21世纪高等院校规划教材

振动力学

谢官模 编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

1:2 21世纪高等院校规划教材

振动力学

谢官模 编

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书根据高等院校工程力学专业“振动力学”课程的教学要求，结合多年的教学和科研实践，参考多种现有的与振动有关的教材及专著编写而成。

全书共分5章，内容包括：绪论；单自由度系统的振动；多自由度系统的振动；连续系统的振动；振动的近似计算方法。书内各章均附有相当数量的例题和习题，部分习题还给出了参考答案，便于读者练习查阅。书末还列出了振动力学的典型英文术语，以及一部分外国人译名，以便读者与相关的英文教材和专著对照。

本书可作为高等院校工程力学专业本科生的“振动力学”课程教材，也可作为机械工程、土木工程等专业的本科生和硕士生以及从事与振动相关工作的工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

振动力学 / 谢官模编. —北京：国防工业出版社，2007.3

21世纪高等院校规划教材

ISBN 978-7-118-04990-9

Ⅰ.振… Ⅱ.谢… Ⅲ.工程力学-振动理论-高等学校-教材 Ⅳ.TB123

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第021373号

※

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 19¾ **字数** 456千字

2007年3月第1版第1次印刷 **印数** 1—4000册 **定价** 29.00元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

国防书店：（010）68428422 发行邮购：（010）68414474

发行传真：（010）68411535 发行业务：（010）68472764

前　言

现代工程中对动力问题的分析与研究越来越重要，数值计算技术和动态测量技术的飞速发展也为复杂动力问题的解决提供了有力的工具。作为分析研究动力问题的入门课程，"振动力学"是高等院校工程力学专业的一门重要的学科基础课，也是机械、航空、航海、土建、水利等工程专业的本科生和研究生的一门重要的专业基础课程（虽然在这些专业中课程名称可能并不是振动力学，但基本内容是一致的）。

本书根据工程力学专业"振动力学"课程教学大纲要求，结合多年的教学和科研实践编写而成。全书共分5章。第1章为绪论，介绍振动的基本概念、动力自由度的确定方法、振动微分方程的建立方法，以及振动力学的发展简史；第2章～第4章分别叙述了单自由度系统、多自由度系统、杆件连续系统的自由和强迫振动的精确分析；第5章叙述了振动的若干典型近似计算方法。在此说明，本书参考了书尾所列文献中的相关内容，所引之处不一一详细标注。

本书在内容选材与编排上有以下特点：

（1）在篇幅限制范围内突出重点，重视基础内容，深层次剖析基本概念、基本方法和振动机理。因此本书没有包含非线性振动和随机振动，也没有重复阐述"计算力学"、"有限元法"等课程中的动力有限元法内容。

（2）将机械类专业机械振动课程和结构类专业"结构动力学"课程的基本内容相结合，突出力学基础，适度介绍振动的应用，使本书的覆盖面更广。

（3）注重内容的合理衔接，各章之间、各节之间前后呼应，逻辑关系严谨清晰。弹簧质量系统、轴盘扭振系统、梁结构、刚架结构等经典模型在各章节中反复研究，不断深化。

（4）注意与"高等数学"、"工程数学"、"大学物理"、"基础力学"的相关课程之间的配合与连接，以及必要的重复运用。

（5）书中给出了大量的例题和习题（特别是习题量多），例题和习题取材典型，便于不同专业和层次的读者练习和巩固振动分析的基本方法与技能。

本书可用做高等院校工程力学专业本科生的"振动力学"课程教材，也可作为机械工程、土木工程等工科专业本科生和硕士生，以及从事与振动有关工作的工程技术人员的参考书。

限于编者水平，书中欠缺和不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编　著

2007年1月

目　录

第1章 绪 论

1.1 振动概述与分类

1.1.1 振动概述

振动是指物体在平衡位置(或平均位置)附近来回往复的运动或系统的物理量在其平均值(或平衡值)附近的来回变动。一个人一直从东往西行走,这并不是振动。与一般的非往复性单调运动相比,振动的显著特点就是**振荡性**。

振动是自然界最普遍的现象之一。大至宇宙,小至基本粒子,都在时刻不停地振动。从物理学可知,许多形式的物理现象,例如声、热、电磁、光等都包含振动。在人们的日常生活中,振动现象也屡见不鲜:心脏的跳动、耳膜和声带的振动,都是人体不可缺少的生理功能,人的视觉靠光的刺激,而光本质上也是一种电磁振动;弦的振动、管内气柱的振动是弦式乐器和管式乐器工作的基础,没有空气的振动,就不能传播声音和音乐;电磁振动产生电磁波,没有电磁波就没有广播、电视、雷达等无线电通信,可以说电磁振动是手机等现代通信文明的基础。

在工程技术领域,振动现象也比比皆是。例如,桥梁和建筑物在阵风、冲击波、地震、波浪等激励下的振动,飞行器与船舶在航行中的振动,各种输液管道因管内流体流动诱发的振动,机床与刀具的振动,各种动力机械的振动,控制系统中的自激振动等,不胜枚举。

在许多情况下,振动通常被认为是有害的。振动会影响精密仪器设备的功能,降低加工精度,加剧构件的磨损和疲劳,从而缩短机器和结构物的使用寿命。振动还可能引起结构的大变形破坏,有些桥梁曾因振动而坍塌;飞机机翼和输液管道的颤振往往酿成事故;车、船等交通工具的振动会劣化乘载条件,房屋的过大振动影响居住的舒适性,强烈的振动噪声会形成严重的环境公害。

但是,任何事物都是一分为二的,振动也有其积极有利的一面。前述的日常生活中的许多现象就是利用振动的原理工作的。近些年来,陆续出现了许多利用振动的生产装备和工艺,例如,振动传输、振动筛选、振动研磨、振动抛光、振动沉桩等,它们极大地改善了劳动条件,提高了劳动生产率。可以预期,随着科学研究和生产实践的不断进展,人们对振动过程和机理的认识将日益深化,对振动的利用还会与日俱增。

上述各个不同领域中的振动现象虽然各具特色,但往往有着相似的数学力学描述。正是在这种共性的基础上,有可能建立某种统一的理论来处理各种振动问题。**振动力学**就是这样一门基础学科,它借助刚体力学和变形体力学的许多基本原理和方法、物理学的许多基本原理以及大量的数学工具,探讨各种振动现象的机理,描述和阐明振动的基本力学与物理规律,以便克服振动的消极有害的因素,利用其积极有利的因素,为合理解决实践中遇到的各种振动问题提供理论依据。

1.1.2 振动和外界激励的分类

前面所述的形形色色的振动现象,产生的原因是什么呢?一个振动现象的产生,除了**振动系统**本身的条件(必须有质量和弹性元件,将在 1.2 节中详述)外,还必须有外界激扰(也称**激励**)的作用。这种激励就是系统的输入,系统在外界激励下的**响应**(也称反应)就是输出,两者由系统的振动特性联系起来,可用图 1-1 说明。

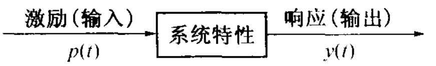

图 1-1

根据图 1-1,通常可将振动问题分为三类:**振动分析**,即已知激励和系统特性求系统响应,为机械和结构的强度或刚度计算提供依据;**系统识别**,即已知激励和响应求系统的物理特性参数,这类问题也可称为**振动系统设计**,即在一定的激励条件下确定系统参数,使响应满足指定的条件;**振动环境预测**,即已知系统特性和响应求激励。实际的振动问题往往错综复杂,可能同时包含识别、分析和设计等几方面的问题。作为一门力学课程,振动力学着重讨论振动分析问题。

振动可以根据研究侧重点的不同,从不同的角度进行分类。

1. 按照系统的物理特点分类

(1) 线性振动:**线性系统**的质量是不变的,弹性恢复力和阻力与运动参数(位移、速度)成线性关系。线性系统产生的振动称为**线性振动**,数学描述为线性微分方程。

(2) 非线性振动:不能简化为线性系统的系统即为**非线性系统**,非线性系统产生的振动就是**非线性振动**,其数学描述为非线性微分方程。本书后面章节将不包含非线性振动内容。

2. 按照对系统的激励的类型分类

(1) **自由振动**:系统受初始激励作用(以后不再受外界激励),也就是在特定的初始位移和(或)初始速度下产生的振动。

(2) **强迫振动**:系统在给定的外界激励作用下产生的振动,这种受外界控制的激励包括**外荷载**和系统的**非匀速支座运动**。

(3) **自激振动**:此时,激励是受系统振动本身控制的,在适当的**反馈**作用下,系统将自动地激起定幅的振动。但是,一旦系统的振动被抑止,激励也就随着消失。

(4) **参数振动**:这种激励方式是通过改变系统的物理特性参数来实现的。

限于篇幅,本书后面章节将不具体介绍自激振动和参数振动。

3. 按照对系统的激励的特点分类

(1) 确定性振动:外界的激励可以用时间的确定性函数来描述,一个**确定性系统**(指系统的物理特性是确定性的,不论它是**常参数系统**,还是**变参数系统**),在受到确定性激励时,其响应也是确定性的,称为**确定性振动**。

常见的确定性激励大致可分为周期激励和冲击激励两大类。

周期激励随时间周期性变化。其中最简单也是最重要的一类就是**简谐激励**,简谐激励随时间的变化规律可用正弦或余弦函数表示。系统在简谐激励作用下,响应为时间的

正弦或余弦函数，这种振动可称为**简谐振动**(当然，不只是简谐激励会使系统产生简谐振动，如在初始激励下或在后面提到的外界冲击激励下，系统也可能做简谐振动)。简谐激励的重要性体现在两方面：研究系统受简谐激励作用的响应为求解其它确定性激励下系统的响应打下了基础；实际工程中确有许多简谐激励作用于振动系统的情况，最典型的例子就是**旋转机械**的转动部分引起的**离心力**荷载，可以如图 1－2 所示的梁上有一台电动机的系统为例来定性说明。

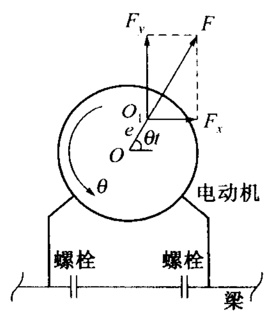

图 1－2

图中 O 点表示电动机的几何中心，由于材质不均匀、制造和安装误差等原因，电动机转动部分的**质量中心**不会与**几何中心** O 点重合，而是处在 O_1 点，两者之间的距离 e 称为**偏心距**。当电动机以匀角速度 ω 转动时，转动部分的**向心加速度** a_n(指向 O 点)为

$$a_n = e\omega^2 \tag{1-1}$$

因此将有离心力作用在电动机上，其大小为

$$F = me\omega^2 \tag{1-2}$$

式中 m 为电动机转动部分的质量。离心力的大小虽保持恒定，但其方向随时间 t 不断在变化，可将离心力分解为水平和竖直分量，即

$$F_x = me\omega^2\cos\omega t, F_y = me\omega^2\sin\omega t \tag{1-3}$$

离心力的水平分量 F_x 将由连接螺栓抗剪来承担(若不计此水平分量对梁轴线的力矩)，而竖直分量 F_y 将通过螺栓传到梁结构上，成为作用在梁结构上的横向简谐激励力。尽管 e 很小，但由于 m 和 ω 很大，此简谐激励力的幅值并不小，对结构的影响是不容忽视的。例如，若 $e = 1\text{mm}$，转动部分质量 $m = 1000\text{kg}$，电动机的转速为 $n = 1000\text{r/min}$，角速度约为 $\omega = 100\text{rad/s}$，则简谐激励力的幅值将为 $F = 10\text{kN}$。特别是那些大型的高速旋转机械，它们正常运转时产生的简谐激励力是比较大的，成为许多振动系统的激励源。

除简谐激励之外的其它周期激励可称为**非简谐周期激励**。对于一个周期函数，满足一些基本要求即可利用**傅里叶级数**展开，表示成无穷多个周期可通约的简谐函数的叠加。因此，对于线性系统，可利用**叠加原理**，将系统在各个简谐激励下的响应叠加起来，即可得到系统对非简谐周期激励的响应。

如果在很短的时间内，激励值急剧增大或急剧减小，这种激励就称为**冲击激励**，例如爆炸或打桩产生的冲击波就属于这一类激励。

(2) 随机振动：**随机激励**不能用时间的确定函数进行描述，是不可重现的，我们不能事先确定某一时刻激励的具体量值。但它们具有一定的统计规律性，可以用概率统计的方法描述。风、地震引起的地面运动、波浪都是随机激励的典型例子。即使是确定性系统，在受到随机激励时，系统的响应也将是随机性的，称为**随机振动**。本书不具体讨论随机振动。

1.2 振动系统模型与动力自由度

1.2.1 振动系统模型

和其它力学学科一样，振动力学也必须借助模型进行研究。模型是针对实际的复杂事物，抓住其本质特点、剔除那些次要因素而得到的。除 1.1 节中提到的激励之外，系统的**惯性**和**弹性**也是产生振动的必要的条件。任何机器、结构物或它们的构件，由于具有质量和弹性，都可能发生振动，它们都是振动系统，简称为振系。**振动系统模型**可从不同的角度分类。

首先，按系统特性参数的分布特点，振动系统模型可分为**离散系统**（或称为**集中参数系统**）和**连续系统**（或称为**分布参数系统**）两大类。

离散系统是由集中参数元件组成的，基本的集中参数元件有**质量**、**弹簧**、**阻尼器**三种，它们分别类似于振荡电路中的电感、电阻和电容元件。质量（包括平动质量和转动惯量）模型只具有惯性；弹簧模型只具有弹性，其本身质量可以忽略不计。**弹性力**和弹性变形成正比的弹簧称为**线性弹簧**；阻尼器模型既不具有惯性，也不具有弹性，它是**耗能元件**，在有**相对运动**时产生**阻力**。阻力与相对速度成正比的阻尼器称为**线性阻尼器**。离散系统的运动在数学上用**常微分方程**描述。

在工程实际中，离散系统有广泛的应用。例如，安装在混凝土基础上的精密机床，为了隔振，一般在基础下面还铺有弹性衬垫。在隔振分析中需要考察机床和基础整体的振动，此时考虑到机床和基础的弹性远比衬垫的弹性小，可略去其弹性，而将机床与基础一起视为一个刚体，起着惯性质量的作用；衬垫的质量比机床和基础的质量小得多，可以略去，弹性衬垫起着弹簧的作用；衬垫本身的内摩擦以及基础与其周围约束之间的摩擦则起着阻尼器的作用。因此在整体隔振分析中，这一系统可简化为如图 1 - 3 所示的集中参数系统。当然，在分析机床本身的振动或机床、工件、刀具系统的振动时，必须考虑机床本身的弹性，那时通过适当的简化，机床本身又可视为一个离散系统。

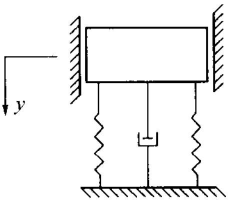

图 1 - 3

连续系统是由弹性体元件组成的，典型的弹性体元件有弦、杆、轴、梁、薄膜、板、壳等，弹性体元件的惯性、弹性与阻力是连续分布的。工程中许多振动系统可取为连续系统模型。例如，涡轮盘通常简化为变厚度的圆板，涡轮叶片通常简化为变截面的梁或壳等。连续系统的振动在数学上用**偏微分方程**描述。

如果一个振动系统的各个特性参量（质量、刚度、阻力系数等）都不随时间而改变，即它们不是时间的显函数，这个系统就称为常参量系统（或**定常系统**）；反之，就称为变参量系统（或**非定常系统**）。常参量系统的振动用常系数微分方程描述，而描述变参量系统的振动则需用变系数微分方程。

1.1 节中已提到了线性系统和非线性系统的条件，在此重述为：一个质量不随位移、速度、加速度等运动参量改变，并且其弹性力和阻尼力都可简化为线性模型的振动系统称为线性系统，凡是不能简化为线性系统的振系都称为非线性系统。线性系统的振动用线

性微分方程描述，而非线性系统的振动则用非线性微分方程描述。

严格地讲，许多实际振动系统的弹性力和阻尼力往往不符合线性模型。但是，在许多情况下，只要振幅不大，按照线性弹簧与线性阻尼器的假设，常可得到足够准确的有用结论。也有不少振动过程，如果不计其中的非线性因素，就无法说明有关的现象，各种自激振动就是最典型的例子。在有的装备中，有时还故意引入或加强一些非线性因素，例如采用各种限位器、继电型控制器等，以达到改进性能和提高工效的目的。在这些情况下，可以按非线性问题来处理。

一个实际的振动系统究竟应该抽象成哪一种模型应该根据具体情况来分析确定。同一个振动系统在不同的情况下可采用不同的模型。例如，强迫振动中阻尼的影响，在远离共振区的情况下可不予考虑，从而能使计算大大简化，但在共振区内，阻尼起着决定性的作用，绝对不能忽略。又如，在计算简支梁的最低阶固有频率时，可假设它的一半质量集中于梁的中点处，由此可得到很准确的结果，但在研究梁受冲击荷载作用下的响应时，上述假设将导致错误的结论。因此，我们抽象出的振动系统模型以及分析此模型所得的结论，必须通过科学实验或生产实践的检验。只有那些符合（或大体上符合）客观实际的振动系统模型，才是正确（或基本正确）的。

1.2.2 动力自由度

在抽象出振动系统的力学模型之后，在振动分析中需要建立系统质量上的惯性力、弹性力、阻尼力与其加速度、速度、位移等运动参量之间的关系，而加速度、速度分别是位移对时间的二阶和一阶偏导数，位移又与质量在任意时刻所处的位置有关，由此就引出了动力自由度的概念。

一个振动系统的动力**自由度**，就是为了确定系统的**全部**质量在任一时刻的位置所需要的**独立**的几何参数（坐标）的数目。严格地说，所有振动系统的质量都是连续分布的，即所有的振动系统都应是连续系统，具有无穷多个自由度。但是如果所有的系统都按**无限自由度**去分析计算，不仅十分困难，而且也没有必要。因此在许多情况下，我们都选择离散系统模型来分析振动问题，也就是将系统简化为**有限自由度系统**。常用的简化方法有以下三种。

1. 集中质量法

把连续分布的质量集中为几个质点，这是最直接、最朴素的一种简化自由度的方法。

例 1－1 如图 1－4 所示，竖直方向的悬臂柱顶端有一集中质量。

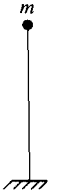

图 1－4

许多工程结构物，例如水塔、烟囱等，在近似研究其整体振动特性时，皆可将连续分布的质量按**静力等效原则**进行集中（可以有多种方式，如全部集中在顶端，或按一定比例集中在顶端和底部），从而简化成此模型。此模型中悬臂柱即为无质量的弹性元件，忽略了阻力，因而没有阻尼器元件。

如果考虑顶部质量在空间的运动，并且计及质量的几何尺寸，则质量将作为一个刚体在空间振动。一个刚体在空间有 6 个自由度，即需用随质心的平动位移 u、v、w 和相对三个正交的质心轴的转角位移 θ_x、θ_y、θ_z 来描述全部质点在任何时刻所处的位置。

如果只考虑质量在平面内的运动，一个刚体在平面内有三个自由度，用随质心的平动

位移 u、v 和相对质心轴的转角位移 θ_z 就能确定所有质点在任一时刻的位置。

如果再忽略质量的体积大小，即将质量作为质点来处理，则仅需用两个平动位移 u、v 就能确定质点在任一时刻的位置，系统的自由度进一步减少为两个。

考虑到细长杆件在横向弯曲时，其轴向变形一般可忽略不计，在此假定下质点仅能在水平方向左右运动，用水平位移 u 就能描述其位置，系统的自由度减至最小，成为一个**单自由度系统**。

从以上分析可见，振动系统的自由度数目并不是一成不变的，而是与所采用的计算假定有关。一般来说，计算假定越少，自由度数目就越多，就越能反映系统实际的动力性能，计算精度就越高，但计算工作量也就愈大。反之，计算假定越多，自由度数目就越少，计算工作就越简便，但计算精度也就越低。对于一个实际振动问题，应该同时兼顾计算精度与计算工作量，在不改变所研究问题的本质并保证足够的计算精确度的前提下，做出合理的假设，尽量减少自由度数目，以简化计算。

例 1 -2 在分析单跨梁的前几阶固有频率时，可将梁的分布质量按照静力等效原则集中到若干截面上；或在近似分析放有若干重物（如电动机）的单跨梁的自由振动特性时，若梁的质量与重物的质量相比很小，可忽略梁的质量，若同时考虑梁的质量，可将其集中到若干个点上。对上述情况可得到图 1 -5 所示的模型，简支梁上有若干个集中质量。

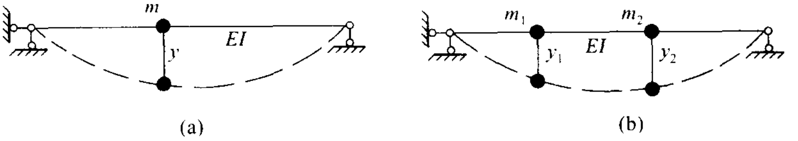

图 1 -5

在图 1 -5(a)中，简支梁上有一个集中质量，无质量的简支梁即为弹性元件。质量在任一时刻的位置可用质量所在梁截面的横向挠度 y 来描述，因此系统的自由度数为 1。在图 1 -5(b)中，简支梁上的两个集中质量 m_1、m_2 在任一时刻的位置可分别用它们所在梁截面的横向挠度 y_1、y_2 来确定，系统的自由度数为 2。

是否振动系统的自由度数目就等于集中质点的数目呢？例 1 -3 将做出回答。

例 1 -3 如图 1 -6 所示，抗弯刚度无穷大的梁上有三个集中质量。

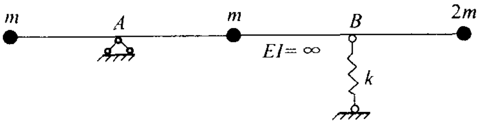

图 1 -6

此系统的三个集中质量随同刚性杆绕 A 轴转动，在小**幅度转动**的情况下，可认为三个质量都只在竖直方向运动。它们在任一时刻的位置仅用刚性杆的转角 α 这一个参数就可确定，故此振动系统的自由度数为 3。可见振动系统的自由度数目与集中质点的数目无关。

例 1 -4 如图 1 -7 所示，一个单跨三层刚架结构做水平振动，横梁的抗弯刚度视为无穷大。

在房屋刚架结构中，一般柱子的质量比横梁（楼面）的质量要小得多，因而可忽略柱的质量，或将柱的质量按一定的比例集中到其上下端所连接的横梁上，这样整个结构的质量都集中在横梁上，三层的柱子即为弹性元件。此结构中又假设三层横梁的抗弯刚度皆为无穷大，不能产生弯曲变形，只能在水平方向产生侧移，因此用三层楼面的水平位移 $x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$ 就可确定结构的全部质量在任一时刻的位置，系统的自由度数目为3。

例 1-5 如图 1-8 所示，单跨两层刚架上有若干集中质量。

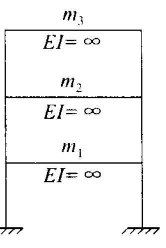

图 1-7

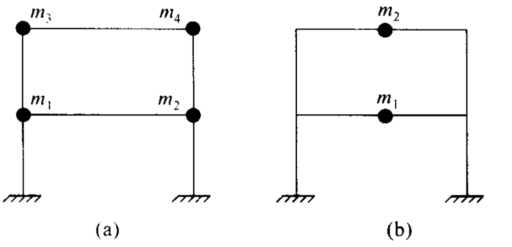

图 1-8

与前述的例题类似，这些质量可能是刚架本身的分布质量按静力等效原则集中所得到的；也可能全部是附加的外部质量，忽略了刚架的质量；也可能是外部的附加质量与集中到这些点上的刚架质量之和。

如果考虑横梁与柱子的轴向变形，则这些质量的位移是互相独立的，每个质点有两个自由度，系统的自由度数目就等于集中质点数目的2倍，即图 1-8(a) 系统的自由度为8，图 1-8(b) 系统的自由度为4。

如果不计所有杆件的轴向变形，在图 1-8(a) 的情况下，第一层横梁上的集中质量 m_1、m_2 只能产生水平位移，并且它们的水平位移应该相等，则用此水平位移 $x_1(t)$ 就能描述它们在任一时刻的位置。同理，第二层横梁上的集中质量 m_3、m_4 在任一时刻的位置，只需用它们的相同的水平位移 $x_2(t)$ 就可确定。因此系统的自由度为2；在图 1-8(b) 的情况下，集中质量 m_1、m_2 在任一时刻的位置，必须分别用它们所在横梁截面的水平和竖向位移才能确定，因此系统的自由度为4。

对于比较复杂的刚架类结构振动系统，还可用**结构力学**位移法中附加链杆的方式来确定动力自由度：将结构中所有的刚节点（包括固定支座）都改为铰节点，然后对此铰接体系附加链杆，使之刚好变为**几何不变体系**，则所附加的链杆数目就是原刚架系统的节点独立线位移数，再由系统的节点独立线位移情况确定动力自由度数目。

例 1-6 如图 1-9 所示的振动系统，在考虑定滑轮质量与不计定滑轮质量的情况分别确定系统的自由度。

一般来说，机械类振动系统中的变形体杆件比结构类振动系统中少，弹性元件比较明显，自由度的确定相对容易一些。

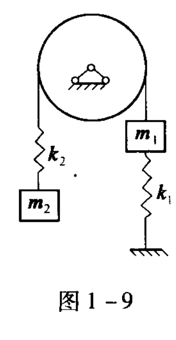

图 1-9

本系统中若不计定滑轮的质量，则两个集中质量 m_1、m_2 在任一时刻的位置可分别用它们在竖直方向的位移 $y_1(t)$、$y_2(t)$ 来确定，系统的自由度为2；若考虑定滑轮的质量，由于定滑轮做刚体定轴转动，只需用其转过的角度 θ 就能描述其上所有质点在任何时刻的位置。而在绳子

不打滑的前提下，转角 θ 就等于集中质量 m_1 的竖向位移 $y_1(t)$ 除以定滑轮的半径，故系统的自由度数目与不计定滑轮质量的情况相同，仍然为 2。

2. 广义坐标法

与集中质量法采用真实的物理坐标的做法不同，广义坐标法是将质量连续分布的振动系统的位移表达成满足位移边界条件的**基函数**的线性组合，这些组合系数就称为**广义坐标**。如对长为 l、质量连续分布的简支梁，设在 t 时刻 x 点的位移为 $y(x,t)$，可将它表示为

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \tag{1-4}$$

式中：$\sin \frac{i\pi x}{l}$ 为基函数，显然满足梁的位移边界条件；$a_i(t)$ 为待定的组合系数即广义坐标，若求得各个广义坐标 $a_i(t)$，则 $y(x,t)$ 即可确定。在一般情况下，只需用前面有限的 n 项叠加就有足够的精度，即

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \tag{1-5}$$

这样，一个无限自由度的连续系统就通过 n 个广义坐标，转化为一个 n 自由度系统，第 5 章中介绍的里兹法就是这种广义坐标法的一种。

3. 有限单元法

有限单元法是求解偏微分方程的一种通用的近似方法，当然也能用来近似求解振动问题。它将实际振动系统用有限个仅在节点处相互连接的单元所组成的离散系统来代替，对每个单元定义插值函数（前面的广义坐标法是在整个求解域上定义基函数），用节点的位移来表示单元内任一点的位移，然后叠加每个单元在各个相应节点的贡献，从而建立系统的求解方程。这样，一个无限自由度系统的振动问题，就转化为以节点位移为自由度的有限自由度振动问题。

1.3 振动运动方程的建立方法

确定动力自由度后，建立振动**运动方程**是一项非常重要的基础性工作。一般来说，振动研究包括建立运动方程、求解运动方程、分析求得的解这三个有机联系的阶段，建立运动方程是后两个阶段的基础。

建立运动方程有多种方法，这些方法可以分为两大类：一是基于**牛顿第二定律**的动静法，也可称为**达朗贝尔原理**方法；二是基于**能量**描述与**变分**方法的**拉格朗日方程**方法和**哈密尔顿原理**方法。关于达朗贝尔原理、拉格朗日方程以及哈密尔顿原理的详细推证，请读者参阅《**理论力学**》和《**分析力学**》的有关教材与论著，限于篇幅，本节只做扼要的介绍。

1.3.1 动静法

以单自由度系统（为了便于说明）为例，根据牛顿第二定律，质点上所有力（包括弹性**恢复力**、阻力、**约束反力**、给定的外载荷等）的矢量和等于其惯性质量与其加速度矢量

之积

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\boldsymbol{a} \tag{1-6}$$

上式可改写为

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i + (-m\boldsymbol{a}) = 0 \tag{1-7}$$

如果引入**惯性力**(其大小等于质点质量与加速度大小的乘积,方向与质点加速度方向相反)的概念,则式(1-7)表明,作用在质量上的所有实际存在的力的合力同与加速度方向相反的惯性力($-m\boldsymbol{a}$)平衡。换句话说,在质量上添加假想的惯性力($-m\boldsymbol{a}$)后,一个**本质上**的动力学问题就变成一个**形式上**的静力学平衡问题,只要将质点上实际存在的力和假想的惯性力分别用自由度坐标及其导数来表示,通过列**静力平衡方程**即可得到质点的运动微分方程。这种处理方法称为动静法,它不只是牛顿第二定律方程的简单的数学变形,而是利用"动"与"静"的辨证关系,实现了处理思想和方法上的改变。由于我们对静力学的平衡方程比较熟悉,并且还可利用静力学中力系的简化理论对复杂情况的惯性力进行简化,用动静法建立系统(特别是比较复杂的振动系统)的振动方程比直接利用牛顿第二定律方便。

上述动静法虽然是从单个质点情况引出的,但它具有一般性,适用于任意自由度数目的振动系统,也适用于有转动自由度的振动系统。具体利用动静法建立振动方程时,又有**刚度法**和**柔度法**两种具体形式,将分别在第2章和第3章进行详细的介绍。

由于动静法涉及力或力矩与速度、加速度等运动量之间的矢量关系,而且引入了那些我们不必知道的未知约束反力,对于某些比较复杂的振动系统,可能比较烦琐。在这些情况下,我们可以采用分析力学中的拉格朗日方程和哈密尔顿原理来建立振动方程,它们都是从能量的观点出发,先把系统的**动能**、**势能**和**功**等标量形式的物理量表达为自由度坐标及其导数的函数,然后从**动力学普遍方程**(在静力平衡的基础上建立**虚位移原理**,再应用达朗贝尔原理将它推广到动力学问题而得到)来导出的。

1.3.2 拉格朗日方程方法

对系统的运动在几何位置上的限制称为**约束**,可通过**约束方程**来描述。在实际情况中,系统受到的约束是多种多样的。系统最终的约束方程中若只含坐标本身和常数项,这种约束称为**定常约束**,若显含时间 t,则称为**非定常约束**,这两类约束通常称为**完整约束**。

对于具有完整约束的质点系,拉格朗日第二类方程(通常简称为拉格朗日方程)为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, j = 1,2,\ldots,n \tag{1-8}$$

式中:q_j 为系统的第 j 个广义坐标(自由度坐标);T 为系统的动能,对于定常的完整约束,动能仅与速度有关,与位移无关,是速度分量的二次齐次函数;Q_j 为作用于系统的所有主动力关于广义坐标 q_j 的**广义力**,可用**虚功原理**求出。

当系统为**保守系统**,即主动力为**有势力**时,广义力可表示为