模 $|-\sqrt{3}-i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$.

例 9 已知 $z_1=3+4i$, $z_2=1+bi\ (b\in\mathbf{R})$, 且 $|z_1|=|z_2|$, 求 z_2.

解 $|z_1|=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$|z_2|=|1+bi|=\sqrt{1^2+b^2}=\sqrt{1+b^2}$.

因为 $|z_1|=|z_2|$,

所以 $\sqrt{1+b^2}=5$, $b^2=24$, 所以 $b=\pm 2\sqrt{6}$,

因此, $z_2=1+2\sqrt{6}i$ 或 $z_2=1-2\sqrt{6}i$.

虚数和复数有没有实际的原型呢?乍看似乎"虚"无飘渺,"复"杂得很.其实虚数和复数都有原型;电工学中利用复数表示交流电,虚数代表虚功,使得电工学计算大为简化.如果说在电工学中引入复数只是为了计算方便,不用它也行,不过麻烦一点而已.那就请看量子力学:量子力学中的波函数必须以复数表示,这不是简化计算的问题,而是反映了微观粒子本性的实质问题;换言之,微观世界深层次的自然规律与复数有密切关系.谁说数学太抽象?即使抽象如复数,其应用也实际得很呢.从正整数到负整数和零,再到分数、无理数和复数,数的发展史是否还有更新的篇章?我们拭目以待.

在这一章内我们不仅要学习复数的基本概念,了解复数的代数表示法及其几何意义,还要学习复数的四则运算,并了解复数代数形式的加、减运算的几何意义.