有摄限制性三体问题
——平动点稳定性及应用

舒斯会◎著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

有摄限制性三体问题

——平动点稳定性及应用

舒斯会　著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·北　京·
BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

有摄限制性三体问题:平动点稳定性及应用/舒斯会著.—北京:中国科学技术出版社,2007.4

ISBN 978-7-5046-4555-5

Ⅰ.有… Ⅱ.舒… Ⅲ.三体问题(天文) Ⅳ.P132

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第042314号

内容提要

本书主要讨论了有摄限制性三体问题平动点及稳定性及其在天体运动轨道的应用。研究了平动点稳定性条件,作为条件的应用,讨论了几种阻力以及任意外力摄动对经典圆型限制性三体问题和Robe限制性三体问题平动点及稳定性的影响,同时还对一些特殊的有摄动三体问题平动点及稳定性进行了讨论。

本书可作为天体测量与天体力学,应用数学、航天轨道设计与跟踪等专业的大学高年级的学生、研究生和相关科研工作人员的参考书。

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街16号 邮政编码:100081

策划编辑	林 培 孙卫华	责任校对	林 华
责任编辑	孙卫华 李惠兴	责任印制	安利平

电话:010-62103210 传真:010-62183872

http://www.kjpbooks.com.cn

科学普及出版社发行部发行

北京蓝空印刷厂印刷

*

开本:787毫米×1092毫米 1/16 印张:8.125 字数:184千字

2007年5月第1版 2007年5月第1次印刷 定价:22.00元

书号 ISBN 978-7-5046-4555-5/P·96

(凡购买本社的图书,如有缺页、倒页、

脱页者,本社发行部负责调换)

前　言

三体问题是天体力学中非常重要的问题，三体问题模型是研究天体力学现象的主要数学模型之一。到现在为止，限制性三体问题仍没有得到解决，但得到了 5 个非常有价值的特解，我们通常称之为拉格朗日平动点。这 5 个平动点对分析限制性三体问题的性质，研究天体运动规律和天体分布结构都有着非常重要的作用。而拉格朗日平动点稳定性是研究平动点必须首先要考虑的问题。

无摄限制性三体问题平动点稳定性问题基本得到解决，但为使限制性三体问题更适合实际的天文背景，根据研究问题的具体情况常常需要考虑一些摄动力的影响，主要有光压摄动、扁球体摄动、刚体摄动、相对论三体问题、PR-阻力摄动、惯性阻力摄动和星云阻力摄动等。在有摄情况下，圆型限制性三体问题的稳定性情况较复杂，有时一个很小摄动力会使稳定的平动点变得不稳定，而且讨论此类问题的稳定性相对来说也较为复杂。近几年来，国内外许多专家学者对此进行了研究，取得一些好的结果。作者对有摄圆型限制性三体问题的稳定性也进行了一定研究，本书以作者和有关专家、学者的一些研究成果为基础，介绍一些常见的有摄圆型限制性三体问题的稳定性方法及其应用。

全书共分六章，第一章作为预备知识，介绍动力系统平动点及稳定性的基础知识和哈密顿正则方程和正则变换；第二章讲述圆型限制性三体问题平动点及稳定性的基础知识；第三章是本书的核心内容，讨论了有摄圆型限制性三体问题平动点及其稳定性条件。作为条件的应用，讨论了几种阻力以及任意外力摄动对平动点的稳定性的影响；第四章研究一些摄动对一类重要的三体问题——Robe 圆型限制性三体问题的平动点的稳定性的影响；第五章介绍了 Coriolis 力和离心力的摄动对经典圆型限制性三体问题和 Robe 限制性三体问题平动点及稳定性的影响；第六章介绍几类特殊的有摄限制性三体问题平动点及稳定性，包括考虑天体有强辐射的限制性三体问题，无穷直棒重力场三体问题和相对论限制性三体问题等的平动点及稳定性。

阅读本书需要有常微分方程及运动稳定性理论，高等数学、理论力学和轨道力学以及复变函数等方面的基础知识和技能。

本书可作为天体测量与天体力学，应用数学、航天轨道设计与跟踪等专业的大学高年级的学生、研究生和相关科研工作人员的参考书。

本书的出版得到了江西省自然科学基金(0511025)、江西科技师范学院出版基金的资助。在这里一并表示感谢。

目 录

第一章　预备知识

有摄圆型限制性三体系统是一常微分方程动力系统，要用到动力系统中的平动点及其稳定性和哈密顿力学中的哈密顿正则方程及正则变换等基础知识。

第一节　动力系统平动点及稳定性的基础知识

一、动力系统的概念

设 R^n 是 n 维欧氏空间，t 是时间变量，$t \in \boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{I}$ 是实数轴上的开区间，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量，$\boldsymbol{x} \in W$，W 是 R^n 中的区域，考虑微分方程系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{1.1}$$

和初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

其中右端函数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$是 n 维向量函数，且满足初值问题解的存在唯一性条件。

这里 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$，$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$。

若函数 $\boldsymbol{f}(t,x)$ 与 t 无关，则微分方程系统变为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1.2}$$

若把 t 看着参数，在 R^n 中方程(1.2)的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$的几何图像为一条通过 $\boldsymbol{x}_0$ 点的曲线，在此曲线上再画一箭头代表 t 增长方向，它就称为一条轨线。从运动观点来看，t 代表时间，则(1.2)在 W 中就规定了一个速度场，轨线描述了具体质点的运动。在每一点 $\boldsymbol{x} \in W$，质点的运动速度与速度场在该点的速度相同。因此，(1.2)确定了在 W 内的一个运动系统，通常称(1.2)为一个自治系统或定常系统。而右端函数依赖于变量 t 的微分方程系统(1.1)就称为非自治系统或非定常系统。它在 W 中确定的速度场是随时间 t 变化的，即对同一个 $\boldsymbol{x}_0 \in W$，在不同的时刻相应的速度一般是不同的，因此，它的情况要复杂得多。有摄圆型限制性三体问题模型(在会合坐标系下)都是自治系统，所以我们这里只考虑自治系统，下面给出自治系统平动点及其稳定性的概念和几个相关的基本定理。

一般来说，常微分方程动力系统很难得到其通解，但对自治系统来说，可以较容易给出其一种特解(我们称之为平衡点或平动点)，而且这种特解在理论上和实际应用中都具有非常重要的作用和意义，像限制性三体问题的平动点就有其实际的天文应用背景。

二、平动点的概念

定义 1.1　若点 $\boldsymbol{x}_0 \in W$，使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=0$，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为自治系统(1.2)的平动点(或平衡

点）。

显然 $x(t)=x_0$ 是系统(1.2)满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的一个解，它所代表的运动轨线是一个不动的点，由解的唯一性可知它是过点 x_0 的唯一解，它所代表的运动开始时在 x_0 处，以后永远在 x_0 处，故称之为系统的平动点(或平衡点)。平动点在微分方程定性理论及其应用中有着非常重要的作用。

在天体力学中，会合坐标系下的圆型限制性三体系统有五个非常重要的平动点，其中三个共线平动点，两个三角平动点，且三角平动点是非常重要且具有实际应用价值的解，一些著名的天文和天体力学现象可以用它们来解释，如 Trojan 小行星群存在性及其分布结构的机制等。

三、平动点稳定性的概念

稳定性理论研究时间趋于无穷时的微分方程解(平动点)的性态，是微分方程定性理论的重要内容。

在实际应用中，若某个运动过程由微分方程的某个解(平动点)来描述，它满足一定的初始条件，由于微分方程往往是在一定的精度条件下近似地刻化系统的变化的，同时在初始值的测量中不可避免的会有误差，一个实际的系统在变化过程中还会受到一些已知或未知的外界环境的各种影响，如用圆型限制性三体问题模型来研究天体运动时，由于许多已知或未知的摄动源的作用不可避免地会使其初始条件(平动点)产生小的偏移。如果不论初始值(平动点)的变化有多小，当时间趋于无穷时，对应的解(平动点)总会产生很明显的变化，这种解(平动点)就是所谓的不稳定的解(平动点)，像圆型限制性三体问题的三个共线平动点就是这样一种解，此种解(平动点)实用价值多少要受到限制。因此，找这样的条件很重要，在这些条件下，只要初值(平动点)变化足够小，解(平动点)的变化就可以小于事先指定的程度，最早俄罗斯著名的数学家雅普偌夫系统地研究了这个问题，引人的微分方程解(平动点)的稳定性的概念，下面只给出平动点稳定性的概念。

定义 1.2 设 x_0 自治系统(1.2)的平动点，若对 x_0 的任意邻域 U，存在 x_0 的一个 $U_1 \subset U$ 邻域，使得系统(1.2)的每一条轨线 $x(t)$，若 $x(0)\in U_1$，则对一切 $t>0$，有 $x(t)\in U$。则称平动点 x_0 是稳定的，否则称为不稳定的。

用 $\varepsilon-\delta$ 数学语言描述为：设 x_0 自治系统(1.2)的平动点，若对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得对任念 x_1 当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，解 $x=x(t,t_0,x_1)$ 满足

$$\|x(t,t_0,x_1)-x_0\|<\varepsilon$$

则平动点 x_0 是稳定的。

定义 1.3 若平动点 x_0 稳定并且有

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)=x_0$$

则称平动点 x_0 是渐近稳定的。

上述定义说明了：当初值(平动点)变化足够小时，解(平动点)的变化就可以小于事先指定的程度，则解(平动点)是稳定的。由上述定义易知渐近稳定是稳定的，但稳定不一定渐近稳定。

讨论自治系统平动点稳定性有许多的方法，其中一个非常重要且有效的方法是通过

讨论其线性近似方程(又称变分方程)零解的稳定性来确定该平动点本身的稳定性。

四、线性近似方程

设系统(1.2)在其平动点 $\boldsymbol{x}_0$ 处邻近 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为连续可微的函数,将自治系统(1.2)的右端函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处泰勒展开得

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}(x_1-x_{10})+\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x=x_0}(x_2-x_{20})+\cdots \\
&\quad +\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{x=x_0}(x_n-x_{n0})+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|), \\
\dot{x}_2 &= \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}(x_1-x_{10})+\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x=x_0}(x_2-x_{20})+\cdots \\
&\quad +\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_{x=x_0}(x_n-x_{n0})+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|), \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}(x_1-x_{10})+\left.\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_{x=x_0}(x_2-x_{20})+\cdots\cdots \\
&\quad +\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_{x=x_0}(x_n-x_{n0})+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|).
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

研究平动点 $\boldsymbol{x}_0$ 的稳定性主要是考虑 $\boldsymbol{x}_0$ 的附近的演化情况,所以我们可设 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$ 为一充分小量,于是在(1.3)式中保留 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 的线性部分舍去 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 的高阶项 $o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|)$ 即得方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}(x_1-x_{10})+\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x=x_0}(x_2-x_{20})+\cdots+\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{x=x_0}(x_n-x_{n_0}), \\
\dot{x}_2 &= \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}(x_1-x_{10})+\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x=x_0}(x_2-x_{20})+\cdots+\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_{x=x_0}(x_n-x_{n_0}), \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}(x_1-x_{10})+\left.\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_{x=x_0}(x_2-x_{20})+\cdots+\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_{x=x_0}(x_n-x_{n0}).
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

将上式简化为向量形式即为

$$\dot{\boldsymbol{x}}= D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), \tag{1.5}$$

其中 $\boldsymbol{A}=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{x=x_0}$ 称为 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的导算子,它是一个常系数的矩阵。

方程(1.5)即为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0). \tag{1.6}$$

上式(1.6)作变量代换 $\xi = x - x_0$ 则方程(1.6)式变为

$$\dot{\xi} = A\xi. \tag{1.7}$$

我们称方程(1.7)式为自治系统(1.2)的平动点 x_0 的线性近似方程或变分方程。

定义 1.4 若自治系统(1.2)的平动点 x_0 的线性近似方程(变分方程)(1.7)式的零解是稳定的,则称系统(1.2)的平动点 x_0 是线性稳定的。

下面给出关于平动点稳定性的几个基本定理。

五、平动点稳定性的几个定理

定理 1.1 ① 如果 A 的一切特征根的实部都是负的,则方程(1.7)式的零解渐近稳定,故自治系统(1.2)的平动点 x_0 渐近稳定。

② 如果 A 的一切特征根的实部都不是正的,但有零实部,且具有零实部的特征根仅对应单重初等因子,则方程(1.7)式的零解稳定,故自治系统(1.2)的平动点 x_0 线性稳定,但不渐近稳定。

③如果 A 的特征根中至少有一个根的实部是正的或者有对应多重初等因子的零实部的特征根,则方程(1.7)式的零解不稳定,故自治系统(1.2)的平动点 x_0 不稳定。

证明:①由常系数线性微分方程解的结构知方程(1.7)的通解为

$$x(t) = x(t, t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)} x_0. \tag{1.8}$$

由线性代数的理论知,有非奇异矩阵 Q,使得 $A = QJQ^{-1}$,其中 J 是 A 的 Jordan 标准型

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix},$$

J_k 是对应特征值 λ_k 的 Jordan 块 $(k = 1, 2, \cdots r)$。

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

由于

$$e^{A(t-t_0)} = e^{QJQ^{-1}(t-t_0)} = Qe^{J(t-t_0)}Q^{-1}, \tag{1.9}$$

这里

$$e^{J(t-t_0)} = \begin{pmatrix} e^{J_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Je^{J_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_r(t-t_0)} \end{pmatrix},$$

且

$$e^{J_k(t-t_0)} = D_k(t - t_0)e^{\lambda_k(t-t_0)},$$

$$D_k(t-t_0)=\begin{pmatrix}1 & (t-t_0) & \frac{(t-t_0)^2}{2!} & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\\ 0 & 1 & (t-t_0) & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n_k-2}}{(n_k-2)!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (t-t_0)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

其中 n_k 是特征值 λ_k 的重数。

当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都具有负实部时，取 $\beta=\min\{-\mathrm{Re}\lambda_k\}$，则由(1.8)，(1.9)及 $e^{J(t-t_0)}$ 的表达式得

$$\begin{aligned}\|x(t)\|&=\|e^{A(t-t^0)}x_0\|\leqslant\|Q\|\|Q^{-1}\|\|e^{J(t-t^0)}\|\|x_0\|\\&\leqslant\|Q\|\|Q^{-1}\|\|x^0\|\sum_{k=1}^{r}\|D_k(t-t_0)\|e^{-\beta(t-t)_0},\end{aligned}\tag{1.10}$$

由于 $\|D_k(t-t_0)\|^2$ 是 $t-t_0$ 的多项式，且 $\beta=\min\{-\mathrm{Re}\lambda_k\}<0$，所以必有 $M>0$，当 $t\geqslant t_0$ 时，有

$$\|Q\|\|Q^{-1}\|\cdot\|x_0\|\sum_{k=1}^{r}\|D_k(t-t_0)\|e^{-\frac{\beta}{2}(t-t)_0}\leqslant M,\tag{1.11}$$

将(1.11)代入(1.10)得

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant Me^{-\frac{\beta}{2}(t-t^0)}\|\boldsymbol{x}_0\|,\tag{1.12}$$

利用(1.12)就可得到(1.7)的零点是渐近稳定的。

②当 A 的特征值都具有非正实部且零实部的特征根对应简单初等因子时，则与零实部的特征根 λ_{k_0} 所对应的 Jordan 块 J_{k_0} 的指数为

$$e^{J_{k_0}(t-t_0)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}e^{\lambda_{k_0}(t-t_0)},$$

且 $|e^{\lambda_{k_0}(t-t_0)}|=1$。而所有负实部特征根 λ_{k_0} 对应的 $e^{J_k(t-t_0)}$ 的形式不变。所以(1.10)中一些零实部特征值对应的 $\|D_k(t-t_0)\|e^{-\beta(t-t^0)}$ 将改为正常数 d_{k_0}，而负实部的特征根对应的 $\|D_k(t-t_0)\|e^{-\beta(t-t^0)}$ 不变，(1.12)将变为

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant(M_1+M_2e^{-\frac{\beta}{2}(t-t^0)}\|\boldsymbol{x}^0\|)$$

所以(1.7)的零点是稳定的。

③当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有正实部或零实部的特征根对应多重初等因子时，$e^{J_k(t-t_0)}$ 中必至少有一些当 $t\to\infty$ 时无界，所以(1.7)的零点不稳定的。

下面给出几个著名的定理，证明可参见相应的引文。

定理 1.2(霍尔维茨定理)实系数的 n 次代数方程 $p_0\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$ $(p_0>0)$ 的所有根的实部为负数的充分必要条件是下列行列式

$$\Delta_1 = p_1\ ,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}\ ,\ \ldots\ ,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & \cdots & p_n \end{vmatrix} = p_n\Delta_{n-1},$$

都大于零。这里 Δ_n 中的第 i 行第 j 列的元素为 p_{2i-j}，其中当 $k>n$ 或 $k<0$ 时规定 $p_k=0$。

证明见参考文献[6]。

六、规范形

n 维自治动力系统 $\dot{x}=f(x)$ 的奇点(平动点)$x=x_0$ 时，若导算子 $A=\mathrm{D}f(x_0)$ 不具有零实部的特征根，则 $x=x_0$ 为双曲奇点(平动点)，这时 x_0 邻近的性态可由系统的线性部分 $\dot{x}=Ax$ 确定。但对于非双曲奇点，则不能用线性部分 $\dot{x}=Ax$ 来确定。而要考虑它的二次及二次以上的项，能否依次把这些项化成一定的标准式以分类研究这种奇点的性态？这就是规范形的基本思想。

设 A 已化为标准型，考虑系统

$$\dot{x}=Ax+f_2(x)+f_3(x)+\cdots, \tag{1.13}$$

其中 $f_k(x)\in H_n^k$，它表示 $x=(x_1,x_2,\cdots x_3)$ 的 k 次奇次多项式所组成的空间，$k=2,3,\cdots$。首先通过变换式

$$x=y+h_2(y), \tag{1.14}$$

其中 $h_2(y)\in H_n^2$，希望能选取适当的 $h_2(y)\in H_n^2$ 使(1.13)的二次项尽可能的简化。由于

$$\dot{x}=\dot{y}+Dh_2(y)\dot{y}=(I+Dh_2(y))\dot{y}, \tag{1.15}$$

故

$$\begin{aligned}\dot{y}&=(I+Dh_2(y))^{-1}\dot{x}\\ &=(I+Dh_2(y)+O(|y|^2))\left[A(y+h_2(y))+f_2(y)+O(|y|^2)\right].\end{aligned} \tag{1.16}$$

从而

$$\bar{y}=Ay+g_2(y)+\bar{f}_3(y)+\cdots, \tag{1.17}$$

其中$\bar{f}_3(y)$表示 y 齐次三次的项，$g_2(y)=[f_2(y)-(Dh_2(y)Ay-Ah_2(y))]$，

引人关于 A 的伴随算子

$$ad_A^2:\ H_n^2\to H_n^2\ ,\ ad_A^2(h_2(y))=Dh_2(y)Ay-Ah_2(y), \tag{1.18}$$

则(1.17)可表示为

$$\dot{y}=Ay+f_2(y)-ad_A^2(h_2(y))+\bar{f}_3(y)+\cdots. \tag{1.19}$$

设算子 ad_A^2 在 H_n^2 中的值域为 P^2，将 H_n^2 表为 P^2 及其补空间 Q^2 的直和

$$H_n^2=P^2\oplus Q^2, \tag{1.20}$$

对于(1.13)式的 $f_2(x)$，有以下两种情况：

①若 $f_2(x)\in P^2$，则存在 $h_2(y)\in H_n^2$，使 $ad_A^2(h_2(y))=f_2(y)$。这时关于 y 的方程(1.19)中将不再出现二次项。

②若 $f_2(x)\notin P^2$，则对适当的 $h_2(y)\in H_n^2$，$ad_A^2(h_2(y))\in Q^2$，因此，可按 Q^2 的基底去讨论变换后方程(1.19)的二次项所可能出现的各种形式，连同线性项在内，把方程

(1.16)截断到二次项,所得系统

$$\dot{y}=Ay+g_2(y), \tag{1.21}$$

称为原系统的二次规范形。

类似地,对三次项可依同样的过程讨论,设去变换

$$y=z+h_3(z),$$

其中 $h_3(z)\in H_n^3$,这种变换不会影响到系统中的一次和二次项,故

$$\dot{z}=Az+g_2(z)+[\overline{f}_3(z)-ad_A^3(h_3(z))]+\overline{f}_4(z)+\cdots, \tag{1.22}$$

其中

$$ad_A^3:H_n^3\to H_n^3,\ ad_A^3(h_3(z))=Dh_3(z)Az-Ah_3(z).$$

它和 ad_A^2 依赖于 A 的形式是一样的,只需把 $h_2(z)$ 换成 $h_3(z)$ 即可。同样考虑 ad_A^3 在 H_n^3 中的值域为 P^3,及其他在 H_n^3 中的直和分解的补空间 Q^3,当若 $\overline{f}_3(x)\in P^3$ 时,变换后的系统将不再出现三次项。否则可取适当的 $h_3(z)$,使系统化为

$$\dot{z}=Az+g_2(z)+g_3(z)+\overline{f}_4(z)+\cdots, \tag{1.23}$$

在(1.23)中,截断到 $g_3(z)$ 为止的方程就称为三次规范形,可依 Q^3 中的基底得出它的形式。

重复此步骤可进一步确定四次、五次、…… 规范形。当然,次数越高,形式将越复杂。

第二节 Hamilton 正则方程和正则变换

一、n 体系统 Hamilton 正则方程

n 个看成质点的天体 $p_1,p_2,\cdots p_n$,在相互引力作用下运动,即 n 体系统,它是一个自由度为 $3n$ 的 n 体系统,有 $3n$ 个相互独立的坐标。若采用惯性直角坐标系 $O-xyz$,则 $3n$ 个独立的坐标记为 $x_i,y_i,z_i\ (i=1,2,\cdots,n)$。该系统的总动能 T 为

$$T=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2), \tag{1.24}$$

其中 m_i 为各天体的质量。相应的力函数 U 为

$$U=G\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{m_im_k}{\Delta_{ik}}\right)_{i<k}, \tag{1.25}$$

它与系统的总位能相差一符号,其中 G 为万能引力常数,$\Delta_{ik}^2=(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2$。这时各天体的运动方程为

$$\begin{cases}m_i\ddot{x}_i=\dfrac{\partial U}{\partial x_i},\\ m_i\ddot{y}_i=\dfrac{\partial U}{\partial y_i},\\ m_i\ddot{z}_i=\dfrac{\partial U}{\partial z_i},\end{cases} \tag{1.26}$$

$(i=1,2,\cdots,n)$。

为了讨论问题的需要，常引进 $3n$ 个独立的变量 $q_i(i=1,2,\cdots,3n)$，将直角坐标表示成这 $3n$ 个变量和时间 t 的函数，即作变换

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1,q_2\cdots q_{3n},t) = x_i(q,t), \\ y_i = y_i(q_1,q_2\cdots q_{3n},t) = y_i(q,t), \\ z_i = z_i(q_1,q_2\cdots q_{3n},t) = z_i(q,t), \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n)。 \tag{1.27}$$

只要该变换所有的函数 $x_i(q,t)$，$y_i(q,t)$，$z_i(q,t)$ 存在对一、二阶连续的导数，方程(1.26)式可转化为变量 q_i 的方程，这种变量 q_i 叫做广义坐标，相应的 $\dot{q}_i$ 即为广义速度。q_i 可以是一般的曲线坐标，如球坐标 r,λ,φ。

引进变换(1.27)后，有

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{3n} \dfrac{\partial x_i}{\partial q_i}\dot{q}_j, \\ \dot{y}_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{3n} \dfrac{\partial y_i}{\partial q_i}\dot{q}_j, \\ \dot{z}_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{3n} \dfrac{\partial z_i}{\partial q_i}\dot{q}_j, \end{cases} \tag{1.28}$$

$(i=1,2,\cdots,n)$。

将此关系代入(1.24)式，则总动能变为

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=1}^{3n} A_j\dot{q}_j^2 + 2\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{3n} B_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{3n} C_j\dot{q}_j + D \\ &= T_2 + T_1 + T_0, \end{aligned} \tag{1.29}$$

其中 T_2 为 $\dot{q}_j$ 的二次齐次式，T_1 为 $\dot{q}_j$ 的一次齐次式，T_0 是不含 $\dot{q}_j$ 的项，即

$$T_2 = \sum_{j=1}^{3n} A_j\dot{q}_j^2 + 2\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{3n} B_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k,$$

$$T_1 = \sum_{j=1}^{3n} C_j\dot{q}_j,$$

$$T_0 = D,$$

这里系数 A_j,B_{jk},C_j,D 是 q_j，t 的函数与 $\dot{q}_j$ 无关。显然 T 有如下形式

$$T = T(q,\dot{q},t), \tag{1.30}$$

力函数 U 可表示为

$$U = U(q,t), \tag{1.31}$$

根据上述变换后的 T 和 U 的表达式，可将方程转化为广义坐标 q_i 所满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \tag{1.32}$$

其中 $L = L(q,\dot{q},t) = T + U$。

这就是用广义坐标表示的 n 体问题的运动方程，我们称之为 Lagrange 方程，$L = L(q,\dot{q},t) = T + U$ 称为 Lagrange 函数，它是系统的总动能与总位能之差。

现引进广义动量 p_j

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \tag{1.33}$$

显然 $p_j = p_j(q,\dot{q},t)$ 是 $\dot{q}_j$ 的线性函数。由此引进函数 H

$$H = \sum_{j=1}^{3n} p_j\dot{q}_j - L = \overline{T}_2 - T_0 - U = H(p,q,t), \tag{1.34}$$

其中 $\overline{T}_2$ 是原 T_2 中的 $\dot{q}$ 用 p 表示,引进后可将满足的运动方程化为另一种对称形式

$$\dot{q} = H_p(p,q,t)\ ,\ \dot{p} = - H_q(p,q,t), \tag{1.35}$$

其中 $H_p = \dfrac{\partial H}{\partial p}$, $H_q = \dfrac{\partial H}{\partial q}$。

这个用广义坐标和广义动量作为基本变量的运动方程称为 Hamilton 正则运动方程。H 称为 Hamilton 函数,p,q 称为正则共轭变量。

当变换(1.27)式中不含 t 时,有

$$T = T_2\ ,\ T_1 = T_0 = 0,$$

此时

$$H = T - U = H(p,q)。$$

上述 H 中不含 t 的系统称为定常或自治系统。该系统有

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) = 0\ , \tag{1.36}$$

这表示定常的 Hamilton 系统存在一积分

$$H(p,q) = h\ , \tag{1.37}$$

此即能量积分,h 为能量常数。

二、圆型限制性三体问题的 Hamilton 正则方程

在质心惯性坐标系下(无量纲)小天体运动的 Lagrange 函数是

$$L = T + U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(X,Y,Z,t)\ , \tag{1.38}$$

其中

$$U = \frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2},$$

这里

$$\vec{R}_1 = \vec{R} - \vec{R}'_1\ ,\ \vec{R}_2 = \vec{R} - \vec{R}'_2\ ,$$

$$\vec{R}'_1 = \begin{pmatrix} \mu\cos t \\ \mu\sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{R}'_2 = \begin{pmatrix} -(1-\mu)\cos t \\ -(1-\mu)\sin t \\ 0 \end{pmatrix}。$$

引进广义坐标和广义动量 Q 和 P

$$Q=\vec{R}=(X,Y,Z)^{\mathrm{T}}\ ,\ P=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})^{\mathrm{T}},\tag{1.39}$$

相应的 Hamilton 函数和正则运动方程分别为

$$H=\sum_i P_i\dot{q}_i-L=\frac{1}{2}(P_1^2+P_2^2+P_3^2)-U(Q,t),\tag{1.40}$$

其中

$$\begin{cases}\dot{q}=\left(\dfrac{\partial H}{\partial P}\right)^{\mathrm{T}}=P,\\ \dot{P}=-\left(\dfrac{\partial H}{\partial Q}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\dfrac{\partial U}{\partial Q}\right)^{\mathrm{T}}。\end{cases}$$

因为 U 中显含 t，故是一个非自治的 Hamilton 系统。为此将它转换到(无量纲)质心旋转坐标系(会合坐标系)根据坐标矢量和速度矢量的变换关系，相应的小天体运动的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}L=&\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+(x\dot{y}-y\dot{x})\\&+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+U(x,y,z),\end{aligned}\tag{1.41}$$

其中 $U=\dfrac{1-\mu}{r_1}+\dfrac{\mu}{r_2}$,

这里 $\vec{r}_1=\vec{r}-\vec{r}'_1$，$\vec{r}_2=\vec{r}-\vec{r}'_2$，

$$\vec{r}'_1=\begin{pmatrix}\mu\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\vec{r}'_2=\begin{pmatrix}-(1-\mu)\\0\\0\end{pmatrix}。$$

引进广义坐标和广义动量 q 和 p

$$\begin{aligned}&q=\vec{r}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}\ ,\\&p=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{\mathrm{T}}=\dot{q}+(-q_2,q_1,0)^{\mathrm{T}}=\dot{\vec{r}}+(-y,x,0),\end{aligned}\tag{1.42}$$

相应的 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned}H&=\sum_i p_i\dot{q}_i-L=\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)-U(q)\\&=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+(p_1q_2-p_2q_1)-U(q),\end{aligned}\tag{1.43}$$

正则运动方程

$$\begin{cases}\dot{q}=\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}},\\ \dot{p}=-\left(\dfrac{\partial H}{\partial q}\right)^{\mathrm{T}}。\end{cases}\tag{1.44}$$

三、正则变换

在天体力学中，常用 Hamilton 正则方程组表达天体的运动方程，这是因为正则方程组具有简单的反对称形式，并存在一些原则解法。即用正则变换消去密顿正则方程组的循环坐标，从而得到 Hamilton 正则方程组的解或化简 Hamilton 正则方程组。下面介绍一些正则变换的基础知识。

先给出一些本节的符号规定，向量 $\boldsymbol{x}=(x_i)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$；向量函数 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\\\vdots\\y_n(x)\end{pmatrix}$；

设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为（数量、向量、矩阵）函数，若在其定义域 D 内对 $\boldsymbol{x}$ 的每一个分量存在 k 阶连续导数，则称函数属于 $C^{(k)}$，记为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^{(k)}$；若 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的反函数还有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})\in C^{(k)}$，则称 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})\in C^{(k)}$。$\boldsymbol{f}_x$ 代表 $\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{f}_x=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}, \tag{1.45}$$

另记 $\Gamma=\boldsymbol{y}_x$。

定义 1.5 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\in C^{(1)}$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的向量函数，若存在一数量函数 $S(\boldsymbol{x})\in C^{(2)}$ 使得 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})=S_x=\nabla S$，则称 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 为梯度向量。

这里 $\nabla S=\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_1},\dfrac{\partial S}{\partial x_2},\cdots\dfrac{\partial S}{\partial x_n}\right)$。

定义 1.6 相空间的变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},t)$，若对 $\boldsymbol{x}$，t 的任意的 Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{x},t)$，存在数量函数 $K=K(\boldsymbol{y},t)$，使得

$$\Gamma(\dot{x}+IH_x)=\dot{\boldsymbol{y}}+IK_y, \tag{1.46}$$

则称此变换为正则变换。这里 $I=\begin{pmatrix}0 & E\\-E & 0\end{pmatrix}$，其中 E 为 n 阶单位矩阵。

虽然，定义概念清楚，但不便于应用，我们给出一些定义的充分必要条件。用定义易知以下结论成立。

定理 1.3 变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},t)$ 是正则变换充分必要条件为：对任意 Hamilton 函数 $H=H(\boldsymbol{x},t)\in C^1$，经变换后使向量

$$W(\boldsymbol{y},t)=I\boldsymbol{y}_t+\Gamma I\Gamma^{\mathrm{T}}H_y, \tag{1.47}$$

为梯度向量。

证明：若 $W(\boldsymbol{y},t)$ 为梯度向量，即存在数量函数 $K=K(\boldsymbol{y},t)$，使得 $W(y,t)=K_y(\boldsymbol{y},t)$，即有

$$I\boldsymbol{y}_t+\Gamma I\Gamma^{\mathrm{T}}H_y=K_y(\boldsymbol{y},t), \tag{1.48}$$

又 $\dot{\boldsymbol{y}}=\Gamma\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{y}_t$，$K_y=\Gamma K_x$，