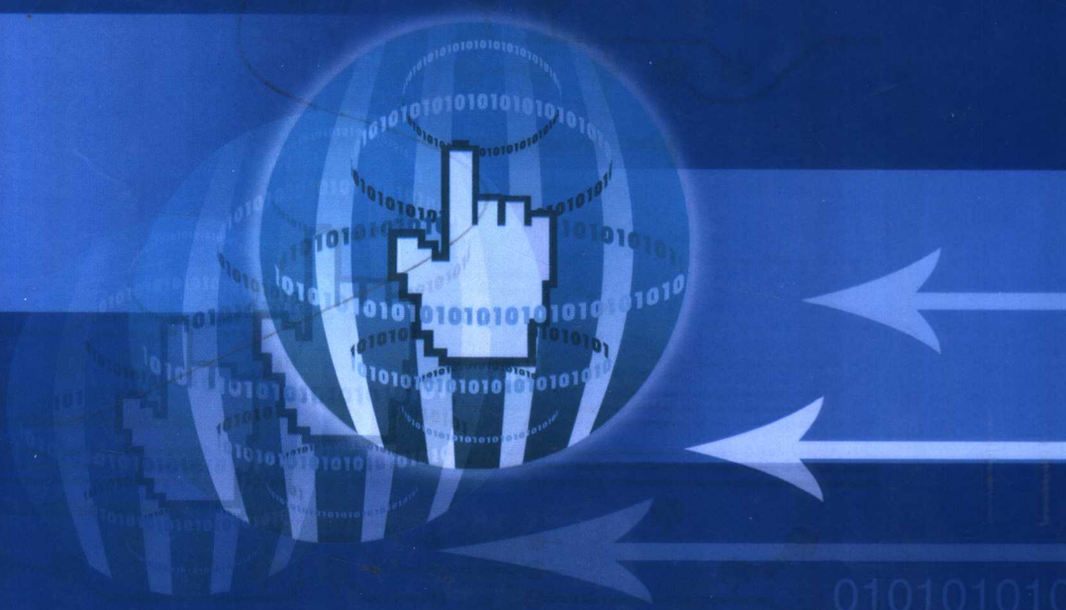
数字信号处理

学习指导与考研辅导

阙大顺　郭志强



武汉理工大学出版社

数字信号处理
学习指导与考研辅导

阙大顺　郭志强

武汉理工大学出版社
·武　汉·

内 容 简 介

本书为本科数字信号处理课程的学习指导和考研辅导书。全书分为两大部分，共 8 章。前 7 章为数字信号处理课程经典内容的学习总结、基本要求、重点和难点学习指导、习题精解及 MATLAB 实现等，其中包括离散时间系统的时域分析、频域分析、Z 变换、离散傅里叶变换及其快速算法、数字滤波器的基本网络结构、IIR 和 FIR 滤波器的设计理论和设计方法等。第 8 章为硕士研究生人学考试数字信号处理模拟试题及解答，给出了 10 套数字信号处理考研模拟试题及其详细解答。本书将保持更新考研模拟试题及其详细解答。

本书强调数字信号处理学习内容的指导、习题精解和考研辅导，全书论述简明，重点突出。本书可作为大学生本科有关专业的教材辅导，也可供考研及有关科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理学习指导与考研辅导/阙大顺，郭志强主编. —武汉：武汉理工大学出版社，2007.6

ISBN 978-7-5629-2560-6

Ⅰ. 数… Ⅱ. ① 阙… ② 郭… Ⅲ. 数字信号-信号处理-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 086032 号

出版发行：武汉理工大学出版社
武汉市武昌珞狮路 122 号　邮编：430070
http://www.techbook.com.cn
E-mail：wutpbook@sohu.com；huangchun@whut.edu.cn；wutpbailh@163.com

经 销 者：各地新华书店
印 刷 者：武汉理工大印刷厂
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：10
字　　数：256 千字
版　　次：2007 年 6 月第 1 版
印　　次：2007 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000 册
定　　价：19.00 元

前　言

本书是武汉理工大学刘泉教授主编的“信息与电子学科百本精品教材”——《数字信号处理原理与实现》的学习指导书和习题解答，可与教材配套使用，也可单独作为高等学校数字信号处理课程的教学与学习参考书，同时也可作为硕士研究生入学考试的考研辅导资料。

数字信号处理是一门理论和技术发展十分迅速、应用非常广泛的学科。本科学生主要学习数字信号处理的基础知识和基本理论，为后续专业课程的学习和进一步研究数字信号处理理论与技术实现打下良好的基础。同时，数字信号处理也是一门理论与实践紧密结合的学科，做大量典型的习题有助于学习者加深理解和巩固所学的基本理论知识，有助于提高分析和解决实际问题的能力。

全书分为两大部分，共8章。前7章以数字信号处理的基本理论为主线，按照基本要求、重点和难点学习指导、典型习题的详细解答三个部分编写。具体内容包括：离散时间信号与系统的时域分析、频域分析和 Z 变换、离散傅里叶变换及其快速算法、数字滤波器的基本网络结构、IIR 和 FIR 数字滤波器的设计理论和设计方法等，在习题解答部分注重了 MATLAB 在数字信号处理中的应用。第8章给出了10套考研模拟试题及其详细解答，对数字信号处理的学习者是一个很好的提高机遇，也为准备考研的学生提供一定的指导和帮助。

本书由武汉理工大学阙大顺和郭志强担任主编。武汉理工大学刘泉教授担任主审。全书由阙大顺担任统稿，郭志强编写了第1、2、3、4章的习题详解，其余章节由阙大顺编写。

本书是在刘泉教授的大力倡导和支持下完成的，刘泉教授审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见。编者指导的硕士研究生史留成、岳鹏等编写了计算机程序并绘制了书中的插图。在本书的出版过程中，得到了武汉理工大学出版社的热情支持。借此机会谨向以上同志表示诚挚的谢意。编写过程中，参阅了许多参考书，这里谨向有关作者表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免出现疏漏和不当之处，恳请广大读者谅解和指正。

作　者

2007年3月

目　　录

1　时域离散时间信号与系统 ………………………………………………… (1)
1.1　基本要求 ………………………………………………………………… (1)
1.2　重点、难点学习指导……………………………………………………… (1)
1.2.1　连续时间信号的采样 ……………………………………………… (1)
1.2.2　离散时间信号序列 ………………………………………………… (2)
1.2.3　线性非移变系统 …………………………………………………… (3)
1.2.4　线性常系数差分方程 ……………………………………………… (4)
1.3　习题详解 ………………………………………………………………… (5)
2　离散时间信号与系统的频域分析………………………………………… (14)
2.1　基本要求………………………………………………………………… (14)
2.2　重点、难点学习指导 …………………………………………………… (14)
2.2.1　序列的傅里叶变换……………………………………………… (14)
2.2.2　序列的 Z 变换 …………………………………………………… (15)
2.2.3　Z 变换的基本性质和定理………………………………………… (16)
2.2.4　逆 Z 变换 ………………………………………………………… (17)
2.2.5　Z 变换与傅里叶变换、拉氏变换的关系 ………………………… (17)
2.2.6　系统函数与频率响应……………………………………………… (18)
2.3　习题详解………………………………………………………………… (19)
3　离散傅里叶变换(DFT) ………………………………………………… (35)
3.1　基本要求………………………………………………………………… (35)
3.2　重点、难点学习指导 …………………………………………………… (35)
3.2.1　傅里叶变换的几种可能形式……………………………………… (35)
3.2.2　离散傅里叶级数(DFS) …………………………………………… (36)
3.2.3　离散傅里叶变换(DFT) …………………………………………… (36)
3.2.4　离散傅里叶变换的基本性质……………………………………… (37)
3.2.5　频率取样…………………………………………………………… (38)
3.3　习题详解………………………………………………………………… (38)
4　快速傅里叶变换(FFT)………………………………………………… (45)
4.1　基本要求………………………………………………………………… (45)
4.2　重点、难点学习指导 …………………………………………………… (45)
4.2.1　按时间抽选的基-2FFT 算法(DIT-FFT) ………………………… (45)
4.2.2　按频率抽选的基-2FFT 算法(DIF-FFT) ………………………… (46)
4.2.3　离散傅里叶反变换的快速算法(IFFT) ………………………… (47)
4.2.4　N 为复合数的 FFT 算法 ………………………………………… (47)

4.2.5　实序列的 FFT 算法 …… (48)
4.2.6　快速傅里叶变换的应用 …… (48)
4.3　习题详解 …… (49)
5　数字滤波器的基本网络结构 …… (56)
5.1　基本要求 …… (56)
5.2　重点、难点学习指导 …… (56)
5.2.1　数字滤波器结构的表示方法 …… (56)
5.2.2　无限长冲激响应(IIR)滤波器的基本网络结构 …… (57)
5.2.3　有限长冲激响应(FIR)滤波器的基本网络结构 …… (58)
5.3　习题详解 …… (60)
6　无限长冲激响应(IIR)滤波器的设计方法 …… (68)
6.1　基本要求 …… (68)
6.2　重点、难点学习指导 …… (68)
6.2.1　一般数字滤波器的设计方法概述 …… (68)
6.2.2　模拟滤波器的设计方法简介 …… (69)
6.2.3　用冲激响应不变法设计 IIR 数字低通滤波器 …… (70)
6.2.4　用双线性变换法设计 IIR 数字低通滤波器 …… (72)
6.2.5　IIR 数字滤波器的频率变换设计方法 …… (72)
6.3　习题详解 …… (73)
7　有限长冲激响应(FIR)滤波器的设计方法 …… (89)
7.1　基本要求 …… (89)
7.2　重点、难点学习指导 …… (89)
7.2.1　线性相位 FIR 滤波器的特点 …… (89)
7.2.2　利用窗函数法设计 FIR 滤波器 …… (90)
7.2.3　利用频率取样法设计 FIR 滤波器 …… (92)
7.2.4　IIR 数字滤波器与 FIR 数字滤波器的比较 …… (92)
7.3　习题详解 …… (93)
8　硕士研究生入学考试数字信号处理模拟试题及解答 …… (108)
试题 1 及解答 …… (108)
试题 2 及解答 …… (112)
试题 3 及解答 …… (116)
试题 4 及解答 …… (120)
试题 5 及解答 …… (125)
试题 6 及解答 …… (128)
试题 7 及解答 …… (133)
试题 8 及解答 …… (138)
试题 9 及解答 …… (143)
试题 10 及解答 …… (146)
参考文献 …… (151)

1　时域离散时间信号与系统

1.1　基本要求

通过本章的学习，应该了解数字信号处理的学科内容、组成结构与基本实现方法；理解和掌握离散时间信号序列的时域运算方法和线性常系数差分方程的求解方法；重点掌握连续时间信号的采样定理及其相关应用，以及离散系统的线性、非移变、稳定和因果特性。

1.2　重点、难点学习指导

1.2.1　连续时间信号的采样

1.2.1.1　信号的采样

(1) 离散时间信号通常是由连续时间信号经周期采样得到的。理想采样模型是实际采样的一种科学的本质抽象，同时可使数学推导得到简化，其比较如图 1.1 所示。

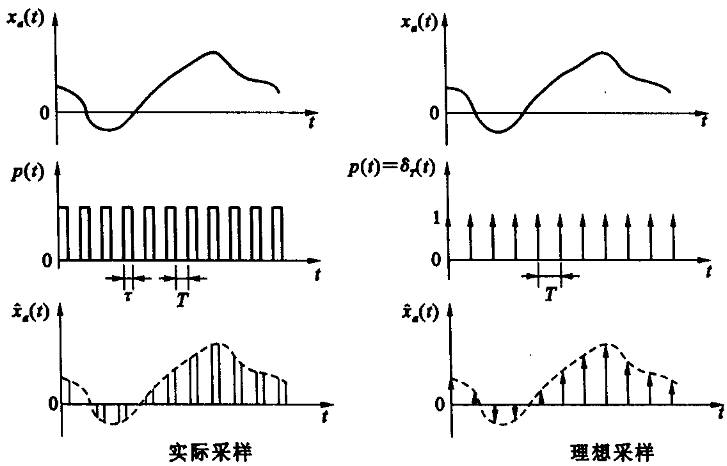


图 1.1　连续时间信号的实际采样和理想采样

(2) 理想采样脉冲序列 $p(t)$ 为冲激函数序列 $\delta_T(t)$，即

$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \tag{1.1}$$

则理想采样输出 $\hat{x}_a(t)$ 可表示为

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) \tag{1.2}$$

1.2.1.2 采样定理

(1) 理想采样信号的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是模拟信号频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓，延拓的周期为采样角频率 $\Omega_s=2\pi f_s$，如图 1.2 所示。

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jr\Omega_s) \tag{1.3}$$

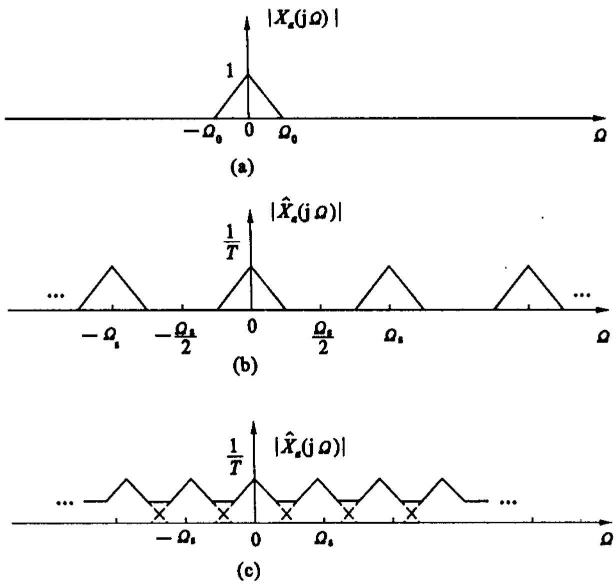


图 1.2 理想采样信号的频谱

(2) 由图 1.2 分析可知，在信号 $x_a(t)$ 的频带受限的情况下，要使采样后能够不失真地还原出原信号，则采样频率应大于或等于信号最高频率 Ω_0 的两倍，即

$$\Omega_s\geqslant 2\Omega_0 \tag{1.4}$$

此即奈奎斯特(Nyquist)采样定理。采样频率的一半 $\Omega_s/2$ 称为折叠频率，信号最高频率两倍的采样频率(即 $\Omega_s=2\Omega_0$)称为奈奎斯特频率。当采样频率不满足式(1.4)时，周期延拓后的频谱会产生"混叠"现象。

1.2.1.3 信号的恢复

如果采样信号的频谱不存在混叠，可让采样信号通过一个截止频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器来提取基带频谱，可按采样内插公式从采样信号 $x_a(nT)$ 恢复原信号 $x_a(t)$。

1.2.2 离散时间信号序列

1.2.2.1 序列及其表示

(1) 离散时间信号是指在离散时间变量 $t=t_k$(k 为整数)时有定义的信号。若它是从连续时间信号均匀抽样得到的，则在 $t=nT$(T 为抽样周期，n 为整数)时刻的信号值定义为离散信号值，即

$$x_a(t)\big|_{t=nT}=x_a(nT)=x(n) \tag{1.5}$$

通常把在整个 n 定义域内 $x(n)$ 的集合构成的一组有序数列，称为数字序列或序列。

(2) 序列的表示方法有集合表示、闭合式表达形式及图形表示等，在分析离散时间信号问

题时均经常使用。

1.2.2.2 常用的典型序列

(1) 常用序列有单位取样序列 $\delta(n)$、单位阶跃序列 $u(n)$、矩形序列 $R_N(n)$、实指数序列 $a^n u(n)$、正弦序列 $A\sin(\omega n+\varphi)$、复指数序列 $e^{(\sigma+j\omega)n}$ 或 $e^{j\omega n}$、周期序列等。牢固掌握这些序列的定义、图形表示及相互关系是数字信号处理课程学习的基础。

(2) 分析上述序列之间的关系，如 $\delta(n)$ 与 $u(n)$ 之间的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \tag{1.6}$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) \tag{1.7}$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-k) \tag{1.8}$$

若结合后续内容的学习，单位采样响应 $h(n)$ 和单位阶跃响应 $s(n)$ 之间也有类似的关系。

(3) 正弦序列和复指数序列的周期特性。当 $\frac{2\pi}{\omega}$(ω 为数字频率)为有理数时，为周期序列，否则为非周期序列。

1.2.2.3 序列的运算

(1) 序列 $x(n)$ 作为自变量 n 的函数可以做各种运算，这些运算是信号与信息处理中经常使用的处理方法。常用且重要的运算有序列的相加、相乘、数乘、位移、反褶、差分、累加、序列重排、卷积和、相关和求能量等。

(2) 序列运算的几何意义、物理意义和作用。如累加运算 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ 相当于一个数字积分器，卷积和运算可用来求解系统的零状态响应，对序列进行压缩或延伸等重新排列运算将对其频谱产生影响。

(3) 任意序列都可以表示为单位取样序列 $\delta(n)$ 的移位加权和，即

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{1.9}$$

1.2.3 线性非移变系统

离散时间系统是将输入序列变换成需要的输出序列的一种系统。

1.2.3.1 线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统。其一般表达式为

$$\sum_{i=1}^{N} a_i y_i(n) = T\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(n)\right] \tag{1.10}$$

1.2.3.2 非移变系统

若系统的响应与输入信号施加于系统的时刻无关，则称该系统为非移变(或非时变)系统。若 $T[x(n)]=y(n)$，则

$$T[x(n-k)] = y(n-k) \tag{1.11}$$

1.2.3.3 线性非移变系统

(1) 一个既满足叠加原理，又满足非移变条件的系统称为线性非移变系统，简称 LSI 系统。

(2) 线性非移变系统的卷积和表达式为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \tag{1.12}$$

(3) 线性非移变系统满足交换律、结合律和分配律等性质。

1.2.3.4 稳定系统

(1) 稳定系统是指对于每个有界输入 $x(n)$，都产生有界输出 $y(n)$的系统，即所谓 BIBO 系统。

(2) 稳定系统的判断：

① 如果 $|x(n)| \leqslant M$(M 为正常数)，有 $|y(n)| < +\infty$。

② LSI 系统稳定的充要条件是单位取样响应绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty \tag{1.13}$$

③ 利用系统函数的极点分布确定系统的稳定性。

1.2.3.5 因果系统

(1) 因果系统是指输出的变化不领先于输入的变化的系统，即因果系统是指某时刻的输出只取决于此时刻和此时刻以前的输入的系统。

(2) 因果系统的判断：

① $n=n_0$ 的输出 $y(n_0)$只取决于 $n \leqslant n_0$ 的输入 $x(n)|_{n\leqslant n_0}$。

② LSI 系统因果的充要条件是

$$h(n) = 0, n < 0 \tag{1.14}$$

③ 利用系统函数的极点分布确定系统的因果性。

1.2.4 线性常系数差分方程

一个 N 阶线性常系数差分方程的输入输出通常表示为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \tag{1.15}$$

1.2.4.1 线性常系数差分方程的求解

求解差分方程的基本方法有时域(序列域)求解法和变换域求解法，概括为以下四种方法。

(1) 经典解法。这种方法类似于连续时间系统中求解微分方程的方法，它包括求齐次解与特解，再由边界条件确定待定系数。

(2) 递推解法。递推解法又称迭代法，该方法比较简单，且适合用计算机求解，但一般情况下只能得到数值解，特别是对于阶数较高的差分方程更不容易得到闭合形式(公式)解答。

(3) 卷积和计算法。这种方法用于系统初始状态为零时的求解，一般不直接求解差分方程，而是先由差分方程求出系统的单位取样响应，再与已知的输入序列进行卷积运算，得到系统的输出，即零状态响应。

(4) 变换域方法。这种方法与连续时间系统的拉普拉斯变换法类似，是将差分方程变换到 Z 域进行求解，该方法简便有效。

1.2.4.2 用差分方程表示滤波器系统

差分方程可用来描述信号处理中常用的滤波器系统，通常系统包括加法、乘法和延迟 3 种

基本运算。由差分方程可以得到系统的框图和流图结构。

离散递归系统，其单位冲激响应是无限长的，这类系统也称为无限冲激响应系统，简称为 IIR 系统或 IIR 数字滤波器。离散非递归系统的冲激响应长度是有限的，故称之为有限冲激响应系统，简称为 FIR 系统或 FIR 数字滤波器。

1.3 习题详解

1-1 给定离散信号

$$x(n)=\begin{cases}2n+5, & -4\leqslant n\leqslant -1\\ 6, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 画出序列 $x(n)$ 的波形，并标出各序列值；

(2) 试用延迟的单位冲激序列及其加权和表示序列 $x(n)$；

(3) 试分别画出序列 $x_1(n)=2x(n-2)$ 和序列 $x_2(n)=x(2-n)$ 的波形。

解 (1) $x(n)$ 的波形如图 1.3 所示。

(2) $x(n)=-3\delta(n+4)-\delta(n+3)+\delta(n+2)+3\delta(n+1)+6\delta(n)+6\delta(n-1)+6\delta(n-2)+6\delta(n-3)+6\delta(n-4)$

(3) $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的波形分别如图 1.4 和图 1.5 所示。

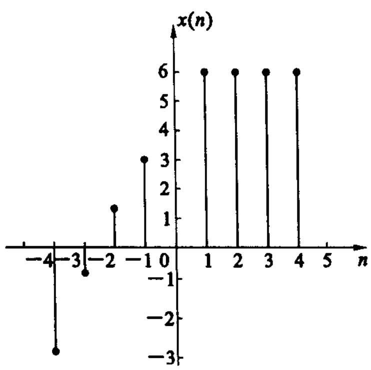


图 1.3

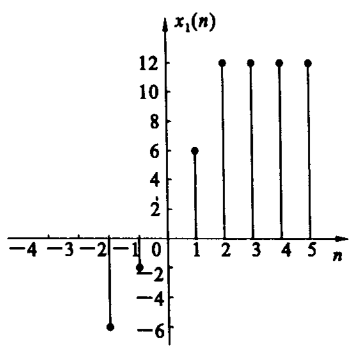


图 1.4

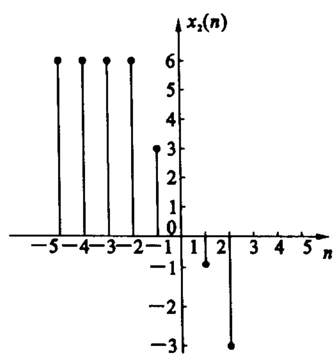


图 1.5

1-2 判断下面的序列是否是周期序列，若是周期的，确定其周期。

(1) $x(n)=A\cos\left(\frac{5\pi}{8}n+\frac{\pi}{6}\right)$，$A$ 为常数　　(2) $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{8}-\pi\right)}$

解 (1) 因为 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{5}{8}\pi}=\frac{16}{5}$ 为有理数，所以 $x(n)$ 是以 16 为周期的周期序列。

(2) 因为 $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{8}-\pi\right)}=\cos\left(\frac{n}{8}-\pi\right)+\mathrm{j}\sin\left(\frac{n}{8}-\pi\right)$，而 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{8}}=16\pi$ 为无理数，所以此序列是非周期序列。

1-3 已知线性非移变系统的输入为 $x(n)$，系统的单位取样响应为 $h(n)$，试求系统的输出 $y(n)$，并画图。

(1) $x(n)=\delta(n), h(n)=R_5(n)$　　(2) $x(n)=u(n), h(n)=u(n)$

(3) $x(n)=\delta(n-2), h(n)=0.5^n R_3(n)$　　(4) $x(n)=2^n u(-n-1), h(n)=0.5^n u(n)$

解　(1) $y(n)=\delta(n) * R_5(n)=R_5(n)$，输出 $y(n)$ 如图 1.6 所示。

(2) $$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)u(n-m)=\sum_{m=0}^{n} u(n-m)\sum_{m=0}^{n} u(n-m)$$

$$=u(n)+u(n-1)+\cdots+u(0)$$，输出 $y(n)$ 如图 1.7 所示。

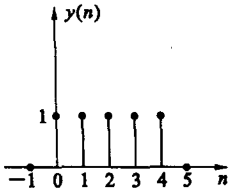


图 1.6

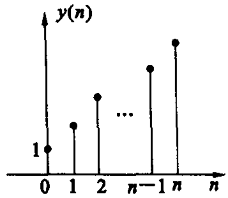


图 1.7

(3) $y(n)=\delta(n-2) * 0.5^n R_3(n)=0.5^{n-2} R_3(n-2)$，输出 $y(n)$ 如图 1.8 所示。

(4) 因为 $y(n)=2^n u(-n-1) * 0.5^n u(n)$

当 $n \geqslant 0$ 时，$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{-n} 0.5^{n-m} 2^m=\frac{4}{3} \times 2^n \sum_{m=-\infty}^{-1} 0.5^{n-m} 2^m=\frac{1}{3} \times 2^{-n}$

当 $n \leqslant -1$ 时，$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{-n} 0.5^{n-m} 2^m=\frac{4}{3} \times 2^n$

输出 $y(n)$ 如图 1.9 所示。

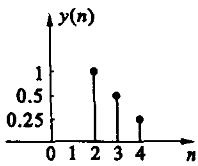


图 1.8

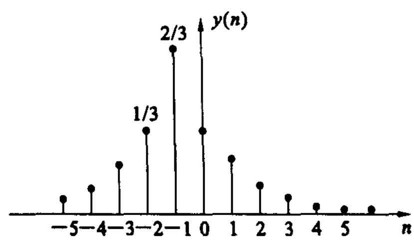


图 1.9

1-4　已知一个线性非移变系统的单位采样响应为 $h(n)=a^{-n}u(-n), 0<a<1$，试用直接计算卷积的方法，求系统的单位阶跃响应。

解　系统的单位阶跃响应为

$$s(n)=h(n) * u(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)u(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^{-m}u(-m)u(n-m),\quad 0<a<1$$

(1) 当 $n<0$ 时，$u(-m)u(n-m)=\begin{cases}1, & -\infty \leqslant m \leqslant n \\ 0, & m>n\end{cases}$

得
$$s(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} a^{-m}=\sum_{m=-n}^{+\infty} a^m=\sum_{m=-n}^{0} a^m+\sum_{m=0}^{+\infty} a^m-1$$
$$=\frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}+\frac{1}{1-a}-1=\frac{a-a^{-n}}{a-1}+\frac{a}{1-a}=\frac{a^{-n}}{1-a}$$

(2) 当 $n \geqslant 0$ 时，$u(-m)u(n-m)=\begin{cases}1, & -\infty \leqslant m \leqslant 0 \\ 0, & m>0\end{cases}$

得 $$s(n)=\sum_{m=-\infty}^{0}a^{-m}=\sum_{m=0}^{+\infty}a^{m}=\frac{1}{1-a}$$

故所求系统的单位阶跃响应为

$$s(n)=\frac{1}{1-a}[a^{-n}u(-n)+u(n-1)]$$

1-5 已知图 1.10 所示的是单位取样响应分别为 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 的两个线性非移变系统的级联，已知 $x(n)=u(n)$，$h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-4)$，$h_2(n)=a^nu(n)$，$|a|<1$，试求系统的输出 $y(n)$。

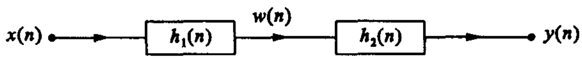


图 1.10

解 因为 $$w(n)=x(n)*h_1(n)=u(n)*[\delta(n)-\delta(n-4)]=u(n)-u(n-4)$$

则系统输出为 $$\begin{aligned}y(n)&=w(n)*h_2(n)=[u(n)-u(n-4)]*a^nu(n)\\&=[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)]*a^nu(n)\\&=a^nu(n)+a^{n-1}u(n-1)+a^{n-2}u(n-2)+a^{n-3}u(n-3)\end{aligned}$$

1-6 判断下列系统是否为：(a) 线性系统。(b) 非移变系统。(c) 稳定系统；(d) 因果系统；并予以证明。

(1) $y(n)=5x(n)+3$　(2) $y(n)=x(n-n_0)$　(3) $y(n)=x(n)\sin\left(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$

(4) $y(n)=g(n)x(n)$　(5) $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$　(6) $y(n)=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$

解 (1) (a) 因为 $y(n)=T[x(n)]=5x(n)+3$

所以 $y_1(n)=T[x_1(n)]=5x_1(n)+3$　$y_2(n)=T[x_2(n)]=5x_2(n)+3$

则 $$ay_1(n)+by_2(n)=5ax_1(n)+5bx_2(n)+3(a+b)$$

而 $$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=5[ax_1(n)+bx_2(n)]+3$$

因此 $$T[ax_1(n)+bx_2(n)]\neq ay_1(n)+by_2(n)$$

所以是非线性系统。

(b) 因为 $T[x(n-k)]=5x(n-k)+3=y(n-k)=5x(n-k)+3$，所以是非移变系统。

(c) 设 $|x(n)|\leqslant M$，则有 $y(n-k)=5x(n-k)+3$，所以是稳定系统。

(d) 因为 n 时刻的输出 $y(n)$ 只取决于 n 时刻的输入 $x(n)$，所以是因果系统。

(2) (a) 因为 $$y(n)=T[x(n)]=x(n-n_0)$$

所以 $$y_1(n)=T[x_1(n)]=x_1(n-n_0),\ y_2(n)=T[x_2(n)]=x_2(n-n_0)$$

且有 $$ay_1(n)+by_2(n)=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)$$

则 $$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)$$

故有 $$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$

所以是线性系统。

(b) 因为 $T[x(n-k)]=x(n-k-n_0)=y(n-k)=x(n-k-n_0)$

所以是非移变系统。

(c) 设 $|x(n)|\leqslant M$ 有界，则 $|y(n)|=|x(n-n_0)|\leqslant M$ 有界，所以系统稳定。

(d) 因为 $n_0<0$ 时，n 时刻的输出 $y(n)$ 与 n 时刻以后的输入 $x(n)$ 有关，所以是非因果系统。

(3) (a) 因为
$$y(n)=T[x(n)]=x(n)\sin\left(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$$
有
$$y_1(n)=T[x_1(n)]=x_1(n)\sin\left(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$y_2(n)=T[x_2(n)]=x_2(n)\sin\left(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$$
则
$$ay_1(n)+by_2(n)=[ax_1(n)+bx_2(n)]\sin\left(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$$
且
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]\sin\left(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$$
故有
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$
所以是线性系统。

(b) 因为
$$T[x(n-k)]=x(n-k)\sin\left(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$$
而
$$y(n-k)=x(n-k)\sin\left[\frac{2\pi(n-k)}{3}+\frac{\pi}{6}\right]$$
所以
$$T[x(n-k)]\neq y(n-k)$$
故为移变系统。

(c) 设 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|y(n)|=\left|x(n)\sin\left(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)\right|\leqslant|x(n)|<\infty$，所以是稳定系统。

(d) 因为 n 时刻的输出 $y(n)$ 只取决于 n 时刻输入 $x(n)$，所以是因果系统。

(4) (a) 因为
$$y(n)=T[x(n)]=g(n)x(n)$$
则
$$y_1(n)=T[x_1(n)]=g(n)x_1(n),\quad y_2(n)=T[x_2(n)]=g(n)x_2(n)$$
且有
$$ay_1(n)+by_2(n)=[ax_1(n)+bx_2(n)]g(n)$$
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]g(n)$$
故有
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$
所以是线性系统。

(b) 因为　$T[x(n-k)]=g(n)x(n-k)\neq y(n-k)=g(n-k)x(n-k)$

所以是移变系统。

(c) 设 $|x(n)|\leqslant M$，令 $g(n)=n$，则 $|y(n)|=|nx(n)|\leqslant|n|\,|x(n)|\leqslant|n|M$，当 $n\to\infty$ 时，有 $|y(n)|\to\infty$，所以不是稳定系统。

(d) n 时刻的输出 $y(n)$ 只取决于 n 时刻的输入 $x(n)$，所以是因果系统。

(5) (a) 因为
$$ay_1(n)+by_2(n)=a\sum_{k=\infty}^{n}x_1(k)+b\sum_{k=\infty}^{n}x_2(k)$$
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{k=\infty}^{n}[ax_1(k)+bx_2(k)]=a\sum_{k=\infty}^{n}x_1(k)+b\sum_{k=\infty}^{n}x_2(k)$$
故有
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$
所以是线性系统。

(b) 因为
$$T[x(n-m)]=\sum_{k=\infty}^{n-m}x(k)=y(n-m)=\sum_{k=\infty}^{n-m}x(k)$$

所以是非移变系统。

(c) 设$|x(n)|\leqslant M$,则$|y(n)|=\left|\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)\right|\leqslant n|x(n)|$,当$n\to\infty$时,有$|y(n)|\to\infty$,所以不是稳定系统。

(d) n时刻的输出$y(n)$只取决于n时刻及n时刻以前的输入$x(n)$,所以是因果系统。

(6) (a) 因为 $$ay_1(n)+by_2(n)=a\sum_{k=n_0}^{n}x_1(k)+b\sum_{k=n_0}^{n}x_2(k)=T[ax_1(n)+bx_2(n)]$$
所以是线性系统。

(b) 因为 $$T[(n-m)]=\sum_{k=n_0}^{n-m}x(k)=y(n-m)$$
所以是非移变系统。

(c) 设$|x(n)|\leqslant M$, 则$|y(n)|=\left|\sum_{k=n_0}^{n}x(k)\right|\leqslant|n-n_0||x(n)|$, 当$n\to\infty$时, 有$|y(n)|\to\infty$, 所以不是稳定系统。

(d) 当$n<n_0$时,n时刻的输出$y(n)$与n时刻以后的输入$x(n)$有关,所以是非因果系统。

1-7 讨论下列各线性非移变系统的因果性和稳定性。

(1) $h(n)=2^nu(-n)$　(2) $h(n)=0.5^nu(n)$　(3) $h(n)=-a^nu(-n-1)$

(4) $h(n)=n^{-2}u(n)$　(5) $h(n)=2^nR_N(n)$　(6) $h(n)=\delta(n+n_0),n_0>0$

解 (1) ① 讨论因果性:因为$n<0$时,$h(n)\neq0$,所以该系统为非因果系统;

② 讨论稳定性:由稳定充要条件得$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)||\lim_{n\to-\infty}(2^n-1)|=1<+\infty$,所以系统稳定。

(2) ① 讨论因果性:因为$n<0$时,$h(n)=0$,所以该系统为因果系统;

② 讨论稳定性:由稳定充要条件得$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|=\left|\lim_{n\to+\infty}2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\right|=2<+\infty$,所以系统稳定。

(3) ① 讨论因果性:因为$n<-1$时,$h(n)\neq0$,所以该系统为非因果系统;

② 讨论稳定性:由稳定充要条件得$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|=\left|\lim_{n\to-\infty}\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)\right|$,所以当$|a|\geqslant1$时,系统稳定;当$|a|<1$时,系统不稳定。

(4) ① 讨论因果性:因为$n<0$时,$h(n)=0$,所以该系统为因果系统;

② 讨论稳定性:由稳定充要条件得$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{+\infty}|n^{-2}|=+\infty$,所以系统不稳定。

(5) ① 讨论因果性:因为$n<0$时,$h(n)=0$,所以该系统为因果系统;

② 讨论稳定性:由稳定充要条件得$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|<\infty$($n$为有限值),则系统稳定。

(6) ① 讨论因果性:因为$n_0>0,n=-n_0<0$时,$h(n)\neq0$,所以该系统为非因果系统;

② 讨论稳定性:由稳定充要条件得$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|=1<+\infty$,所以系统稳定。

1-8 设系统的差分方程为$y(n)-ay(n-1)=x(n)$,其中$x(n)$为输入,$y(n)$为输出。当

边界条件分别为 $y(0)=0$，$y(-1)=0$ 时，试判断系统是否为线性的，是否为非移变的。

解　(1) 当边界条件为 $y(0)=0$ 时

① 设 $x_1(n)=\delta(n)$，则　$y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)$

由差分方程得　$y_1(1)=ay_1(0)+x_1(1)=0$，$y_1(2)=ay_1(1)+x_1(2)=0$

递推得　$y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)=0,\quad n\geqslant 0$

当 $n<0$ 时，
$$y_1(n)=\frac{1}{a}[y_1(n+1)-x_1(n+1)]$$

因而
$$y_1(-1)=\frac{1}{a}[y_1(0)-x_1(0)]=-a^{-1}$$
$$y_1(-2)=\frac{1}{a}[y_1(-1)-x_1(-1)]=-a^{-2}$$

递推得
$$y_1(n)=\frac{1}{a}[y_1(n+1)-x_1(n+1)]=-a^n$$

综上可知
$$y_1(n)=-a^nu(-n-1)$$

② 设　$x_2(n)=\delta(n-1)$，$y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)$

由差分方程得　$y_2(1)=ay_2(0)+x_2(1)=1$，　$y_2(2)=ay_2(1)+x_2(2)=a$

递推得　$y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)=a^{n-1}$

即　$y_2(n)=a^{n-1},\quad n\geqslant 1$

当 $n\leqslant 0$ 时，
$$y_2(n)=\frac{1}{a}[y_2(n+1)-x_2(n+1)]$$

因而
$$y_2(-1)=\frac{1}{a}[y_2(0)-x_2(0)]=0$$
$$y_2(-2)=\frac{1}{a}[y_2(-1)-x_2(-1)]=0$$

递推得
$$y_2(n)=\frac{1}{a}[y_2(n+1)-x_2(n+1)]=0$$

综上可知
$$y_2(n)=a^{n-1}u(n-1)$$

由①和②的结果可知，$x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 是移 1 位的关系，但 $y_1(n)$ 与 $y_2(n)$ 不是移 1 位的关系，所以在 $y(0)=0$ 的条件下，系统是移变系统。

③ 设　$x_3(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$，　$y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)$

当 $n>0$ 时，
$$y_3(1)=ay_3(0)+x_3(1)=1$$
$$y_3(2)=ay_3(1)+x_3(2)=a$$
$$y_3(3)=ay_3(2)+x_3(3)=a^2$$

递推得　$y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)=a^{n-1}$

即　$y_3(n)=a^{n-1},\quad n\geqslant 1$

当 $n<0$ 时，
$$y_3(n)=\frac{1}{a}[y_3(n+1)-x_3(n+1)]$$

则
$$y_3(-1)=\frac{1}{a}[y_3(0)-x_3(0)]=-a^{-1}$$
$$y_3(-2)=\frac{1}{a}[y_3(-1)-x_3(-1)]=-a^{-2}$$

递推得 $$y_3(n)=\frac{1}{a}[y_3(n+1)-x_3(n+1)]=-a^{-n},n\leqslant -1$$

综上得 $$y_3(n)=a^{n-1}u(n-1)-a^n u(-n-1)=y_1(n)+y_2(n)$$

所以，该系统在 $y(0)=0$ 条件下是线性系统。

(2) 当边界条件为 $y(-1)=0$ 时

① 设 $x_1(n)=\delta(n)$，$y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)$，得 $y_1(n)=a^n u(n)$

② 设 $x_2(n)=\delta(n-1)$，$y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)$，得 $y_2(n)=a^{n-1}u(n-1)$

由①和②结果可知，$x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 是移位的关系，$y_1(n)$ 与 $y_2(n)$ 也是移位的关系，所以在 $y(-1)=0$ 条件下，系统是非移变系统。

③ 设 $$x_3(n)=\delta(n)+\delta(n-1),\quad y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)$$

当 $n<0$ 时，$$y_3(n)=0$$

当 $n\geqslant 0$ 时，$$y_3(n)=a^n+a^{n-1}$$

综上得 $$y_3(n)=a^n u(n)+a^{n-1}u(n-1)=y_1(n)+y_2(n)$$

所以该系统在 $y(-1)=0$ 条件下是线性系统。

1-9 已知系统的框图如图 1.11 所示，试列出该系统的差分方程；并按初始条件 $y(n)=0,n<0$，求输入为 $x(n)=u(n)$ 时的输出 $y(n)$。

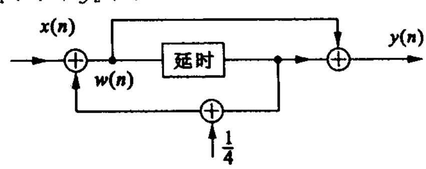


图 1.11

解 由图可得方程组

$$w(n)=\frac{1}{4}w(n-1)+x(n),\quad y(n)=w(n)+w(n-1)$$

联立整理得到系统的差分方程为

$$y(n)=\frac{1}{4}y(n-1)+x(n)+x(n-1)$$

由于 $n<0$ 时，$y(n)=0$，则通过迭代可得

$$y(0)=\frac{1}{4}y(-1)+x(0)+x(-1)=1$$

$$y(1)=\frac{1}{4}y(0)+x(1)+x(0)=2+\frac{1}{4}$$

$$y(2)=\frac{1}{4}y(1)+x(2)+x(1)=2+2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$y(3)=\frac{1}{4}y(2)+x(3)+x(2)=2+2\times\frac{1}{4}+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

归纳可得 $$y(n)=2+2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

整理化简得 $$y(n)=\left[\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

1-10 设某因果系统的输入输出关系由下列差分方程确定

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

(1) 求该系统的单位乘样响应 $h(n)$；

(2) 利用(1) 得到的结果，求输入为 $x(n)=e^{j\omega n}$ 时系统的响应。