Б. П. 吉米多维奇 Б.П.ДЕМИДОВИЧ

5

数学分析

习题全解 [五] ■ 原题译自俄文最新版

南京大学数学系

许宁 廖良文 编著

杨立信 毕秉钧 译

安徽人民出版社

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解

（五）

南京大学数学系
博士生导师　许宁副教授　编著
　　　　　　廖良文教授

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解.5/(苏)吉米多维奇著.许宁,廖良文编著.—合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 978-7-212-02699-8

Ⅰ.吉…　Ⅱ.①吉…②许…③廖…　Ⅲ.数学分析-高等学校-解题
Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第113596号

责任编辑　王玉法
装帧设计　刘晓莉
出版发行　安徽人民出版社
地　　址　合肥市金寨路381号九州大厦　邮编:230063
发 行 部　0551-2833066　0551-2833099(传真)
经　　销　新华书店
印　　刷　华东有色地质勘查局研究所印刷厂
开　　本　850×1168　1/32
印　　张　18
字　　数　430千
版　　次　2007年9月第2版
印　　次　2007年9月第1次印刷
标准书号　ISBN978-7-212-02699-8
定　　价　22.00元

前　言

数学分析是大学数学系的一门重要的必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。现安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》。新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，该习题集有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答，应安徽人民出版社的同志邀请我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。在本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

2007 年 7 月

目　录

第六章　多变量函数的微分运算

§1. 函数的极限　连续性

1. **函数的极限**　令函数 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在具有聚点 P_0 的集 E 上有定义. 若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$，以致 $|f(P)-A|<\varepsilon$；若仅仅是 $P\in E$ 及 $0<\rho(P_1,P_0)<\delta$，这里 $\rho(P_1,P_0)-P$ 与 P_0 两点之间的距离. 这就是人们常说的：

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2. **连续性**　若：

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$$

则函数被称为在 P_0 点上是连续的. 若它在该域的每一个点上都是连续的，则函数 $f(P)$ 在本域内是连续的.

3. **一致连续性**　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 存在仅仅取决于 ε 的 $\delta>0$，以致对于 G 域的任意点 P' 和 P'' 将成立不等式：

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon,$$

若仅仅是 $\rho(P',P'')<0$ 则称函数 $f(P)$ 在 G 域内是一致连续的.

在有界和封闭域内连续的函数在这个域内是一致连续的.

确定并描绘下列函数的存在域：

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

解　由 $u=x+\sqrt{y}$ 知 $y\geqslant 0$，式子有意义，于是存在域为 $\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty, y\geqslant 0\}$，即上半平面，如图 6.1

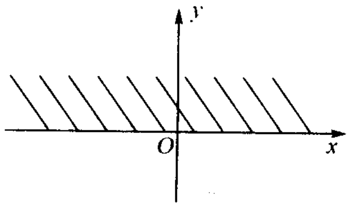

图 6.1

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解 由 $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$,

知当 $1-x^2\geqslant 0$ 且 $y^2-1\geqslant 0$ 时，即 $|x|\leqslant 1$, $|y|\geqslant 1$ 时函数有意义，于是存在域为 $\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, |y|\geqslant 1\}$,

如图 6.2 的阴影部分

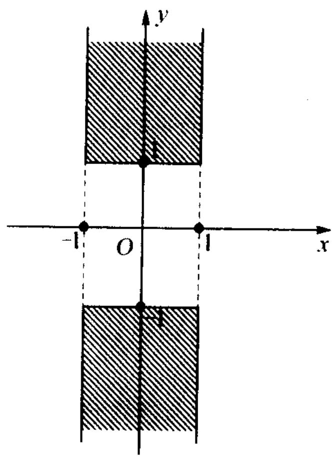

图 6.2

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 由 $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 知，当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时，此式有意义，于是存在域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，如图 6.3 的阴影部分

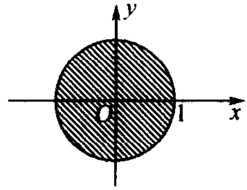

图 6.3

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解　由 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 知，此式有意义的范围是 $x^2+y^2>1$，于是存在域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$，如图 6.4 的阴影部分.

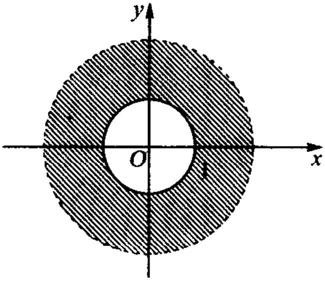

图 6.4

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解　由题意有，存在域为 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$，如图 6.5 的阴影部分所示.

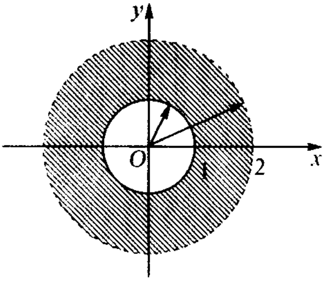

图 6.5

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 由题意,存在域$\{(x,y)\mid x\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x\}$,即

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$\cap\ \{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2<1\},$$

如图 6.6 的阴影部分所示.

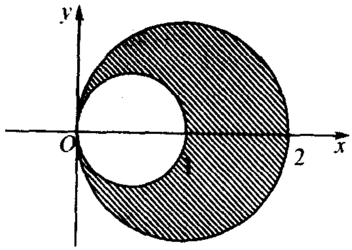

图 6.6

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解 由题意,存在域为$\{(x,y)\mid -1\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$,图形如图 6.7 的阴影部分所示.

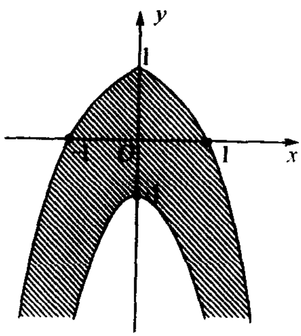

图 6.7

3143. $u = \ln(-x-y)$.

解　由题意，存在域为$\{(x,y) \mid x+y<0\}$，图形如图 6.8 的阴影部分所示.

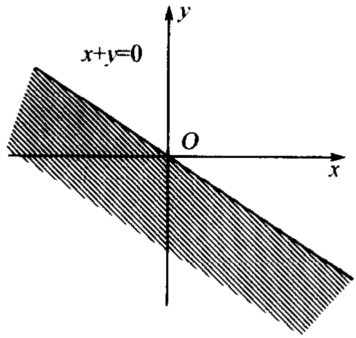

图 6.8

3144. $u = \arcsin \dfrac{y}{x}$.

解　存在域为$\left\{(x,y) \middle| \left|\dfrac{y}{x}\right| \leqslant 1\right\}$，图形如图 6.9 的阴影部分所示.

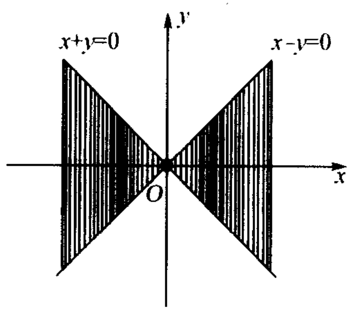

图 6.9

3145. $u = \arccos \dfrac{x}{x+y}$.

解　由

$$u=\arccos\frac{x}{x+y}$$

知 $$\left|\frac{x}{x+y}\right|\leqslant 1,$$

解之有$\begin{cases}y\geqslant 0\\ y\geqslant -2x\end{cases}$或$\begin{cases}y\leqslant 0\\ y\leqslant -2x\end{cases}$，且 x,y 不能同时为零，所以存在域为$\{(x,y)\mid y\geqslant 0,y\geqslant -2x,x,y$ 不能同时为零$\}\cup\{(x,y)\mid y\leqslant 0,y\leqslant -2x,x,y$ 不能同时为零$\}$

图形如图 6.10 的阴影部分所示.

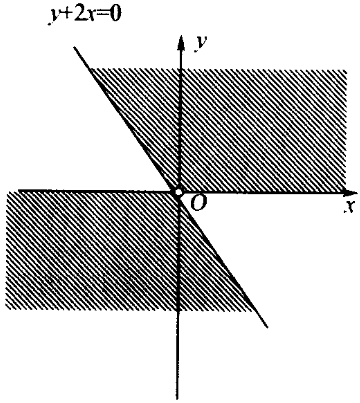

图 6.10

3146. $u=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

解 存在域在

$$\left\{(x,y)\left|\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1,\ |1-y|\leqslant 1,y\neq 0\right.\right\}$$
$$=\{(x,y)\mid y^2\geqslant x,0<y\leqslant 2\}$$
$$\cap\{(x,y)\mid y^2\geqslant -x,0<y\leqslant 2\},$$

图形如图 6.11 的阴影部分所示.

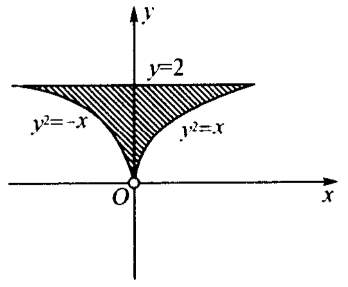

图 6.11

3147. $u=\sqrt{\sin\left(x^{2}+y^{2}\right)}$.

解 存在域为

$$\{(x,y)\mid 2k\pi\leqslant x^{2}+y^{2}\leqslant(2k+1)\pi,k=0,1,2,\cdots\},$$

图形如图 6.12 的阴影部分所示.

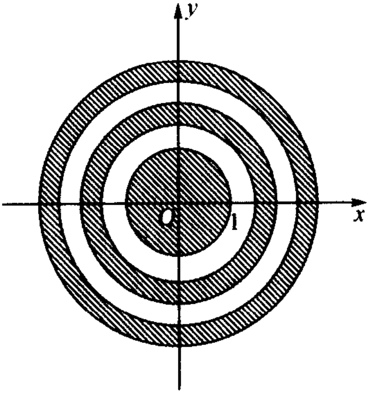

图 6.12

3148. $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$.

解 存在域为

$$\left\{ (x,y,z) \middle| \left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1, x^2+y^2 \neq 0 \right\}$$

$$= \{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2 \geqslant 0, x^2+y^2 \neq 0\},$$

图形如图 6.13 的阴影部分所示.

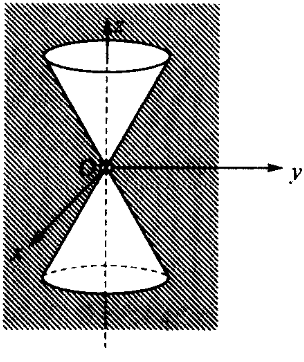

图 6.13

3149. $u = \ln(xyz)$.

解　存在域为$\{(x,y,z) \mid xyz > 0\}$,

即 $x>0, y>0, z>0$;或 $x>0, y<0, z<0$;或 $x<0, y<0, z>0$;或 $x<0, y>0, z<0$ 其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体,但不包括坐标面,图形大家熟知,省略.

3150. $u = \ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解　存在域$\{(x,y,z) \mid -x^2-y^2+z^2>1\}$,这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部,如图 6.14 阴影部分所示,不包括界面在内.

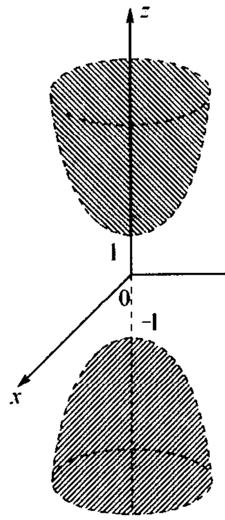

图 6.14

绘制下列函数的水平线:

3151. $z = x + y$.

解 等位线为平行直线族 $x + y = k, k \in IR$,图形如图 6.15 所示.

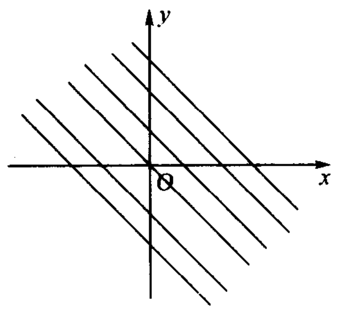

图 6.15

3152. $z = x^2 + y^2$.

解 等位线为曲线族,$x^2 + y^2 = a^2 (a \geqslant 2)$,

当 $a=0$ 时为原点，当 $a>0$ 时，等位线为以原点为圆心的同心圆族.

3153. $z=x^2-y^2$.

解 等位线为曲线族 $x^2-y^2=k$，当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线，$y=x$，$y=-x$，当 $k\neq 0$ 时，以 $y=\pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族，其中 $k>0$ 时顶点为 $(-\sqrt{k},0)$，$(\sqrt{k},0)$，当 $k<0$ 时顶点为 $(0,-\sqrt{k})$，$(0,\sqrt{-k})$.

3154. $z=(x+y)^2$.

解 等位线为曲线族 $(x+y)^2=a^2$，$a\geqslant 0$，当 $a=0$ 时，为直线 $x+y=0$，当 $a\neq 0$ 时与直线 $x+y=0$ 平行的且等距的直线 $x+y=\pm a$.

3155. $z=\dfrac{y}{x}$.

解 等位线以坐标原点为束心的直线束，$y=kx$，$x\neq 0$ 不包括 Oy 轴在内.

3156. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等位线为椭圆族 $x^2+2y^2=a^2(a>0)$，

长半轴为 a，短半轴为 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为 $\left(-a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$ 及 $\left(a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$.

3157. $z=\sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族 $xy=a^2$，$a\geqslant 0$.

当 $a=0$ 时，为坐标轴 $x=0$ 及 $y=0$，当 $a>0$ 时，为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等边双曲线族，顶点为 $(-a,-a)$ 及 (a,a).

3158. $z=|x|+y$.

解 等位线为曲线族 $|x|+y=k$，其中 $k\in(-\infty,+\infty)$，当 $x\geqslant 0$ 时，$x+y=k$，当 $x<0$ 时，$y-x=k$，这是顶点在 Oy 轴上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如图 6.16 所示.

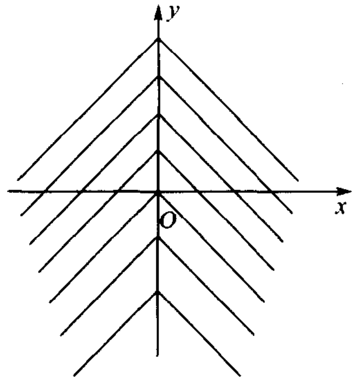

图 6.16

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等位线为曲线族 $|x|+|y|-|x+y|=a$,因为 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$,于是 $a\geqslant 0$,当 $a=0$ 时,$|x|+|y|=|x+y|$,两边平方有 $xy\geqslant 0$,即为第一、第三象限,包括两坐标轴在内,当 $a>0$ 时,$xy<0$,从而有

1° $x>0,y<0,x+y\geqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$,解之有 $y=-\dfrac{a}{2}$;

2° $x>0,y<0,x+y\leqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$,解之有 $x=\dfrac{a}{2}$;

3° $x<0,y>0,x+y\geqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$,解之有 $x=-\dfrac{a}{2}$;

4° $x<0,y>0,x+y\leqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$,解之有 $y=\dfrac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族,它的各射线平行于坐标轴,如图 6.17 所示.

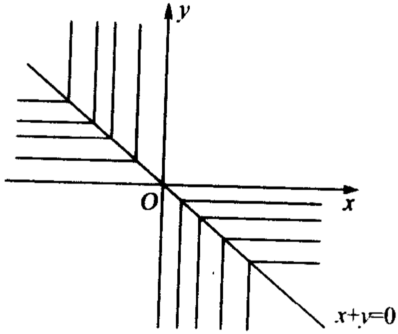

图 6.17

3159.1. $z = \min(x, y)$.

解 设

$$\min(x, y) = k, \qquad k \in (-\infty, +\infty)$$

则 1° 若 $y \geqslant x$，有 $x = k$，等位线是平行射线族，顶点在 $y = x$ 轴上，但含 $y = x$ 直线上点，如图 6.17(1).

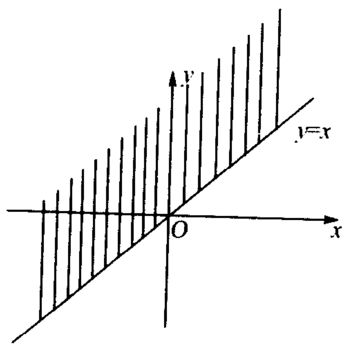

图 6.17(1)

2° 若 $y < x$，有 $y = k$，等位线是平行射线族，顶点在 $y = x$ 轴上，但不含 $y = x$ 直线，如图 6.17(2).