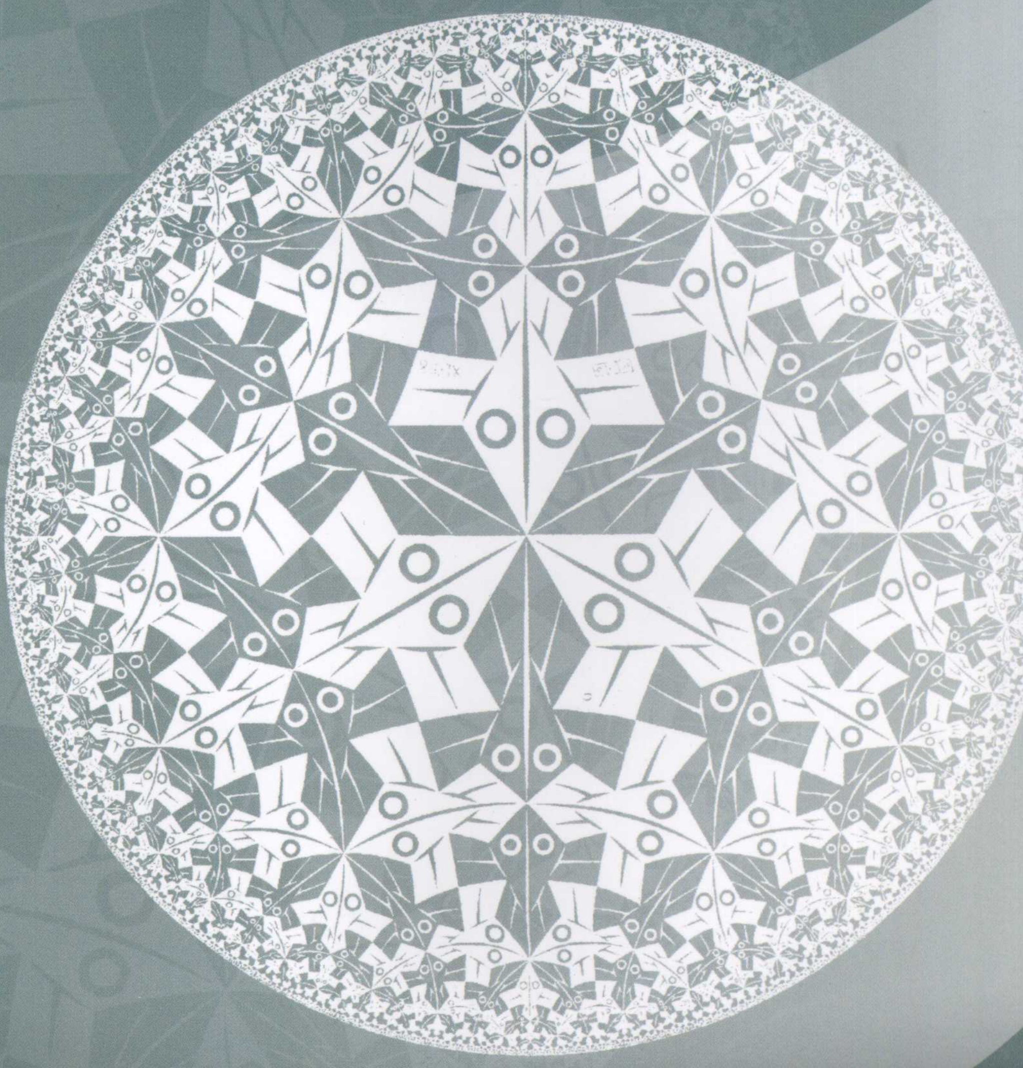
大学数学系列教材　主编　辛小龙　刘新平

线性代数

邓方安　石超峰　杨闻起　舒尚奇



高等教育出版社

大 学 数 学 系 列 教 材

主编 辛小龙 刘新平

线性代数

邓方安 石超峰
杨闻起 舒尚奇

高等教育出版社

内容提要

本书是由西北大学、陕西师范大学等8所院校联合编写的大学数学系列教材之一，该系列教材共包括《高等数学》(上、下)、《线性代数》及《概率论与数理统计》4册，本书为《线性代数》。内容包括矩阵及方阵的行列式、矩阵的初等变换及逆矩阵、n维向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型等。

本书是结合多位资深教师丰富的教学经验，根据高等理工及师范类本科数学基础课程教学要求编写而成。在内容选材、编写体例、阐述方式、习题难度和习题量的安排方面，充分考虑到学生学习的需要，有利于培养学生抽象思维和逻辑思维的能力、综合运用所学知识分析问题解决问题的能力和自主学习的能力。

本书适合高等理工及师范类学生作为教材使用，也可供有关工程技术人员作为参考书使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/辛小龙，刘新平主编：邓方安等编．—北京：高等教育出版社，2007.8
ISBN 978-7-04-021939-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①辛…②刘…③邓… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第104124号

策划编辑	王　强	责任编辑	李华英	封面设计	张申申
版式设计	史新薇	责任校对	张　颖	责任印制	毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2007年8月第1版
印　　张	13.75	印　　次	2007年8月第1次印刷
字　　数	250 000	定　　价	14.90元

物料号　21939-00

前　言

数学在研究客观世界数量关系与空间形式的过程中，形成了异于其他学科的庞大的科学体系，并以其内容的抽象性，逻辑的严谨性及应用的广泛性著称。数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化。数学教育在培养高素质科学技术人才中具有不可替代的作用。

随着我国改革开放和经济社会的发展，我国高等教育事业也有了长足发展。特别是大学扩招，变原来的“精英教育”为“大众教育”，引起了生源的变化。所有这些对大学数学教学改革和教材建设提出了新的要求。

多年来，我国也出现了许多优秀的大学数学教材。然而，现有的大多数教材比较适合工科院校的学生。面对扩招以后大学生源的变化，特别相对于综合类、师范类院校的学生，这些教材都有明显的局限性，不适合这类院校学生的学习。因而，编写一套以理工综合类及师范类学生为主要对象的大学数学教材是非常必要的。我们编写的这套系列教材，力争能适合理工综合类及师范类本科生的教育现状，有利于实现该类专业的数学教育目标，适合新世纪人才培养的要求。我们努力在这套系列教材中反映数学教学改革新思路、新方法，期望能成为一套具有自己特色的大学数学教材。

本教材是按照高等理工综合类及师范类本科专业学习本课程都应达到的要求编写的，其中带 * 的部分可供某些相关专业选用，也是对选用专业学生的基本要求。各院校根据自身情况，在达到基本要求的基础上还可以提出一些较高的或特殊的要求。

本套系列教材分《高等数学（上）》、《高等数学（下）》、《线性代数》及《概率论与数理统计》4 本书出版，是西北大学、陕西师范大学、延安大学、陕西理工学院、西安文理学院、宝鸡文理学院、渭南师范学院、咸阳师范学院等 8 所院校的多位资深的数学教师多年来数学教育、教学经验的结晶，其内容选材、编写体例、阐述方式、习题难度和习题量的安排，都充分考虑了高等理工综合类及师范类专业本科学生学习的需要，并与该类专业相应课程的教学计划相适应。

本系列教材的总主编由西北大学辛小龙教授和陕西师范大学刘新平教授担任。教材封面上的第一署名作者为该本教材的统稿人。教材编写工作的具体分工如下：

《高等数学(上)》:第一章,陈斯养;第二章,张永锋;第三、四章,薛利敏;第五章,马保国;第六章,阎恩让。

《高等数学(下)》:第七章,曹吉利;第八章,荔炜;第九章,陈斯养;第十章,辛小龙;第十一章,薛西峰。

《线性代数》:第一章,于萍、王挺;第二章,陈露;第三章,杨闻起;第四章,舒尚奇;第五章,邓方安;第六章,石超峰。

《概率论与数理统计》:第一章,朱科科;第二章,冉凯;第三章,杨开春;第四章,查淑玲;第五章,王丰效;第六、八章,刘新平;第七章,张运良;第九、十章及附录,贺瑞缠。

关于教材的编写我们进行了充分的准备工作,由西北大学数学系和高等教育出版社组织以上参编单位的专家教授召开了数次教材编写研讨会,多次讨论确定了教材编写大纲、教材主要内容和教材编写特色,使得教材的编写工作有分工有合作,有条不紊地进行。

本系列教材的问世,是教育改革的产物。我们感谢西北大学、陕西师范大学等所有参编院校及高等教育出版社,它们对本书的顺利问世功不可没。

新世纪大学数学的教学改革是一项重要而艰巨的工程。我们力争做出一些贡献。我们尽力想把这套教材编写好,但由于水平有限及各方面的诸多原因,书中的缺点、错误乃至问题一定在所难免,恳望同行不吝赐教,诚请读者批评指正。

编　者

2007 年 4 月

目　录

第一章　矩阵及方阵的行列式 …… 1

§1.1　矩阵及其运算 …… 1

§1.2　方阵的行列式及其性质 …… 14

§1.3　行列式的计算 …… 28

第二章　矩阵的初等变换及逆矩阵 …… 41

§2.1　初等变换与矩阵的秩 …… 41

§2.2　初等矩阵与逆矩阵 …… 51

§2.3　分块矩阵 …… 63

第三章　n 维向量 …… 77

§3.1　n 维向量及其运算 …… 77

§3.2　向量的线性相关性 …… 82

§3.3　向量组的秩 …… 89

§3.4　向量空间 …… 95

第四章　线性方程组 …… 108

§4.1　齐次线性方程组 …… 108

§4.2　非齐次线性方程组 …… 123

第五章　矩阵的特征值和特征向量 …… 143

§5.1　矩阵的特征值和特征向量 …… 143

§5.2　矩阵的相似对角化 …… 149

§5.3　向量组的正交性与正交矩阵 …… 157

§5.4　实对称矩阵的相似对角化 …… 161

第六章　二次型 …… 169

§6.1　二次型的概念 …… 169

§6.2　二次型的标准形 …… 173

§6.3　正定二次型 …… 184

部分习题参考答案 …… 193

参考文献 …… 210

第一章 矩阵及方阵的行列式

矩阵是线性代数的一个重要概念，是研究线性关系的一个有力工具，广泛应用于自然科学的各个分支及经济管理等许多领域．今天，它又为我们应用计算机处理科学计算和日常事务带来了很大的方便与可能．

本章首先引入矩阵的概念，然后介绍矩阵的运算、方阵的行列式以及行列式的计算．

§1.1 矩阵及其运算

在日常生活中，我们经常会遇到一些相关的数据，需要通过比较它们来得到有用的结果．例如，某个地区不同年龄段的观众在一个星期里收看电视情况如表1.1所示（摘自《身边的数学》）：

表1.1 收视统计 单位：万人

	星期一——星期五 10:00—16:30	星期一——星期五 16:30—19:30	星期一——星期日 20:00—23:00
女性(18～24)	4.2	2.5	5.8
女性(25～54)	4.2	2.9	8.3
男性(18～24)	2.7	2.0	5.2
男性(25～54)	2.6	2.3	7.9

从表1.1很容易看出女性要比男性观看电视节目的时间多一些，在每晚20:00—23:00这段时间里面，年轻人看电视的时间要少于年龄较大的人．这些信息可以帮助电视台决定如何更加有效地插播广告．

表1.1可用下面的形式表示：

$$\begin{pmatrix} 4.2 & 2.5 & 5.8 \\ 4.2 & 2.9 & 8.3 \\ 2.7 & 2.0 & 5.2 \\ 2.6 & 2.3 & 7.9 \end{pmatrix}.$$

这样的一个矩形数表就称为一个 4 行 3 列或 4×3 的矩阵.

例 1.1 全国部分地区三种家用电器:空调、彩电、微波炉,一季度的销售量(单位:台)统计如下(表 1.2 来自于国家信息中心 2004 年一季度全国部分地区家用电器销售量统计):

表 1.2 销售统计 单位:台

	空调	彩电	微波炉
北京	90 284	163 017	71 101
上海	184 086	261 556	109 185
成都	27 653	45 999	36 951

表 1.2 中的有关数据也可以记为如下形式:

$$\begin{pmatrix} 90\,284 & 163\,017 & 71\,101 \\ 184\,086 & 261\,556 & 109\,185 \\ 27\,653 & 45\,999 & 36\,951 \end{pmatrix}.$$

例 1.2 设线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-6x_3=4, \\ x_1-x_2+4x_3=1, \\ -x_1+2x_2-7x_3=0. \end{cases}$$

如果只将方程组中每个方程的未知量系数与常数项写出,位置与顺序不变,就可得到如下 3 行 4 列的矩形数表:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.1 矩阵的定义

由于线性代数中的许多问题与所讨论的数集有关,因此有必要介绍数域的概念.

定义 1.1 设 P 是一个非空数集,其中包含 0 和 1. 如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 P 中的数,则称 P 是一个数域.

例如,全体有理数组成的集合 $\mathbf{Q}$,全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$ 和全体复数组成的集合 $\mathbf{C}$ 都是数域,分别称为有理数域、实数域和复数域. 而全体整数组成的集合 $\mathbf{Z}$ 不是一个数域,因为任意两个整数的商(除数不为零)不一定是整数.

下面给出矩阵的定义.

定义 1.2 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的一个 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

称为一个 m 行 n 列的矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵,其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素.

通常用大写的拉丁字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵. 有时为了指明矩阵的行数和列数,把 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$或 $\boldsymbol{A}_{mn}$. 例如,表 1.1 中的电视节目收视统计矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则可记作 $\boldsymbol{A}_{4\times 3}$. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素为 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$时,也可将 $\boldsymbol{A}$ 记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的形式. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 m 和列数 n 相等时,称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵或 $n\times n$ 矩阵. 例如,例 1.1 中的矩阵就是一个三阶方阵.

元素全为零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$或 $\boldsymbol{O}$.

当 $m=1,n>1$ 时,矩阵为

$$\boldsymbol{A} = (a_1,a_2,\cdots,a_n), \tag{1.1.2}$$

叫做行矩阵 .

当 $m>1,n=1$ 时,矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{1.1.3}$$

叫做列矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$都是数域 P 中的数,则称 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的一个 $m\times n$ 矩阵.

本章涉及的矩阵在无特别说明的情况下,均指实数域 $\mathbf{R}$ 上的矩阵.

1.1.2 几种特殊的矩阵

1. 上三角形矩阵与下三角形矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

的 n 阶方阵,即主对角线左下方的元素全为零的 n 阶方阵,称为上三角形矩阵.

类似地,主对角线右上方的元素全为零的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.1.5}$$

称为下三角形矩阵.

2. 对角矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.1.6}$$

的 n 阶方阵称为对角矩阵,其中 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 位于矩阵的主对角线上(即从左上角到右下角),称为主对角线上的元素,而主对角线以外的元素全为零. 上述对角矩阵也可以记作 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 因此, 对角矩阵既可以是上三角形矩阵,也可以是下三角形矩阵.

例如, $\mathrm{diag}(1,0,1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 数量矩阵

当对角矩阵的主对角线上的元素都相同时,$\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)$称为数量矩阵. 特别地,当 $a=1$ 时,称 n 阶数量矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.7}$$

为 n 阶单位矩阵，记作 $\boldsymbol{E}_n$，可以简记为 $\boldsymbol{E}$.

4. 对称矩阵与反称矩阵

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵. 例如，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

就是一个三阶对称矩阵.

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反称矩阵. 据此，反称矩阵的主对角线上的元素 a_{ii} 也应满足 $a_{ii}=-a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$，故 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$，即反称矩阵的主对角线上的元素全为零.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$ 就是一个三阶反称矩阵.

1.1.3 矩阵的运算

这一节介绍矩阵的运算及其满足的运算法则，所讨论的矩阵均为数域 P 上的矩阵.

定义 1.3 （1）若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行数、列数分别相等，则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵；

（2）若两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的对应元素相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

由定义可知，不同型的矩阵不可能相等，而两个 $m\times n$ 矩阵相等则等价于 mn 个数量等式. 例如，由 $\begin{pmatrix}x & 2 & 1\\ 0 & y & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ z & -1 & 3\end{pmatrix}$，立即可得 $x=1,y=-1,z=0$.

1. 矩阵的加法

例 1.3 农业系统国有单位从业人员统计如表 1.3（摘自农业人才网）：

表 1.3 从业人员统计 单位：万人

	种植业	畜牧兽医行业	农垦系统	渔业行业	农机化领域
2003 年	91.3	50.3	263.6	15.4	31.2
2004 年	86.9	47.8	210.3	13.4	26.4

我们用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示 2003 年农业系统国有单位从业人员统计，用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示 2004 年农业系统国有单位从业人员统计.

$$A = (91.3, 50.3, 263.6, 15.4, 31.2),$$

$$B = (86.9, 47.8, 210.3, 13.4, 26.4).$$

问：2003 年和 2004 年农业系统国有单位从业人员有什么样的变化？两年中，农业系统国有单位各个行业从业人员每年平均有多少人？

解 $A - B$

$$= (91.3, 50.3, 263.6, 15.4, 31.2) - (86.9, 47.8, 210.3, 13.4, 26.4)$$

$$= (91.3 - 86.9, 50.3 - 47.8, 263.6 - 210.3, 15.4 - 13.4, 31.2 - 26.4)$$

$$= (4.4, 2.5, 53.3, 2.0, 4.8).$$

2004 年农业系统国有单位从业人员整体上比 2003 年减少了.

$A + B$

$$= (91.3, 50.3, 263.6, 15.4, 31.2) + (86.9, 47.8, 210.3, 13.4, 26.4)$$

$$= (91.3 + 86.9, 50.3 + 47.8, 263.6 + 210.3, 15.4 + 13.4, 31.2 + 26.4)$$

$$= (178.2, 98.1, 473.9, 28.8, 57.6),$$

$$\left(\frac{1}{2} \times 178.2, \frac{1}{2} \times 98.1, \frac{1}{2} \times 473.9, \frac{1}{2} \times 28.8, \frac{1}{2} \times 57.6\right)$$

$$= (89.1, 49.05, 236.95, 14.4, 28.8).$$

两年来农业系统国有单位五个行业从业人员每年平均分别为 89.1 万人、49.05 万人、236.95 万人、14.4 万人、28.8 万人.

定义 1.4 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵 $C = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 A 与 B 的和，记作 $C = A + B$.

由此可见，两个矩阵的加法就是将它们的对应元素相加，而且只有同型矩阵才能相加.

由矩阵加法的定义，可以直接验证矩阵的加法满足下列性质：

(1) 交换律：$A + B = B + A$；

(2) 结合律：$(A + B) + C = A + (B + C)$；

(3) $A + O = O + A = A$，其中 O 为零矩阵；

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.8}$$

为矩阵 A 的负矩阵，记作 $-A$. 显然有

(4) $A+(-A)=(-A)+A=O$.

由此可定义矩阵的减法:$A-B=A+(-B)$.

2. 数与矩阵相乘

定义 1.5 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$为数域 P 上的矩阵,k 是数域 P 中的数,则称矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.9}$$

为 k 与矩阵 A 的乘积,简称数乘矩阵,记作 kA.

由定义可知,数 k 乘矩阵就是用数 k 乘矩阵的每一个元素.因此数量矩阵就是用一个数乘单位矩阵,同时可以验证,矩阵的数乘具有下列运算规律:

(1) $k(A+B)=kA+kB$;

(2) $(k+l)A=kA+lA$;

(3) $(kl)A=k(lA)$;

(4) $1A=A,0A=O$.

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的线性运算.

例 1.4 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求满足等式 $2A-X=3B$ 的矩阵 X.

解 由 $2A-X=3B$ 可得 $X=2A-3B$,因此

$$\begin{aligned} X &= 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -6 & 9 & 9 \\ 12 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -11 & -5 \\ -6 & 5 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. 矩阵的乘法运算

定义 1.6 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$,$B=(b_{ij})_{s\times n}$, 则矩阵 A 与 B 的乘积矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj} \\ &= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n). \end{aligned}$$

记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

由定义知,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列的元素 c_{ij}是由 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的每一个元素和 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的相应元素相乘后再相加得到的,即

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{s}a_{1i}b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{s}a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{s}a_{1i}b_{in}\\ \sum\limits_{i=1}^{s}a_{2i}b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{s}a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{s}a_{2i}b_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{s}a_{mi}b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{s}a_{mi}b_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{s}a_{mi}b_{in}\end{pmatrix}. \tag{1.1.10}$$

例如, $c_{32}=\sum\limits_{i=1}^{s}a_{3i}b_{i2}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+\cdots+a_{3s}b_{s2}$.

注 (1) 只有矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时,$\boldsymbol{AB}$ 才有意义;

(2) 乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数,列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数;

(3) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的先后次序不能改变.

例 1.5 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2\times(-2)+4\times1 & 2\times4+4\times(-2)\\ (-3)\times(-2)+(-6)\times1 & (-3)\times4+(-6)\times(-2)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{BA}&=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(-2)\times2+4\times(-3) & (-2)\times4+4\times(-6)\\ 1\times2+(-2)\times(-3) & 1\times4+(-2)\times(-6)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 1.6 设 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 $AB=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$,

$$BA=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_n\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_na_1&b_na_2&\cdots&b_na_n\end{pmatrix},$$

即 AB 为一阶方阵,而 BA 为 n 阶方阵.

例 1.7 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 验证:$AB=AC$.

解 因为

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

所以 $AB=AC$.

由上面的例子可知,

(1) $AB\neq BA$,即矩阵的乘法一般不满足交换律. 因为 AB 与 BA 可能一个有意义,一个没有意义;即便都有意义,也不一定相等. 所以在作矩阵乘法时,一定要注意它们相乘的次序. 如果 $AB=BA$,则称矩阵 A 与矩阵 B 可交换.

(2) 当 $AB=O$ 时,不能推出 $A=O$ 或 $B=O$,即两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵. 如例 1.5 中的矩阵 $A\neq O, B\neq O$,但 $AB=O$.

(3) 当 $AB=AC$,且 $A\neq O$ 时,不能推出 $B=C$,即矩阵乘法不满足消去律. 如例 1.7 中的矩阵 A,B,C 有 $AB=AC$,且 $A\neq O$,而 $B\neq C$.

由定义可以验证矩阵的乘法满足下列运算规律(假设运算是可行的):

(1) 结合律:$(AB)C=A(BC)$;

(2) 左分配律:$A(B+C)=AB+AC$,

右分配律:$(A+B)C=AC+BC$;

(3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$(k 为常数);

(4) $EA=AE=A$;

(5) $OA=AO=O$.

例 1.8 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$,试求所有与 A 可交换的矩阵.

解 由条件可知,与 A 可交换的矩阵必为二阶方阵,设 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$为与 A 可交换的矩阵. 由于

$$AX=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\2x_{11}+x_{21}&2x_{12}+x_{22}\end{pmatrix},$$

$$XA=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}+2x_{12}&x_{12}\\x_{21}+2x_{22}&x_{22}\end{pmatrix}.$$

则由 $AX=XA$ 可推出 $x_{12}=0$,$x_{11}=x_{22}$,且 x_{11},x_{21} 可取任意值. 因此与矩阵 A 可交换的一切矩阵为 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&0\\x_{21}&x_{11}\end{pmatrix}$.

有了矩阵的乘法,就可以定义 n 阶方阵的幂.

设 A 为 n 阶方阵,m 为正整数. 定义 $A^m=\underbrace{AA\cdots A}_{m个}=A^{m-1}A$, 并规定 $A^0=E$, 称 A^m 为方阵 A 的 m 次幂,A 的零次幂为单位矩阵 E.

设 k,l 为任意非负整数,则有 $A^kA^l=A^{k+l}$, $(A^k)^l=A^{kl}$.

由于矩阵的乘法不满足交换律,因此一般地,$(AB)^k\neq A^kB^k(k>1)$. 此外,如果 $A^k=O(k>1)$,也不一定有 $A=O$,例如,$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,$A\neq O$,但 $A^3=O$.

例 1.9 计算$\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}^n$.

解 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\\lambda&0\end{pmatrix}=E+B,$$

$$B=\begin{pmatrix}0&0\\\lambda&0\end{pmatrix},\quad B^2=\begin{pmatrix}0&0\\\lambda&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\\lambda&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

由此可知,当 $n\geqslant2$ 时,$B^n=O$,且 $EB=BE=B$.

于是由二项式定理可得

$$A^n=(E+B)^n=E^n+nE^{n-1}B+\cdots+B^n=E+nB$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\\lambda n&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda n&1\end{pmatrix}.$$

例 1.10 城市土地使用及变更情况如表 1.4(摘自《身边的数学》):

表 1.4 城市土地使用及变更情况 单位:%

	转换为商业用地的百分比	转换为居住用地的百分比	转换为闲置土地的百分比
商业用地	92	8	0
居住用地	12	87	1
闲置土地	4	7	89

现在假设该地区今年的土地分布情况是这样的:商业用地有 8 000 公顷,居住用地有 16 000 公顷,并且还有 12 000 公顷的闲置土地.假如该地区今后两年内的土地变更情况如上表,从现在起,两年后该地区的各类土地有多少公顷?

解 我们用矩阵 A 来表示城市土地使用及变更情况:

$$A=\begin{pmatrix}0.92&0.08&0\\0.12&0.87&0.01\\0.04&0.07&0.89\end{pmatrix}.$$

用矩阵 B 来表示今年该地区的土地使用情况:

$$B=(8\,000,16\,000,12\,000).$$

所以一年后的商业用地、居住用地、闲置土地为

$$BA=(8\,000,16\,000,12\,000)\begin{pmatrix}0.92&0.08&0\\0.12&0.87&0.01\\0.04&0.07&0.89\end{pmatrix}$$

$$=(9\,760,15\,400,10\,840),$$

两年后的商业用地、居住用地、闲置土地为

$$(BA)A=(9\,760,15\,400,10\,840)\begin{pmatrix}0.92&0.08&0\\0.12&0.87&0.01\\0.04&0.07&0.89\end{pmatrix}$$