丘成桐主编

数学翻译丛书

偏微分方程

Partial Differential Equations

Harold Levine 著

葛显良 译

叶其孝 校

高等教育出版社

Higher Education Press

丘成桐主编
数学翻译丛书

偏微分方程
Partial Differential Equations

■ Harold Levine 著
■ 葛显良 译
■ 叶其孝 校

高等教育出版社
Higher Education Press
International Press

图字: 01–2007–3410 号

This book was originally published in English by the American Mathematical Society and International Press under the title Partial Differential Equations, ©1997. The present translation was created under license for International Press of Boston, Inc. and is published by permission, such permission having been contributed by the American Mathematics Society.

图书在版编目 (CIP) 数据

偏微分方程/ (美) 莱文 (Levine, H.);
葛显良译, 叶其孝校. —北京:
高等教育出版社, 2007.8
(数学翻译丛书/ 丘成桐主编)
书名原文: Partial Differential Equations
ISBN 978–7–04–017359–8

I. 偏··· II.①莱···②葛··· ③叶··· III.偏微分
方程 - 高等学校 - 教学参考资料 IV.O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 号

Copyright © by Higher Education Press, International Press

策划编辑 郑轩辕 **责任编辑** 郑轩辕 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 黄建英
版式设计 马静如 **责任校对** 杨凤玲 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 – 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 – 810 – 0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 – 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		

开　　本	787 × 960　1/16	版　　次	2007 年 8 月第 1 版
印　　张	39.5	印　　次	2007 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	740 000	定　　价	61.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　17359 – 00

《数学翻译丛书》序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流，无论到国外留学或邀请外地到中国访问的学者每年都有增长，对中国的科学现代化都大有帮助．但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多．基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了．很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益．高等教育出版社和海外的国际出版社有鉴及此，开始计划做有系统的翻译，由王元院士领导，北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作，参与的教授很多，有杨乐院士，刘克峰教授等．我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学，丰富他们的知识．海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助，我们谨此鸣谢．

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

感谢美国数学会为加强国际数学交流和促进数学发展贡献本书的中文版权。

Thanks for contributing the translation rights for the Chinese edition of this book by AMS to strengthen international exchange and promote the further development of Mathematics.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

序

微分方程不仅在纯粹数学而且在应用数学中都起到了中心的作用, 对它的研究已经提供了具有重大理论和实践价值的结果. 这些方程, 例如以直接的方式表示了 Newton (牛顿) 的动力学运动基本定律 (17 世纪!), 并且使得对行星运动的第一次定量描述成为可能. 随后, 陈述有关流体和带电粒子的运动、热和质量的传递、地震和大气的运动以及无数物理、化学、工程现象的基本定律的微分方程的建立和得到认同显示了微分方程的崇高地位. 科学各领域的研究的开创阶段往往是比较短的, 把所考虑问题的描述性变量联系起来用一个或者多个微分方程的详细阐述是这个阶段的特色; 而在随后时间要更长一点的发展阶段, 中心问题是对上述方程求解 (解析或数值的). 为了从原来的微分方程已有的无穷多个解当中挑选出一个特定的解, 就需要补充的方程或条件; 为确保整个方程组 (它们中的每个方程都可以包含导数) 有唯一解, 充分考虑这些条件就成为必要的了.

通过引进新的概念 (在那个时代!), 以适定问题为特征的求解方程组的巨大进步来临了, 从此这个新概念被认为是数学推理发展中的一个里程碑. 值得注意的是两位新道路的开拓者, Fourier (傅里叶, 1768 — 1830) 和 Heaviside (赫维赛德, 1850 — 1925) 所依靠的是猜测性推理, 他们把为他们的建议提供坚实数学基础的必要工作留给了其他人去做. 借助于微分方程的公式化表述而得到满意解决的方程的数量以及大量可以应用的理论都在稳定地增长; 近年来人们亲眼目睹了迄今还是难以完全解决的微分方程, 即非线性微分方程研究中取得的惊人的进步, 这反映了对理论分析和数值分析两者的精巧的应用.

本书主题主要涉及比较简单的线性方程, 同时伴有由于通常需要求得满足事先规定的条件的解而引起的复杂性; 本书旨在给读者一个在经典框架内的直

接方法以及相关理论的广泛的概述. 为此, 本书讨论了大量的例子而且在每章末提出了更多的例子让读者去求解. 作者相信数值方法毫无疑问具有重大价值, 不过可以在熟悉了微分方程问题的公式化表述、总的概貌以及精妙之处之后再去学习. 我受惠于无数的图书和论文是显然的, 或许我为寻求能够传递公式化表述的精美和强健的各种例子的努力也是清清楚楚的.

我要感谢 Isolde Field 和 Vladimir Frenkel 为加工处理打印好的文本所给予的帮助.

Harold Levine

目　　录

① 实际上就是我们通常用的术语 “初边值问题”, 不过本书作者喜欢用 system 一词, 中译本把它译为方程组或组. —— 校注

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

① 即函数级数. —— 校注

引　言

偏微分方程 (PDE) 学科 (从 18 世纪算起) 有很长历史而且有一个活跃的当代发展阶段; 早期阶段 (分别集中注意于拉紧弦的振动和通过固体的热流) 促进了数学分析的具有重大意义的发展 (如函数和积分更广的概念, 三角级数或 Fourier 级数表示式的存在性), 同时偏微分方程与各式各样的数学、物理和技术问题的直接相关性在继续发展. 本书的目的是呈现本学科的适当广的引导性陈述, 同时充分关注分析细节、应用和历史渊源.

正如偏微分方程这个名称所蕴涵的含义, 它包含且确定多于一个自变量的函数, 而包含一个自变量函数的微分方程称为常微分方程 (ODE). 这样, 设 x, y 表示一对自变量而 $w(x, y)$ 是依赖于 x, y 的函数, 那么采用记号

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x},\ \ w_y = \frac{\partial w}{\partial y},$$
$$w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ w_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$
$$\cdots$$

后, 具有形为

$$F(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}, \cdots) = 0$$

的关系式就称它为对函数 $w(x, y)$ 的偏微分方程. 偏微分方程的阶是指该方程中出现的最高阶导数的阶. 线性偏微分方程是其生成函数 F 线性地依赖于除 x, y 以外的它的所有自变量; 因此, 两个自变量 x, y 的一阶和二阶线性偏微分方程的一般形式分别是

$$L_1[w] = a(x, y)w_x + b(x, y)w_y + c(x, y)w = g(x, y)$$

和

$$L_2[w] = a(x,y)w_{xx} + 2b(x,y)w_{xy} + c(x,y)w_{yy}$$
$$+d(x,y)w_x + e(x,y)w_y + f(x,y)w = g(x,y),$$

分别带有不同的系数函数 $a(x,y),\cdots,f(x,y)$ 和另一个不包含 w 的项 $g(x,y)$. 称 $g(x,y)=0$ 的线性方程

$$L[w] = 0$$

为**齐次线性方程**; 且非齐次线性方程 $L[w]=g(x,y)$ 的任何两个不同解的差也是 $L[w]=0$ 的一个解.

拟线性偏微分方程是其中最高阶导数线性地出现的方程, 可用以下特殊方程作例子

$$(1+w^2)w_x + w_y = x^2.$$

如果一个拟线性偏微分方程中最高阶导数的系数只是自变量的函数, 该方程称为**几乎线性的**或**半线性的**, 例如

$$x^2 w_{xx} + 4xyw_{yy} + ww_x + w^2 = 0.$$

对多于两个自变量的偏微分方程, 可用类似的定义和特性描述.

其解决依赖于求解偏微分方程有实际和理论意义的问题不胜枚举; 所以只需提到在一般情形下偏微分方程的中心作用就足够了, 如扩散和波现象的具体分析、连同声暴的特殊分析、非正则粒子 (或布朗 (Brown)) 运动、过给定曲线的极小面积曲面、电话交换机上的呼叫 ······. 线性偏微分方程的相对简单性, 就像线性常微分方程那样, 在理论和应用两方面都有大量文献. 某些流体表面上**孤立波**模型的典型非线性偏微分方程和其他有物理意义的方程组在最近几十年激起了令人鼓舞的值得注意的发展, 而且没有任何发展减慢的迹象; 因此偏微分方程一直是一个重要而且活跃的学科.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com