高中数学竞赛专题讲座

丛书策划　李胜宏
丛书主编　陶平生　苏建一
　　　　　刘康宁　边红平

SHULIE YU GUINAFA

数列与归纳法

本册主编　韦吉珠

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛专题讲座

- ★ 数学结构思想及解题方法
- ★ 初等数论
- ★ 复数与多项式
- ★ 组合问题
- ★ 平面几何
- ★ 函数与函数方程
- ★ 不等式
- ★ 排列组合与概率
- ★ 数列与归纳法
- ★ 集合与简易逻辑
- ★ 三角函数
- ★ 立体几何
- ★ 解析几何

ISBN 978-7-308-05237-5

定价：8.50 元

高中数学竞赛专题讲座

数列与归纳法

本书主编　韦吉珠

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 数列与归纳法 / 陶平生等主编. —杭州:浙江大学出版社,2007. 4
ISBN 978-7-308-05237-5

Ⅰ.高... Ⅱ.陶... Ⅲ. 代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039717 号

数列与归纳法

本书主编 韦吉珠

责任编辑	王大根
出版发行	浙江大学出版社
	(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
	(E-mail:zupress@mail. hz. zj. cn)
	(网址:http://www. zjupress. com)
排　　版	浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷	杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本	787mm×960mm 1/16
印　　张	6. 25
印　　数	00001—10000
字　　数	122 千字
版 印 次	2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-05237-5
定　　价	8. 50 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

丛书编委会

编写说明

影响最大、级别最高的中学生“国际数学奥林匹克”(简称IMO)由来已久，自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来，有近50年的历史，其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下，世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前，我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动，吸引了无数数学爱好者积极参与，也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供一个展示自我的平台，是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到，通过这项活动，发现了一批数学苗子，培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来，我国的数学竞赛体制日趋完善，它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革，各种学科竞赛，尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上，学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望，在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套“高中数学竞赛专题讲座丛书”。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法，凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是：

1.充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2.本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3.以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4.在注重基础知识训练同时，作适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

目 录

第一讲 等差与等比数列

知识扫描

等差数列

1. 定义

数列$\{a_n\}$若满足 $a_{n+1}-a_n=d$(常数),则这个数列叫做等差数列,d 叫做公差.

若 a, A, b 成等差数列,则 A 叫做 a 与 b 的等差中项,由定义知 $A=\frac{a+b}{2}$.

2. 通项公式

若等差数列$\{a_n\}$的首项是 a_1,公差为 d,则通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 对于任意 m, $n\in\mathbf{N}^*$,有 $a_n=a_m+(n-m)d$.

3. 前 n 项和

设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为 S_n,则 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$或 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

4. 一些重要性质

(1)若 m, n, p, $q\in\mathbf{N}^*$,且 $m+n=p+q$,则 $a_m+a_n=a_p+a_q$.

(2)若$\{a_n\}$是等差数列,正整数 l, m, p 也成等差数列,则 a_l, a_m, a_p必成等差数列.

(3)若 S_n是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项之和,则 S_k, $(S_{2k}-S_k)$, $(S_{3k}-S_{2k})$,…也成等差数列.

(4)当 $d>0$ 时,$\{a_n\}$是递增数列;当 $d=0$ 时,$\{a_n\}$是常数数列;当 $d<0$ 时,$\{a_n\}$是递减数列.

(5)对项数 n 来说,a_n是一次函数,S_n是二次函数,这是因为 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$;$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$.

等比数列

1. 公比 $q=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=\frac{a_2}{a_1}(q\neq 0)$.

2. 通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$，还可以写作 $a_n=a_1(\frac{a_2}{a_1})^{n-1}$ 或 $a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}(n>1)$.

3. 前 n 项和公式 $S_n=\begin{cases} na_1 & q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & q\neq 1 \end{cases}$，当 $|q|<1$ 时，所有项之和 $S=\frac{a_1}{1-q}$.

4. 对于任意正整数 p, q, s, t，如果 $p+t=q+s$，则 $a_pa_t=a_qa_s$ 成立；特别地，若 $p+s=2q$，则 $a_pa_s=a_q^2$ 成立.

例题分析

例 1 （2000 年全国高中数学联赛）等比数列 $a+\log_2 3$, $a+\log_4 3$, $a+\log_8 3$ 的公比是________.

解：设公比为 q，由已知条件可知 $q=\frac{a+\log_4 3}{a+\log_2 3}=\frac{a+\log_8 3}{a+\log_4 3}$.

进而由比例的性质知

$$q=\frac{a+\log_4 3-(a+\log_8 3)}{a+\log_2 3-(a+\log_4 3)}=\frac{\log_4 3-\log_8 3}{\log_2 3-\log_4 3}=\frac{\frac{1}{2}\log_2 3-\frac{1}{3}\log_2 3}{\log_2 3-\frac{1}{2}\log_2 3}=\frac{1}{3}.$$

所以应填上 $\frac{1}{3}$.

评析 作为数列中较为基础的等差、等比数列的知识，常以填空题或选择题的形式在高中数学联赛中出现，而且等差数列与等比数列常在同一道题中出现.

例 2 （2002 年上海市数学竞赛题）已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是等差数列，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，且对一切正整数 n，$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+31}{31n+3}$.

(1) 求 $\frac{b_{28}}{a_{28}}$ 的值；

(2) 求使 $\frac{b_n}{a_n}$ 为整数的所有正整数 n.

解:

(1)因为$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{a_1+a_{2n-1}}{2}}{\frac{b_1+b_{2n-1}}{2}}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{3(2n-1)+31}{31(2n-1)+3}=\frac{3n+14}{31n-14}$.

所以$\frac{b_{28}}{a_{28}}=\frac{31\times 28-14}{3\times 28+14}=\frac{61}{7}$.

(2)因为$(3n+14, 3)=1$,要使$\frac{b_n}{a_n}=\frac{31n-14}{3n+14}$为整数,即要使$\frac{3(31n-14)}{3n+14}=31-\frac{476}{3n+14}$为整数.从而$(3n+14)\mid 476$.

因为$476=2^2\times 7\times 17$,$3n+14\geqslant 17$.

所以$3n+14=17, 28, 34, 68, 119, 238, 476$.

因为n为整数,所以$n=1, 18, 35, 154$.

评析 这是道适用于高考的题型,一般同学用“笨”方法或许也做得出来,但作为有一定数学基础的同学,应该能用数列的性质给出巧妙的解答.

例3 已知$\{a_n\}$是等差数列且公差$d\neq 0$,其中$a_n\neq 0(n\in \mathbf{N}^*)$,一组二次方程$a_kx^2+2a_{k+1}x+a_{k+2}=0(k\in \mathbf{N}^*)$.

(1)求证:不论k取怎样的正整数,这组方程总有公共根.

(2)若各方程的不同的根依次为$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$,求证:$\frac{1}{x_1+1}, \frac{1}{x_2+1}, \frac{1}{x_3+1}, \cdots, \frac{1}{x_n+1}, \cdots$成等差数列.

证明:

(1)因为$\{a_n\}$是等差数列,$d\neq 0$,$a_n\neq 0\ (n\in \mathbf{N}^*)$,所以$2a_{k+1}=a_k+a_{k+2}$.

将上式代入方程得$a_kx^2+(a_k+a_{k+2})x+a_{k+2}=0$.

即$(x+1)(a_kx+a_{k+2})=0\ (k\in \mathbf{N}^*)\cdots$①

由$x+1=0$得知,这组方程有公共根$x_0=-1$.

(2)由①得知各方程的不同的根为$x_k=-\frac{a_{k+2}}{a_k}$.

所以$x_k+1=-\frac{a_{k+2}}{a_k}+1=\frac{a_k-a_{k+2}}{a_k}=-\frac{2d}{a_k}$.

因此$\frac{1}{x_k+1}=-\frac{a_k}{2d}$.进而可得$\frac{1}{x_{k+1}+1}=-\frac{a_{k+1}}{2d}$.

因为$\frac{1}{x_{k+1}+1}-\frac{1}{x_k+1}=-\frac{a_{k+1}-a_k}{2d}=-\frac{d}{2d}=-\frac{1}{2}$(常数).

所以数列$\{\frac{1}{x_k+1}\}$是等差数列.

评析 本题属于方程与数列结合的产物,是基础题.

例 4 给定正整数 n 和正数 M,对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 a_1, a_2, a_3, …,试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值.

解:在等差数列$\{a_n\}$中,$a_{2n+1}=a_1+2nd=2(a_1+nd)-a_1=2a_{n+1}-a_1$.

因为 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}=\frac{a_{n+1}+a_{2n+1}}{2}(n+1)=\frac{(3a_{n+1}-a_1)}{2}(n+1)$.

又因为 $M\geqslant a_1^2+a_{n+1}^2=\frac{1}{10}(1+3^2)[(-a_1)^2+a_{n+1}^2]\geqslant\frac{1}{10}(3a_{n+1}-a_1)^2$.

因此 $\sqrt{10M}\geqslant 3a_{n+1}-a_1$.

所以 $S\leqslant\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}$.

从而 $S_{\max}=\frac{10}{2}(n+1)\sqrt{M}$,此时 $a_1=\frac{\sqrt{10M}}{8}$, $a_{n+1}=\frac{3\sqrt{10M}}{8}$.

评析 本题将不等式与数列很好地结合在一起,在变形上有一定的技巧性.

例 5 (1999 年上海市数学竞赛题)$\triangle ABC$ 的边长 a, b, c $(a\leqslant b\leqslant c)$同时满足下列三个条件:

(ⅰ)a, b, c 均为整数;

(ⅱ)a, b, c 组成等比数列;

(ⅲ)a 与 c 中至少有一个等于 100.

求出三元数组(a, b, c)的所有可能的解.

解:依题意可知,正整数 a, b, c 满足$\begin{cases}a\leqslant b\leqslant c\\ a+b>c\\ b^2=ac\\ a、c\text{ 中至少有一个为 }100\end{cases}$

(1)若 $a=100$,则 $b^2=100c$,故 $10\mid b$.

又因为 $100+b>c=\frac{b^2}{100}$, $b^2-100b-100^2<0$.

所以 $100\leqslant b<50(\sqrt{5}+1)$.

又已证 $10\mid b$,故 b 可取 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160.

相应地 $c=100, 121, 144, 169, 196, 225, 256$.

(2)若 $c=100$,则 $b^2=100a$,故 $10\mid b$.

又因为$\frac{b^2}{100}+b>100$, $b^2+100b-100^2>0$.

所以 $50(\sqrt{5}-1)<b\leqslant 100$.

又已证 $10\mid b$,故 b 可取 70, 80, 90, 100,相应地 $a=49, 64, 81, 100$.

综上所述,三元数组 (a, b, c) 共有 10 组可能的解:

(49, 70, 100), (64, 80, 100), (81, 90, 100), (100, 100, 100), (100, 110, 121), (100, 120, 144), (100, 130, 169), (100, 140, 196), (100, 150, 225), (100, 160, 256).

评析 这里的讨论并不复杂,若改为求解的个数的填空题,难度会稍大,因为不细心会导致漏解.

例 6 数列 $\{a_n\}$ 的相邻两项 a_n, a_{n+1} 是方程 $x^2-c_nx+(\frac{1}{3})^n=0$ 的两个根,且 $a_1=2$,求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项之和 S_{2n}.

解:依题意得 $\begin{cases} c_n=a_n+a_{n+1}\cdots ① \\ a_na_{n+1}=(\frac{1}{3})^n\cdots ② \end{cases}$

由②得 $a_{n+1}a_{n+2}=(\frac{1}{3})^{n+1}\cdots ③$

$\frac{③}{②}$ 得 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{3}$.

所以, a_1, a_3, $\cdots$, a_{2k-1}, $\cdots$ 和 a_2, a_4, $\cdots$, a_{2k}, $\cdots$ 都是以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

又由 $a_1a_2=\frac{1}{3}$, $a_1=2$ 可得 $a_2=\frac{1}{6}$.

由 $a_2a_3=\frac{1}{9}$ 可得 $a_3=\frac{2}{3}$.

由①可得

$$\begin{aligned} S_{2n}&=c_1+c_2+\cdots+c_{2n}=(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})+(a_2+a_3+\cdots+a_{2n+1}) \\ &=2(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})+(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}) \\ &=2\cdot\frac{\frac{1}{6}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}+\frac{2[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{2}{3}[1-(\frac{2}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}} \\ &=\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^n](2\times\frac{1}{6}+2+\frac{2}{3}) \\ &=\frac{9}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]. \end{aligned}$$

评析 这里求 S_{2n-1} 也可用类似的方法,但结果不如 S_{2n} 漂亮,故这里只要求 S_{2n}.

例 7 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 是前 n 项和.

(1)求证：$\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$；

(2)是否存在正常数 c，使得 $\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$ 成立？并给予证明.

证明：

(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 q，由题设知 $a_1>0$，$q>0$.

(ⅰ)当 $q=1$ 时，有 $S_n=na_1$.

于是，$S_n\times S_{n+2}-S_{n+1}^2=na_1(n+2)a_1-(n+1)^2a_1^2=-a_1^2<0$；

(ⅱ)当 $q\neq1$ 时，有 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

于是，$S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=\frac{a_1^2(1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q)^2}-\frac{a_1^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2}=-a_1^2q^n<0$.

因此，由(ⅰ)、(ⅱ)知，$S_n\times S_{n+2}<S_{n+1}^2$成立，对此边同时取对数即可得证.

(2)若$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$成立，则必有

$$\begin{cases}(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2\\ S_n-c>0\end{cases}.$$

我们分两种情形进行讨论：

(ⅰ)当 $q=1$ 时，我们有

$(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2=(na_1-c)[(n+2)(a_1-c)]-[(n+1)a_1-c]^2$

$=-a_1^2<0$，

即不存在正常数 c 使结论成立.

(ⅱ)当 $q\neq1$ 时，若 $(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2$成立，则

$(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2$

$=[\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}-c][\frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q}-c]-[\frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}-c]^2$

$=-a_1q^n[a_1-c(1-q)]$.

但 $a_1q^n\neq0$，故只能是 $a_1-c(1-q)=0$，即 $c=\frac{a_1}{1-q}$.

此时，由于 $c>0$，$a_1>0$，故必须 $0<q<1$.

但 $0<q<1$ 时，$S_n-\frac{a_1}{1-q}=\frac{-a_1q^n}{1-q}<0$，不满足 $S_n-c>0$，即不存在正常数 $c>0$ 满足题设条件.

综上所述，我们证明了不存在正常数 c 满足题意.

评析 运用等比数列求和公式时，一定要注意讨论公比 q 是否为 1.

例 8 已知 $f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$，且 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 组成等差数列，n 为正偶数. 又 $f(1)=n^2$，$f(-1)=n$. 试比较 $f(\frac{1}{2})$ 与 3 的大小.

解：因为 $f(1)=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2$，所以 $\frac{(a_1+a_n)n}{2}=n^2$，即 $a_1+a_n=2n$.

又 $f(-1)=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots-a_{n-1}+a_n=n$.

即 $(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=n$.

所以 $\frac{n}{2}d=n$，即 $d=2$.

由 $a_1+a_n=2a_1+2(n-1)=2n$，即 $2a_1-2+2n=2n$ 得

$a_1=1$，$a_n=a_1+2(n-1)=2n-1(n\in\mathbf{N})$.

所以 $f(x)=x+3x^2+5x^3+\cdots+(2n-1)x^n$.

所以 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+3(\frac{1}{2})^2+5(\frac{1}{2})^3+\cdots+(2n-1)(\frac{1}{2})^n$，

$\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2+3(\frac{1}{2})^3+\cdots+(2n-1)(\frac{1}{2})^{n+1}$.

以上两式相减可得

$\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})^3+\cdots+2(\frac{1}{2})^n-(2n-1)(\frac{1}{2})^{n+1}$.

即 $\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}-(2n-1)(\frac{1}{2})^{n+1}$.

从而 $f(\frac{1}{2})=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-2}-(2n-1)(\frac{1}{2})^n$

$$=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(2n-1)(\frac{1}{2})^n.$$

所以 $f(\frac{1}{2})=3-(\frac{1}{2})^{n-2}-(2n-1)(\frac{1}{2})^n<3$，即 $f(\frac{1}{2})<3$.

评析 由已知条件求得 $a_n=2n-1$，$f(\frac{1}{2})$ 是等差数列 $\{2n-1\}$ 与等比数列 $\{x^n\}$ 对应项的乘积所组成的数列 $\{(2n-1)x^n\}$ 的前 n 项和. 对于此种数列前 n 项求和问题，我们通常用错项相减法. 另外，求数列前 n 项和还有倒序相加法、裂项相消法、分组求和法等.

例 9 （1998 年以色列—匈牙利数学竞赛题）将素数从小到大排列为 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$，令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}p_i$. 求证：对于任意正常数 n，存在一个完全平方数 a_n，使得 $S_n<a_n<S_{n+1}$.

证明:对于 $n<5$,我们有 $2<2^2<2+5$, $7<3^2<7+7$, $14<4^2<14+11$,故结论成立.

当 $n\geqslant 5$ 时,$p_n\geqslant 11$,记 $S'_n=1+3+5+\cdots+p_n$,则 $S'_n=(\frac{1+p_n}{2})^2$,且 $S'_n>S_n$.

反设结论不成立,则存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $k^2<S_n<S_{n+1}\leqslant(k+1)^2$.

由上述结论知:$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i>1+3+\cdots+(2k-1)$.

即 $p_n\geqslant 2k-1$,则 $p_{n+1}\geqslant 2k+1$.

从而 $S_{n+1}>1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$,但 $S_{n+1}<(k+1)^2$,矛盾!

因此,对任意正整数 n,存在一个完全平方数 a_n,使得 $S_n<a_n<S_{n+1}$,得证.

评析 本题关键是能注意到等差数列前 n 项和. 求得 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=(\frac{1+p_n}{2})^2(n\geqslant 5)$,并会运用反证法问题即可迎刃而解.

例 10 设 r 为正整数,定义数列 $\{a_n\}$ 如下:$a_1=1$,且对每个正整数 n,$a_{n+1}=\frac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2}$. 求证:每个 a_n 都是正整数,并确定哪些 n,a_n 是偶数.

证明:由题设得 $(n+2)a_{n+1}=na_n+2(n+1)^{2r}$.

对上式两边同乘以 $n+1$ 得

$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1)^{2r+1}$.

令 $b_n=(n+1)na_n(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $b_1=2$, $b_{n+1}=b_n+2(n+1)^{2r+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

于是,$b_n=\sum\limits_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})+b_1$.

由 $b_n=2n^{2r+1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1})$, $n\mid k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}$ 可得 $n\mid b_n$.

再将 b_n 改写成 $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2r+1}+\sum\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)^{2r+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}[k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}]$,即得 $(n+1)\mid b_n$.

因为 $(n,n+1)=1$,所以 $n(n+1)\mid b_n$.

从而 $a_n=\frac{b_n}{(n+1)n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是正整数.

在 $n\equiv 3\pmod 4$ 时,

$$\frac{b_n}{n+1}\equiv\sum_{k=1}^{n}[k^{2r}-k^{2r-1}(n+1-k)+\cdots+(n+1-k)^{2r}]$$

$$\equiv\sum_{k=1}^{n}(2r+1)k^{2r}\equiv\sum_{k=1}^{n}k^{2r}$$