

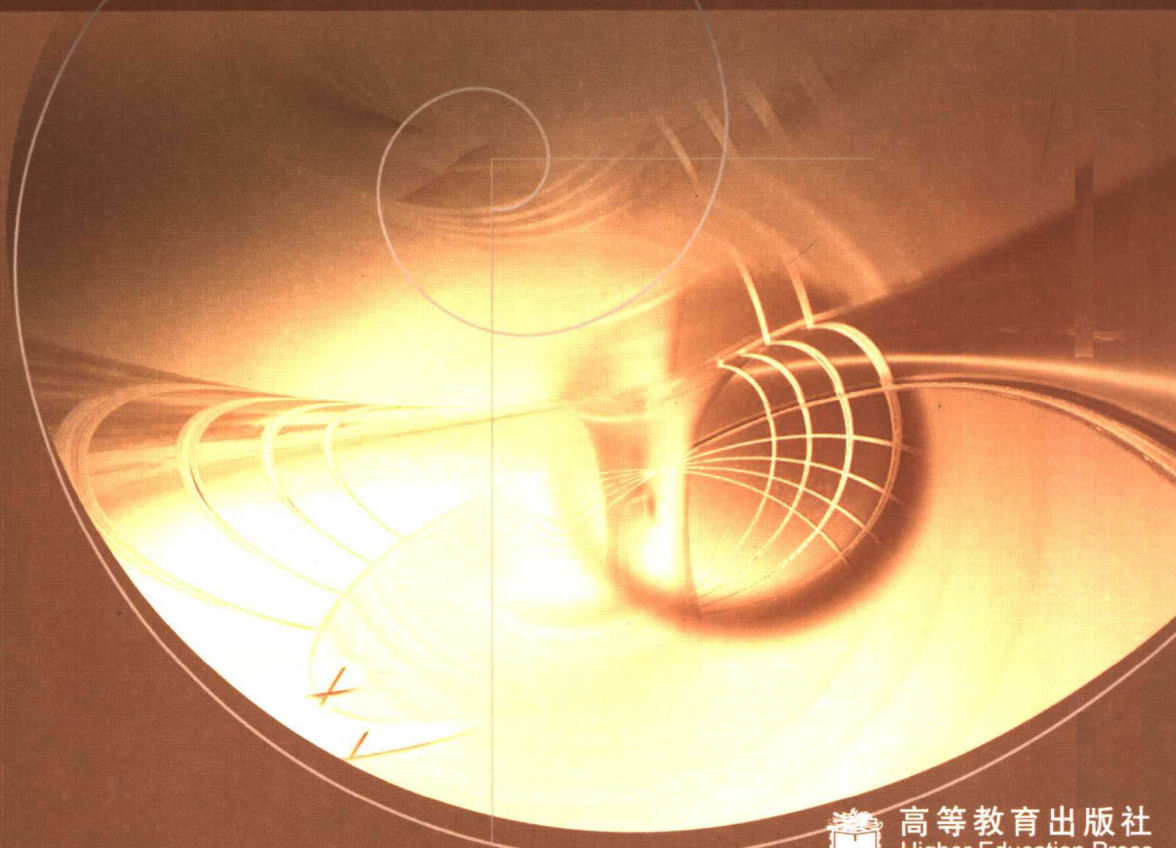


丘成桐 主编
数学翻译丛书

偏微分方程

Partial Differential Equations

- Harold Levine 著
- 葛显良 译
- 叶其孝 校



高等教育出版社
Higher Education Press



丘成桐主编
数学翻译丛书

偏微分方程

Partial Differential Equations

- Harold Levine 著
- 葛显良 译
- 叶其孝 校



高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图字: 01-2007-3410 号

This book was originally published in English by the American Mathematical Society and International Press under the title Partial Differential Equations, ©1997. The present translation was created under license for International Press of Boston, Inc. and is published by permission, such permission having been contributed by the American Mathematics Society.

图书在版编目 (CIP) 数据

偏微分方程/ (美) 莱文 (Levine, H.);
葛显良译, 叶其孝校. —北京:
高等教育出版社, 2007.8

(数学翻译丛书/ 丘成桐主编)

书名原文: Partial Differential Equations

ISBN 978-7-04-017359-8

I. 偏… II. ①莱…②葛…③叶… III. 偏微分
方程 - 高等学校 - 教学参考资料 IV. O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 号

Copyright © by Higher Education Press, International Press

策划编辑 郑轩辕 责任编辑 郑轩辕 封面设计 王凌波 责任绘图 黄建英
版式设计 马静如 责任校对 杨凤玲 责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
			http://www.landaco.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2007年8月第1版
印 张	39.5	印 次	2007年8月第1次印刷
字 数	740 000	定 价	61.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 17359-00

《数学翻译丛书》序

改革开放以后,国内大学逐渐与国外的大学增加交流,无论到国外留学或邀请外地到中国访问的学者每年都有增长,对中国的科学现代化都大有帮助.但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多.基本上所有中国的教科书都是由本国教授撰写,有些已经比较陈旧,追不上时代了.很多国家,例如俄罗斯、日本等,都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容,对数学的研究都大有裨益.高等教育出版社和海外的国际出版社有鉴于此,开始计划做有系统的翻译,由王元院士领导,北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作,参与的教授很多,有杨乐院士,刘克峰教授等.我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学,丰富他们的知识.海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助,我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005年1月

感谢美国数学会为加强国际数学交流和促进数学发展
贡献本书的中文版权。

*Thanks for contributing the translation rights for the Chinese
edition of this book by AMS to strengthen international exchange
and promote the further development of Mathematics.*

序

微分方程不仅在纯粹数学而且在应用数学中都起到了中心的作用,对它的研究已经提供了具有重大理论和实践价值的结果.这些方程,例如以直接的方式表示了 Newton (牛顿) 的动力学运动基本定律 (17 世纪!), 并且使得对行星运动的第一次定量描述成为可能. 随后, 陈述有关流体和带电粒子的运动、热和质量的传递、地震和大气的运动以及无数物理、化学、工程现象的基本定律的微分方程的建立和得到认同显示了微分方程的崇高地位. 科学各领域的研究的开创阶段往往是比较短的, 把所考虑问题的描述性变量联系起来用一个或者多个微分方程的详细阐述是这个阶段的特色; 而在随后时间要更长一点的发展阶段, 中心问题是对上述方程求解 (解析或数值的). 为了从原来的微分方程已有的无穷多个解当中挑选出一个特定的解, 就需要补充的方程或条件; 为确保整个方程组 (它们中的每个方程都可以包含导数) 有唯一解, 充分考虑这些条件就成为必要的了.

通过引进新的概念 (在那个时代!), 以适定问题为特征的求解方程组的巨大进步来临了, 从此这个新概念被认为是数学推理发展中的一个里程碑. 值得注意的是两位新道路的开拓者, Fourier (傅里叶, 1768 — 1830) 和 Heaviside (赫维赛德, 1850 — 1925) 所依靠的是猜测性推理, 他们把为他们的建议提供坚实数学基础的必要工作留给了其他人去做. 借助于微分方程的公式化表述而得到满意解决的方程的数量以及大量可以应用的理论都在稳定地增长; 近年来人们亲眼目睹了迄今还是难以完全解决的微分方程, 即非线性微分方程研究中取得的惊人的进步, 这反映了对理论分析和数值分析两者的精巧的应用.

本书主题主要涉及比较简单的线性方程, 同时伴有由于通常要求得满足事先规定的条件的解而引起的复杂性; 本书旨在给读者一个在经典框架内的直

接方法以及相关理论的广泛的概述。为此，本书讨论了大量的例子而且在每章末提出了更多的例子让读者去求解。作者相信数值方法毫无疑问具有重大价值，不过可以在熟悉了微分方程问题的公式化表述、总的概貌以及精妙之处之后再去学习。我受惠于无数的图书和论文是显然的，或许我为寻求能够传递公式化表述的精美和强健的各种例子的努力也是清清楚楚的。

我要感谢 Isolde Field 和 Vladimir Frenkel 为加工处理打印好的文本所给予的帮助。

Harold Levine

目 录

引 言	1
第一章 偏微分法	3
<p>偏导数概念. 全微分或由自变量的无穷小改变所产生的相关函数的改变. 变量变换. 函数关于原来的自变量和变换后的自变量的偏导数之间的关系. 自变量的变换导致的偏微分方程的转换. 复合函数微分法.</p>	
第二章 偏微分方程的解及其具体确定	16
<p>通过指定数据来确定两个自变量的线性偏微分方程的特解. 沿一条平面曲线给出函数值的一阶方程的解. 沿一条平面曲线分别给出函数值及其法向导数值的二阶方程的解. 特征线和二阶偏微分方程的标准形式. 关于特征线上的数据的特性.</p>	
第三章 偏微分方程和有关的任意函数	28
<p>偏微分方程的解中任意函数的出现. 从自变量和因变量的显式或隐式关系式中消去任意函数后导出的偏微分方程. 描述旋转曲面的偏微分方程. 含有任意函数的偏微分方程确定了一族平行曲面或平面曲线. 完全积分.</p>	
第四章 偏微分方程的特解	35
<p>由多个函数的乘积构成的解, 每个函数是一元函数且是常微分方程的解. 含有分离常数或参变量的解. 偏微分方程和具有物理性质的连续模型或宏观模型之间的联系. 形式不变性和坐标变换. Laplace 微分算子和空间对称性.</p>	

第五章 相似解 46

根据自变量的无量纲组合构造的解. 保持偏微分方程形式不变的特殊的自变量/因变量变换的构造性作用. 适当的变量替换后偏微分方程转换为常微分方程. 变换群. 与流体流过平板相关的相似解.

第六章 适定问题 61

确定解的连续依赖性作为提得正确的问题或适定问题的一条准则. 不适定问题的例子.

第七章 一阶线性偏微分方程的一些预备知识 65

一般的两个自变量的一阶线性偏微分方程与沿特征平面曲线或迹线的一阶常微分方程的等价性. 在确定解的存在区域时迹线的作用. 在迹线的两侧有不同表示式的复合解及其导数在迹线处的不连续性. 能够消去偏微分方程中一项偏导数的与迹线族有关的自变量变换.

第八章 两个自变量的一阶线性偏微分方程 71

用三维曲面对解作几何描述. 解曲面的线元和切平面. 用一组带参变量的常微分方程来确定空间特征曲线. 为比较求解步骤的说明性例子. 初值问题: 包含一条空间曲线的解曲面的选取. 特征曲线和指定数据的曲线的参变量表示的结合使用. 非齐次偏微分方程的一个例子. 描述特征曲线的带有一个参变量的三个常微分方程的一般特性.

第九章 一阶非线性偏微分方程. 84

单向车流模型中提出的拟线性方程与单向波运动的线性方程相对照. 利用特征常微分方程以及初始条件来分析一个特例. 解对初始数据的敏感依赖性. 相交迹线和迹线的包络. 非均匀解的性态. 通过在其上指定数据的空间曲线的拟线性偏微分方程的积分曲面. 借助于乘子的积分法. 积分曲面与切平面. 偏微分方程的隐式解和通解.

第十章 某些技术问题和有关的偏微分方程 100

守恒型关系以及在假设了模型的互相联系的描述性度量间的函数依赖关系之后转换为偏微分方程. 对于可变波长和频率的波串的详细阐述. 群速度和能量密度的确定. 基于守恒关系和吸附剂与溶质间相互作用的速率定律的色谱模型的分析.

第十一章 两个自变量的一阶偏微分方程, 一般理论. 109

三维解曲面的几何: 在任何一点处偏微分方程的积分平面元及其锥包络. 曲面带或平面元集. 积分特征带. 积分表面上的特征曲线的五个参数微分方程. Cauchy 问题: 确定过一条预先选定的空间曲线的积分曲面.

第十二章 多个自变量的一阶偏微分方程 ····· 117

特征曲线的多参数常微分方程组. 描述偏微分方程解的该常微分方程组的积分. 非齐次拟线性偏微分方程. Euler 方程及其解.

第十三章 边值问题的 Fourier 方法来源详述 ····· 123

Fourier 对带有辅助条件的二阶偏微分方程的划时代的研究工作. 他的书 (1822) 中有关由两条平行线以及与它们垂直的一段直线所围的半无限平面区域上 Laplace 方程解的细节, 其中在两条平行线上取值为零, 而在垂直线段上取值为 1; 解释为平板中的定常温度分布. 包含在两条平行边界线上取值为零且确保其正常局部性态的特殊三角函数组成的分离变量级数解的形成. 把一个常数 (或边界数据) 与一个三角级数及其系数的确定联系起来. 验证是解. 关于 Fourier 分析的意义及其技术缺陷的评注.

第十四章 本征函数与本征值 ····· 130

本征函数是由一个常微分方程和一对分开的边界或端点条件组成的齐次方程组^①的非平凡解; 本征值是使得该齐次方程组存在非平凡解的特殊的参数值. 与偏微分方程边/初值问题的联系. 由不同的边界条件区分的热传递或热扩散线性偏微分方程的特殊例子. 本征函数的积分性质, 即两个不同的本征函数之积在边界点之间的区间上的积分为零. 由给定的初始条件确定的本征函数展开. 由本征函数基的积分性质来决定这种展开中的系数. 既有正本征值又有负本征值的可能性及其解释. 本征函数的图形.

第十五章 本征函数与本征值 (续) ····· 145

周期边界条件和具有共同本征值的线性无关本征函数的存在性. 包含不同本征函数集的级数中系数的确定. 带有依赖于参数的边界条件的修正扩散偏微分方程; 本征值对参数的依赖性及其物理解释.

第十六章 非正交本征函数 ····· 153

本征函数集中不同本征函数的乘积的积分不为零的例子: 新的特点, 分别包含关于自变量的一阶偏导数的边界条件. 确定基于这种本征函数展开中单个系数的方法.

第十七章 Fourier 分析的进一步例子 ····· 157

边值给定的情况下圆域内 Laplace 方程的解. 要求所建立的本征函数基具有单值性和正则性的条件下应用极坐标. 本征函数级数的求和以及把解表为单个的定积分的形式. 一对耦合的一阶偏微分方程的边/初值问题的分析.

^① 实际上就是我们通常用的术语“初边值问题”, 不过本书作者喜欢用 system 一词, 中译本把它译为方程组或组. —— 校注

第十八章 非齐次问题 ····· 164

具有一个系数参数以及在两个不同点处的一对边界条件 (其中一个是非齐次边界条件) 的一个常微分方程; 解表为相应的齐次问题的本征函数或非平凡解的级数. 验证它是解. 由扩散偏微分方程、两个非齐次边界条件和一个初始条件组成的方程组的解, 分两部分来求这个解, 其一显然要满足非齐次边界条件, 而另一部分则由直接应用 Fourier 分析得到. 一个例子: 非齐次偏微分方程有一个特解, 从而便于构造该方程的完全解. 用相关的本征函数的展开式来直接求解微分方程和边界条件都是非齐次方程组的解. 从各常微分方程以及初始条件得到展开式中的系数函数. 有关解的渐近 (或长时间) 行为的详细说明的例子以及注解.

第十九章 局部热源 ····· 180

用处处连续但有不连续的一阶导数的温度分布来描述局部热源, 该不连续的一阶导数蕴涵着热流量从源点消散. 定常源两边的温度的本征函数展开. 由一组常微分方程导出的解的渐近式以及相容性检验. 位于闭圆环中的一般时变热源和瞬时作用热源.

第二十章 一种非均一结构的问题 ····· 188

由两段组成的复合杆中的一维扩散, 在两段的热参数不同 (但是每一段中是均匀的) 而且长度也不同. 在各自段中偏微分方程的适当解并要求解在接触点处一致. 本征函数及其在确保满足初始条件中的作用.

第二十一章 其他的本征函数/本征值问题 ····· 195

弹性波偏微分方程以及在特殊边界条件下出现的复本征值. 具有混合偏导数项的修正二阶波动方程, 以及复值本征函数. 利用本征函数级数来满足一对初始条件. 四阶偏微分方程的本征函数和本征值.

第二十二章 解的唯一性 ····· 211

给定一个初始条件和一对边界条件后齐次扩散偏微分方程解的唯一性的解析证明. 由自变量的两对值所确定的平面矩形区域上扩散方程连续 (无源) 解的最大值原理. 利用区域上的积分和曲线积分结合微分恒等式或守恒关系得到扩散和波动偏微分方程解的性质.

第二十三章 解的替代表示 ····· 221

具有唯一解的适定问题解的不同表示形式是可能的; 对包含扩散偏微分方程的方程组在时间的大/小值处各自的级数解是快速收敛的证明, 因此具有互补的作用.

第二十四章 其他微分方程及有关推论 ····· 233

依赖于位置的热参数和材料参数情形下的扩散偏微分方程; 相关的满足变系数常微分方程的 Sturm-Liouville 本征函数类. 质量流偏微分方程以及在横截面可变的角状区域中的小振幅声激发偏微分方程. 利用适当的坐标系变换偏微分方程后变系数的出现.

第二十五章 二阶常微分方程 ····· 246

不同形式的线性二阶齐次常微分方程和标准形. 由初始条件确定的精确解及其零点. 具有交错或交替零点的线性无关解. 由一对常微分方程导出的解的特性, 其中一个称为比较方程并由不同的系数函数与另一个方程相区别. 有关反映常微分方程系数函数中参变量变化的零点的位置和数目的结论. 解的表示中的辐角函数和相位函数及其在指定边界条件中的作用. 关于由非齐次常微分方程和非齐次边界条件构成的方程组的注解.

第二十六章 边值问题和 Sturm-Liouville 理论 ····· 265

关于由 n 阶常微分方程和 n 个在所选定区间的端点处给出的由所考虑的函数及其导数线性组合 (边界条件) 组成的线性方程组的理论. 相容性和包含一个参变量. 以常微分方程所表示的微分算子及其伴随算子为基础的详细分析. 线性齐次方程组及其伴随方程组; 自伴性要求. 带有一个参数齐次方程组的本征函数和本征值. 自伴方程组和正交本征函数. 本征值的性质. 利用边界条件的不同表示来讨论二阶方程组.

第二十七章 Green 函数和边值问题 ····· 286

二阶线性自伴常微分方程的 Green 函数的性质: 两个自变量的函数, 其正则性在两个自变量值相等的点处失效, 这些点处函数的一阶导数有间断. Green 函数关于交换其自变量的对称性. 从具有一对齐次边界条件的扩散偏微分方程中提出的特殊的 Green 函数表示式. 用 Green 函数的积分形式表示的非齐次常微分方程的解. 通过 Green 函数把齐次边值问题重新表示为积分方程. 积分方程与本征函数和本征值的联系. Green 函数在求解非齐次边值问题中的应用. 能求矩形区域内沿边界给定任意边值的 Laplace 方程的解的多维 Green 函数.

第二十八章 Green 函数及其推广 ····· 312

当对应的齐次方程组存在非平凡解时由一个非齐次常微分方程和一对齐次边界条件构成的方程组解的非唯一性. 在这种情形下修正 Green 函数的定义和构造方法: Green 函数关于其自变量对称的一个例子. 包含一个参数的 Green 函数及其用有关的本征函数和本征值表示的双线性展开式; 当参数与一个本征值重合时展开式中奇异项的出现. 伴随 Green 函数及其类似的展开式. 伴随方程的共同特点和基于齐次方程组及其伴随方程组的解的 Green 函数表示式.

第二十九章 偏微分方程、Green 函数和积分方程 347

两端点固定的弦在关于时间是周期的在弦上任一点处可以任意变化的外力的作用下产生的横振动的偏微分方程. 引进适当的 Green 函数用单个的积分方程来置换该运动方程. 带有许多辅助细节的求解这类积分方程的方法. 弦问题解的特点以及关于共振性态的评注. 带有关于时间周期变化的源的非齐次扩散偏微分方程; 重新表为积分方程, 无论源的频率怎样, 验证该问题的解是唯一的. 由一个非齐次常微分方程和一对齐次边界条件构成的问题的积分方程重新表示得到一般结论.

第三十章 奇异和无限区间问题 368

由无限区间和/或(常微分方程最高阶导数的)系数在一个端点为零所刻划的边值问题. 对照两个(单变量) Green 函数的特点: 一个由常系数微分算子所定义, 它关于其参变量具有极点型的奇点, 另一个算子的最高阶(二阶)导数的系数在一个端点处为零, 它展示了相应的分枝/切割性质的奇点. 两个 Green 函数的组合用来表示另一个与偏微分方程及其替代表示式相联系的 Green 函数. 当原来的有限区间变成半无限区间时 Green 函数的极限性态, 相应的离散本征值谱由连续谱替代. 在无穷远处适当的边界条件. 量子力学中的线性振子; 一个例子揭示了, 尽管自变量的区间是无限的, 但是存在离散本征值谱.

第三十一章 正交性及其衍生结果 396

基于在等距点处与三角多项式拟合的内插公式中系数的确定; 当多项式的次数变成无限而且已经指定三角级数的表示式时系数的极限形式. 函数的正交系和规范正交系. 用规范正交级数表示平方可积(或 L_2) 函数. 平均收敛 L_2 函数的均方逼近. Bessel 不等式和 Parseval 等式. 完全规范正交集.

第三十二章 Fourier 展开: 概述 419

变量项级数^①: 一致收敛性和相关的比较检验法. 三角(或 Fourier)级数的逐项积分和逐项微分. 非一致收敛性和 Gibbs (吉布斯) 现象. 扩散偏微分方程的初/边值问题, 验证所生成的级数解满足非齐次边界条件. Fourier 级数的部分和与收敛准则.

第三十三章 Fourier 展开式: 各种例子 448

起源于分析学、几何学和技术建模中的 Fourier 级数的详细说明. 关于各种 Fourier 级数表示式的特点的评注.

^① 即函数级数. —— 校注

第三十四章 Fourier 积分和 Fourier 变换 482

从定义在有限区间上的函数的 Fourier 级数展开到定义在无限区间上的函数的 Fourier 积分的过渡, Fourier 积分的复形式以及可积函数的 Fourier 变换, 具有奇/偶对称性的 Fourier 积分表示式, 平方可积函数及其 Fourier 变换的一个关系式, Fourier 积分在求解无界区域上的扩散偏微分方程的应用, 关于描述在流体中溶质浓度的修正扩散方程的 Fourier 积分的分析.

第三十五章 Fourier 变换的应用 501

在无界带域上的两条平行边界上给值并给出无穷远处的性态的 Laplace 偏微分方程; 类似的在一个平面象限中的解, 无界区域上一维扩散偏微分方程 Green 函数的构造和讨论, 根据 Fourier 正弦积分表示式对球外径向扩散问题的分析, 利用多重 Fourier 积分来解三个自变量的 Poisson (或非齐次 Laplace) 偏微分方程.

第三十六章 Legendre 多项式和有关展开式 522

包含径向坐标和 (球面) 极角坐标函数的 Laplace 方程的分离变量解, 角因子常微分方程的讨论以及正则多项式解的确定, 用 Legendre 多项式和径向坐标的幂表示的在极轴有奇性的 Laplace 方程基本源解的展开, Legendre 多项式的正交性、规范化和母函数, 基于 Legendre 多项式的 Fourier 型展开式, 用包含 Legendre 多项式的级数来表示半空间上的定常温度分布, 在半空间的平面边界上给出温度值.

第三十七章 Bessel 函数和有关展开式 540

用空间柱坐标写出的 Laplace 偏微分方程的分离变量解中出现的二阶 (变) 系数柱函数常微分方程, 球极坐标系的波动偏微分方程以及包含柱函数的一类分离变量解, 柱函数常微分方程的线性无关解, Bessel 函数和 Neumann 函数; 它们在自变量取大/小值时的渐近性态, 作为自伴边值问题的本征函数的 Bessel 函数, 柱函数的递推关系、级数表示和积分, Fourier-Bessel 级数展开和 Fourier-Bessel 积分变换.

第三十八章 双曲型方程 577

借助于特征曲线和特征变量对双曲型偏微分方程的分析, 在一对特征线段上指定函数值的简单的两个自变量的偏微分方程的解, 指定数据的正则性和解的正则性之间的联系, 解的依赖区域, 一维波动偏微分方程连同一对初始条件和边界条件, 对照特征线方法和分离变量法, 在无界区域情形下解的 Fourier 积分形式, 修正波动方程的研究.

后 记	607
参考书目	608
索 引	609

引言

偏微分方程 (PDE) 学科 (从 18 世纪算起) 有很长历史而且有一个活跃的当代发展阶段; 早期阶段 (分别集中注意于拉紧弦的振动和通过固体的热流) 促进了数学分析的具有重大意义的发展 (如函数和积分更广的概念, 三角级数或 Fourier 级数表示式的存在性), 同时偏微分方程与各式各样的数学、物理和技术问题的直接相关性在继续发展. 本书的目的是呈现本学科的适当广的引导性陈述, 同时充分关注分析细节、应用和历史渊源.

正如偏微分方程这个名称所蕴涵的含义, 它包含且确定多于一个自变量的函数, 而包含一个自变量函数的微分方程称为常微分方程 (ODE). 这样, 设 x, y 表示一对自变量而 $w(x, y)$ 是依赖于 x, y 的函数, 那么采用记号

$$\begin{aligned}w_x &= \frac{\partial w}{\partial x}, & w_y &= \frac{\partial w}{\partial y}, \\w_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & w_{yy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & w_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\&&&&& \dots\end{aligned}$$

后, 具有形为

$$F(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}, \dots) = 0$$

的关系式就称它为对函数 $w(x, y)$ 的偏微分方程. 偏微分方程的阶是指该方程中出现的最高阶导数的阶. 线性偏微分方程是其生成函数 F 线性地依赖于除 x, y 以外的它的所有自变量; 因此, 两个自变量 x, y 的一阶和二阶线性偏微分方程的一般形式分别是

$$L_1[w] = a(x, y)w_x + b(x, y)w_y + c(x, y)w = g(x, y)$$

和

$$L_2[w] = a(x, y)w_{xx} + 2b(x, y)w_{xy} + c(x, y)w_{yy} \\ + d(x, y)w_x + e(x, y)w_y + f(x, y)w = g(x, y),$$

分别带有不同的系数函数 $a(x, y), \dots, f(x, y)$ 和另一个不包含 w 的项 $g(x, y)$. 称 $g(x, y) = 0$ 的线性方程

$$L[w] = 0$$

为齐次线性方程; 且非齐次线性方程 $L[w] = g(x, y)$ 的任何两个不同解的差也是 $L[w] = 0$ 的一个解.

拟线性偏微分方程是其中最高阶导数线性地出现的方程, 可用以下特殊方程作例子

$$(1 + w^2)w_x + w_y = x^2.$$

如果一个拟线性偏微分方程中最高阶导数的系数只是自变量的函数, 该方程称为几乎线性的或半线性的, 例如

$$x^2w_{xx} + 4xyw_{yy} + ww_x + w^2 = 0.$$

对多于两个自变量的偏微分方程, 可用类似的定义和特性描述.

其解决依赖于求解偏微分方程有实际和理论意义的问题不胜枚举; 所以只需提到在一般情形下偏微分方程的中心作用就足够了, 如扩散和波现象的具体分析、连同声暴的特殊分析、非正则粒子 (或布朗 (Brown)) 运动、过给定曲线的极小面积曲面、电话交换机上的呼叫……. 线性偏微分方程的相对简单性, 就像线性常微分方程那样, 在理论和应用两方面都有大量文献. 某些流体表面上孤立波模型的典型非线性偏微分方程和其他有物理意义的方程组在最近几十年激起了令人鼓舞的值得注意的发展, 而且没有任何发展减慢的迹象; 因此偏微分方程一直是一个重要而且活跃的学科.