数学奥林匹克中的不等式研究

蔡玉书 主编

苏州大学出版社

数学奥林匹克中的不等式研究

蔡玉书　主编

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克中的不等式研究/蔡玉书主编. —苏州：苏州大学出版社，2007.9
ISBN 978-7-81090-965-5

Ⅰ.数… Ⅱ.蔡… Ⅲ.不等式-教学研究-中学 Ⅳ.G633.622

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 153503 号

数学奥林匹克中的不等式研究

蔡玉书 主编

责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)

苏州市恒久印务有限公司印装

(地址:苏州市友新路 28 号东侧 邮编:215128)

开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 14.25 字数 356 千

2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81090-965-5 定价:20.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

前言

20 多年前参加工作不久，我就对竞赛中不等式的研究产生了浓厚的兴趣，曾经整理了许多不等式的试题及其解法，足足写了厚厚的两本笔记. 随着时间的推移，本人对不等式的研究兴趣有增无减，2005 年参加江苏省数学奥林匹克夏令营时开始打算把自己整理的不等式的有关材料写成一本书，总结竞赛中不等式的证明方法. 经过两年多的辛勤努力，在这硕果累累的金色之秋终于如愿以偿，这本《数学奥林匹克中的不等式研究》跟广大读者见面了.

综观数学奥林匹克，无论是国际数学奥林匹克，还是各国各地区的数学奥林匹克，不等式的试题都会出现. 再加上不等式的证明试题具有很高的技巧性和挑战性，有关不等式的试题在竞赛中倍受命题组委会的青睐. 为了给广大数学奥林匹克教练员培训竞赛选手准备第一手不等式证明方面的详细资料，也为了给众多的数学奥林匹克选手提供大量的不等式的练习题，本人花了两年多时间，精选了近年来国内外各级各类数学奥林匹克试题 1000 多道，按不等式的证法和不等式的类型分类，编写了 23 个章节，整理出这本《数学奥林匹克中的不等式研究》奉献给广大数学奥林匹克爱好者. 它几乎包括了所有常见的竞赛不等式的证法，大大地节省了教师收集资料的时间，且大多数章节是作为教师的竞赛讲座材料给出的. 本书具有科学性、知识性、实用性和可读性强的特点，是一

本广大数学奥林匹克教练员研究竞赛不等式、指导学生参赛不可多得的参考书，是一本奉献给不等式研究爱好者的优秀读物.

本书例题的解答有些出自试题组委会提供的参考解答，有些出自名家之手，有些是数学期刊的优雅解法，更多的是来自作者的辛勤劳动. 如 1996 年伊朗的一道奥林匹克试题是在本人研究了对称不等式的 SOS 方法之后圆满地解决的. 2006 年江苏省冬令营单墫教授给出了一种较为简洁的方法，本书一并把它介绍给读者，这便是出自名家之手的解答.

本书的习题很多，有 800 多道，所有的习题都没有给出证明过程，一方面是篇幅所限，如果所有的习题都给出详细的解答，解答部分的篇幅便是这本书的两倍；另一方面未给解答也是想给读者尤其是准备参加各级各类比赛的选手一个练习的机会. 正如单墫教授所说的那样：只有动手做一做，才能体会试题的难度和解决问题的技巧和方法.

著名数学家、教育学家波利亚一直强调未来的中学数学教师应当学习解题，他尤其鼓励教师们解一些有挑战性的试题. 他曾经这样说过，一位好的数学老师和学生应努力保持解题的好胃口. 要想熟练地掌握数学奥林匹克中不等式证明的方法和技巧，最好的方法莫过于经常动手解题. 本书中每个章节都给出了典型不等式赛题的优雅证明方法，章节后的类似的习题则要求读者自己去完成. 由于书中习题来自各国各地区的奥林匹克试题和集训队试题，难度之大可想而知，读者一时做不出来，不要灰心丧气，也不要急于查找现成的试题解答，可以与同学组成不等式研究小组一起探讨. 希望读者从各章节的相关的例题中汲取精华和营养，培养自己独立地闯过难关的能力，从而找到解题的乐趣.

本书在编写过程中得到了苏维宜、王肇西、冯惠愚、董林伟、祁建新、夏炎、陈兆华、潘洪亮等众多教授和奥林匹克专家的大力支

持和帮助.著名数学家、教育家、国家级奥林匹克教练、南京师范大学博士生导师单墫教授在百忙中认真地阅读了书稿,并为本书作了序.苏州一中周春良、冯黎、杨斌等各位领导也给予了大力支持,本人在此一并致谢!

由于本人水平有限,书中错误与不足之处实难避免,望读者不吝赐教.

蔡玉书

2007年中秋于正谊书院紫藤园

序

不等式在数学中占有重要的地位. 自 1934 年哈代、立特武德、波利亚的名著《不等式》(越民义译,科学出版社,1965)问世以来,有关不等式问题的研究层出不穷,文章、著作也很多. 如 Beckenbach, Bellman《Inequalities》; Mitrinovic《Analytic Inequlities》; Mitrinovic, Pecaric and Volenec《Recent Advences in Geometric Inequalities》. 我国的研究者更是非常之多,宁波大学的陈计先生就是其中最突出的一位. 匡继昌先生的《常用不等式》对不等式作了详细的总结. 杨路先生给出了不等式的机器证明,他发明的软件 Bottema 可以在几秒钟内完成一个不等式的证明.

数学奥林匹克中不等式的题目甚多,几乎每届 IMO 与 CMO 都有一道不等式. 在我国高中联赛中,不等式也是屡见不鲜. 为什么不等式受到命题者的青睐呢? 至少有以下理由:

首先,不等式的题多如牛毛,每一年都有大量的新不等式出现,可供选用.

其次,不等式的题有各种难度,可以较好地区分出选手的水平.

最后,或许是最重要的一点,不等式最能反映出选手的创造能力. 很多不等式无法搬用固定的陈法,必须自出机杼,给出新颖的解法,这与平面几何颇为类似. 现在,在竞赛中,不等式似乎已经可以与平面几何分庭抗礼了.

蔡玉书先生的这本《数学奥林匹克中的不等式研究》，内容丰富，全书 23 章，共有例题 200 多个，练习题 800 多个，可见作者搜罗之勤. 因此，这本书也可以作为一本题典使用.

这么多的题，读者想全部做完，不太现实，也没有必要. 比较好的办法是从中选出一部分来做，必须自己独立做，不要先看解答. 一遇题目就看解答，往往会束缚思想，不利于提高解题的能力. 这本书的练习没有解答，是一件大好事，不仅节省篇幅，而且给勤勉的读者提供了锻炼能力的机会. 当然，初学者可以先选例题来做，实在做不出，可以看书上的解答. 即使书上有现成的解答，也必须自己先做. 在做的基础上再看解答，体会才会较深，收获才会较大. “金针线迹分明在，但把鸳鸯仔细看.”看解答，要仔细，不应只看到“绣好的鸳鸯”，更要看出绣鸳鸯的方法. 掌握“金针”，才能融会贯通，举一反三.

23 章的内容，请读者自己看书，我就不再饶舌了.

单 墫

2007 年 9 月

目 录

1

比较法证明不等式

比较法是证明不等式的常用的基本方法，一般有两种形式：

(1) **差值比较**　欲证 $A\geqslant B$，只要证 $A-B\geqslant 0$；

(2) **商比较法**　若 $B>0$，欲证 $A\geqslant B$，只要证 $\frac{A}{B}\geqslant 1$.

在用比较法证明不等式时，常常需要对所考虑的式子进行适当的代数变形，如配方、因式分解、拆项、并项等.

本书的大多数例题选自国内外数学竞赛试题，有些例题可能在书中多次出现，所以每节中该例题的解法是优秀的，但不一定是最简单的.

一　作差比较后拆项配方或分解因式

例 1　已知 a,b,c 是正实数，试证对任意实数 x,y,z，有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}xy+\sqrt{\frac{b+c}{a}}yz+\sqrt{\frac{c+a}{b}}zx\right).$$

并指出等号成立的充要条件.

证明 上式左边−右边

$$=\left[\frac{b}{b+c}x^2+\frac{a}{c+a}y^2-2\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}xy\right]$$
$$+\left[\frac{c}{c+a}y^2+\frac{b}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}yz\right]$$
$$+\left[\frac{c}{b+c}x^2+\frac{a}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(a+b)}}xz\right]$$
$$=\left(\sqrt{\frac{b}{b+c}}x-\sqrt{\frac{a}{c+a}}y\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{c+a}}y-\sqrt{\frac{b}{a+b}}z\right)^2$$
$$+\left(\sqrt{\frac{c}{b+c}}x-\sqrt{\frac{a}{a+b}}z\right)^2\geqslant 0,$$

所以,原不等式成立.

等号成立的充要条件是 $x:y:z=\sqrt{a(b+c)}:\sqrt{b(c+a)}:\sqrt{c(a+b)}$.

例2 设 a,b,c 是三角形的三边,求证:$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$.(第6届IMO试题)

证法1 注意到 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$,得

$$3abc-[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)]$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc+a(b^2+c^2-2bc)+b(c^2+a^2-2ca)$$
$$+c(a^2+b^2-2ab)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+a(b^2+c^2-2bc)$$
$$+b(c^2+a^2-2ca)+c(a^2+b^2-2ab)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]+a(b-c)^2$$
$$+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$
$$=\frac{1}{2}(a+b-c)(a-b)^2+\frac{1}{2}(b+c-a)(b-c)^2+\frac{1}{2}(a+c-$$

$b)(c-a)^2$.

因为 a,b,c 是三角形的三边，所以 $a+b-c>0,b+c-a>0,a+c-b>0$. 而 $(a-b)^2\geqslant 0,(b-c)^2\geqslant 0,(c-a)^2\geqslant 0$，故原不等式成立.

当且仅当 $a=b=c$，即 $\triangle ABC$ 是正三角形时等号成立.

注 由证法 1，对满足条件的任何实数 a,b,c，命题均成立. 事实上，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，则由 $(a+b-c)(a-b)^2\geqslant 0,c(b-c)^2+c(c-a)^2\geqslant 0,(a-b)(c-a)^2\geqslant(a-b)(b-c)^2$ 即得.

证法 2 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，将不等式右边与左边之差变形为

$$\begin{aligned}&3abc-[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)]\\&=a^3+b^3+c^3+3abc-a^2b-b^2a-a^2c-c^2a-bc^2-b^2c\\&=a^2(a-b)+b^2(b-a)+c(2ab-a^2-b^2)+c(c^2-bc+ab-ac)\\&=(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c).\end{aligned}$$

因为 $a+b>c,b\geqslant c,a\geqslant c,c>0$，所以 $(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c)\geqslant 0$，所以原不等式成立.

注 由证法 2，也可知道只要 a,b,c 是正数，不等式就可以成立了，这是 1971 年奥地利数学竞赛试题.

二 对称不等式的处理可以先将字母排序，再作比较

例 3 设 $0\leqslant a,b,c\leqslant 1$，证明：$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1$.（第 9 届美国数学奥林匹克试题）

证明 如果直接通分，问题就会变得非常复杂. 不失一般性，可设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$，于是有

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\leqslant\frac{a+b+c}{a+b+1}.$$

因此，可尝试证明较简单的不等式

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1. \qquad ①$$

因①式的左边 $=\frac{a+b+1}{a+b+1}+\frac{c-1}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$

$$=1-\frac{1-c}{a+b+1}[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)],$$

再注意到

$$\begin{aligned}&(1+a+b)(1-a)(1-b)\\ \leqslant&(1+a+b+ab)(1-a)(1-b)\\ =&(1+a)(1+b)(1-a)(1-b)\\ =&(1-a^2)(1-b^2)\leqslant 1,\end{aligned}$$

故不等式①成立，从而原不等式成立.

例 4 已知 a,b,c 是正数，证明：

(1) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.（1963 年莫斯科数学奥林匹克试题）

(2) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$.（第 2 届世界友谊杯数学竞赛试题）

证法 1 (1) 因为

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\\ =&\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{b+c}+\frac{a-c}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b-c}{c+a}+\frac{b-a}{c+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{a+b}+\frac{c-b}{a+b}\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{b+c}+\frac{c-a}{a+b}\right)\\ =&\frac{1}{2}\left[\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)}+\frac{(c-a)^2}{(b+c)(a+b)}\right]\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

(2) $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}$$

$$=a\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+b\left(\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}\right)+c\left(\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{a}{2}\left(\frac{a-b}{b+c}+\frac{a-c}{b+c}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{b-c}{c+a}+\frac{b-a}{c+a}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{c-a}{a+b}+\frac{c-b}{a+b}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a-b}{b+c}+\frac{b}{2}\cdot\frac{b-a}{c+a}\right)+\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a-c}{b+c}+\frac{c}{2}\cdot\frac{c-a}{a+b}\right)$$

$$+\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{b-c}{c+a}+\frac{c}{2}\cdot\frac{c-b}{a+b}\right)$$

$$=\frac{(a+b+c)(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}+\frac{(a+b+c)(a-c)^2}{2(b+c)(a+b)}$$

$$+\frac{(a+b+c)(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)}\geqslant 0,$$

所以 $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}.$$

证法 2 (1) 因为

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{2a(a+b)(c+a)+2b(a+b)(b+c)+2c(b+c)(c+a)-3(a+b)(b+c)(c+a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{2(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{[a^3+b^3-(a^2b+ab^2)]+[b^3+c^3-(b^2c+bc^2)]+[c^3+a^3-(c^2a+ca^2)]}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant 0,$$

所以 $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

(2) 不难证明

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)-(a+b+c),$$

利用这个恒等式得到不等式$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$和$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$等价.

证法 3 下面用对称化的方法证明这两个不等式(不妨设$a\geqslant b\geqslant c$):

(1)
$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\\&=\frac{2a-b-c}{2(b+c)}+\frac{2b-a-c}{2(c+a)}+\frac{2c-a-b}{2(a+b)}\\&\geqslant\frac{2a-b-c}{2(a+c)}+\frac{2b-a-c}{2(c+a)}+\frac{2c-a-b}{2(a+b)}\\&=\frac{a+b-2c}{2(c+a)}+\frac{2c-a-b}{2(a+b)}\\&\geqslant\frac{a+b-2c}{2(a+b)}+\frac{2c-a-b}{2(a+b)}=0.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}\\&=\frac{a(2a-b-c)}{2(b+c)}+\frac{b(2b-a-c)}{2(c+a)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)}\\&\geqslant\frac{b(2a-b-c)}{2(a+c)}+\frac{b(2b-a-c)}{2(c+a)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)}\\&=\frac{b(a+b-2c)}{2(c+a)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)}\\&\geqslant\frac{c(a+b-2c)}{2(a+b)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)}=0.\end{aligned}$$

这里增加了一个补充假设,给论证带来了方便,这在三元对称不等式的证明中,起到举足轻重的作用. 但其中用到了放缩的技巧,这一技巧将在后面专门讨论. 不等式的证明离不开放缩.

注 由例 4 可解决下列问题(提示:令 $A=\frac{1}{a},B=\frac{1}{b},C=\frac{1}{c}$,并对 A,B,C 用例 4):

设 a,b,c 为正实数,且满足 $abc=1$,试证 $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$.(第 36 届 IMO 试题)

例 5 证明 Schur 不等式:设 $x,y,z\geqslant 0$,r 是实数,则

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-y)(z-x)\geqslant 0.$$

证明 由对称性,不妨设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$,分三种情况讨论:

(1) 当 $r=0$ 时,

$$\begin{aligned}\text{左边}&=(x-y)(x-z)+(y-x)(y-z)+(z-y)(z-x)\\&=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\\&=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0.\end{aligned}$$

(2) 当 $r>0$ 时,$y-z\geqslant 0$,$x-z\geqslant 0$,$x^r\geqslant y^r\geqslant 0$,于是

$$\begin{aligned}\text{左边}&=x^r(x-y)(x-z)-y^r(x-y)(y-z)+z^r(y-z)(x-z)\\&\geqslant x^r(x-y)(x-z)-y^r(x-y)(y-z)\\&\geqslant y^r(x-y)(x-z)-y^r(x-y)(y-z)\\&=y^r(x-y)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

(3) 当 $r<0$ 时,$x-y\geqslant 0$,$x-z\geqslant 0$,$z^r\geqslant y^r\geqslant 0$,于是

$$\begin{aligned}\text{左边}&=x^r(x-y)(x-z)-y^r(x-y)(y-z)+z^r(y-z)(x-z)\\&\geqslant -y^r(x-y)(y-z)+z^r(y-z)(x-z)\\&\geqslant -y^r(x-y)(y-z)+y^r(y-z)(x-z)\\&=y^r(y-z)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

综上所述,$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-y)(z-x)\geqslant 0$.

注 当 $r=1$ 时,Schur 不等式有如下几种变形: