王式助尔自学丛书

高等数学自学教程

第三卷　下册

（自学方法指导及习题讲解）

北京王式助尔高等数学研究院

王振力　编讲

中国科学技术出版社

王式助尔自学丛书

高等数学自学教程

第三卷　下册

（自学方法指导及习题讲解）

北京王式助尔高等数学研究院

王振力　编讲

中国科学技术出版社

·北　京·

内容提要

这是在本自学教程第一、第二两卷的基础上对自学本卷上册所讲内容——积分学及其应用的方法指导及上册中所留全部习题的详细讲解.目的是向无师无助的自学者,按照上册的要求,自己独立做积分学及其应用方面的习题时,提供一种“保险”或示范.万一碰上自己不会做的题目,也不要害怕或着急,此时你只要按照本书的指导或提示,很快就会找到你不会做的那些题目的正确解法或证法,看懂之后,自己再独立地做一遍就行了.

目　　录

第十六章的自学方法与习题讲解

这一章讲的是不定积分.

《不定积分》这一章是积分学的开始，也是积分学的基础，在这一章里，我们讲了原函数与不定积分的概念、不定积分的性质和各种积分方法等(详见本卷上册 1～149 页). 这些概念、性质和方法在以后的定积分、重积分、曲线积分和曲面积分中将会得到进一步地发展、推广和应用，尤其求原函数的方法(这是不定积分的核心)不仅在定积分、重积分、曲线积分和曲面积分中继续得到应用，即使在微分方程的求解中也离不开它(详见本书第四卷上册第二十三章). 因此，自学者对这一章所讲的内容应给予足够的重视.

在这一章里，配合所讲内容，前后共安排了九个习题. 现结合自学方法依次讲解如下.

一、关于习题 16.1 的讲解

这个习题在本卷上册第 8 页，是在讲了原函数与不定积分的概念之后布置的. 自学者在做这个习题之前，应先把第 1～8 页的课文和例题看懂，把原函数的定义、存在条件，不定积分的定义及其几何意义搞懂，然后再做这个习题. 做这个习题时，如果还有困难，可看下面的讲解，但看懂之后，自己仍应独立、正确、认真地做

一遍，以培养和锻炼自己的解题能力.

16.1 一曲线过原点，且在每一点处的切线的斜率等于 $2x$，求这曲线的方程.

解：设所求曲线的方程为 $\quad y=f(x). \qquad (1)$

则根据导数的几何意义，所求曲线 $y=f(x)$ 上任一点处的切线的斜率等于函数 $f(x)$ 的一阶导函数：

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{2}$$

根据题设，所求曲线(1)上每一点处的切线的斜率都等于 $2x$，即

$f'(x)=2x$ 　　代入(2)式，得：

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=2x, \qquad \mathrm{d}f(x)=2x\mathrm{d}x. \tag{3}$$

在(3)式两边积分，得：

$$f(x)=x^2+C. \tag{4}$$

把(4)式代入(1)式，得： $\quad y=x^2+C. \qquad (5)$

(5)式中的 C 为待定常数，现在就来确定这个常数. 因所求曲线通过原点(0,0)（题设），所以，原点的坐标必定满足所求曲线的方程，据此把原点的坐标，也就是把

$x=0,y=0$ 代入(5)式，得： $\quad 0=0^2+C$，即 $C=0$.

把算得的 $C=0$ 代入(5)式，得：

$$y=x^2. \tag{6}$$

这就是通过原点且在每一点处的切线的斜率等于 $2x$ 的曲线的方程. 这曲线是抛物线，该抛物线在平面直角坐标系 xOy 中顶点合于原点，对称轴合于 y 轴，开口向上. (5)式表示的是平行于该抛物线的抛物线族.

16.2 证明函数 $y=\ln(ax)$ 与 $y=\ln x$ 是同一个函数的原函数.

证：根据我们在本卷上册第 1 ~ 3 页所讲，连续函数的原函数存在，而且有无限多；在同一个函数的众多的原函数之间，彼此相

差一个常数. 据此,欲证 $y=\ln(ax)$ 与 $y=\ln x$ 是同一个函数的原函数,只需证明 $y=\ln(ax)$ 与 $y=\ln x$ 之间只相差一个常数就行了. 事实上,因 $y=\ln(ax)=\ln a+\ln x$,所以,$y=\ln(ax)$ 与 $y=\ln x$ 之间相差常数 $\ln a$. 所以,它们是同一个函数的原函数,证毕.

至于 $y=\ln(ax)$ 与 $y=\ln x$ 是哪一个函数的原函数,这是进一步需要回答的问题. 根据原函数的定义(见本卷上册第 2 页)任何连续函数都是它的一阶导数的原函数,在这里因

$$y'=[\ln(ax)]'=\frac{a\cdot 1}{ax}=\frac{1}{x},$$

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

所以,$y=\ln(ax)$ 与 $y=\ln x$ 都是函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的原函数.

16.3 验证函数 $\frac{1}{2}e^{2x}$, $e^x\mathrm{sh}x$, 和 $e^x\mathrm{ch}x$ 各差一个常数,并证明所给的每一个函数都是 $\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数.

证:根据双曲函数的定义(见本书第二卷上册第 102 ~ 115 页),因

$$\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}). \tag{1}$$

$$\mathrm{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}). \tag{2}$$

$$e^x\mathrm{sh}x\xlongequal{(1)}e^x\cdot\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}(e^x\cdot e^x-e^x\cdot e^{-x})$$

$$=\frac{1}{2}(e^{x+x}-e^{x-x})=\frac{1}{2}(e^{2x}-e^0)=\frac{1}{2}(e^{2x}-1).$$

即
$$e^x\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}. \tag{3}$$

$$e^x\mathrm{ch}x\xlongequal{(2)}e^x\cdot\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\frac{1}{2}(e^x\cdot e^x+e^x\cdot e^{-x})$$

$$=\frac{1}{2}(e^{x+x}+e^{x-x})=\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{0})=\frac{1}{2}(e^{2x}+1),$$

即
$$e^{x}\mathrm{ch}x=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}. \tag{4}$$

从(3),(4)两式不难看出:函数$\frac{1}{2}e^{2x}$与$e^{x}\mathrm{sh}x$,$\frac{1}{2}e^{2x}$与$e^{x}\mathrm{ch}x$之间相差$\pm\frac{1}{2}$;而$e^{x}\mathrm{sh}x$与$e^{x}\mathrm{ch}x$之间相差±1.因$\pm\frac{1}{2}$及±1都是常数.所以,本题的前半部分命题得证.

现在再来证明$\frac{1}{2}e^{2x}$,$e^{x}\mathrm{sh}x$及$e^{x}\mathrm{ch}x$都是

$$\frac{e^{x}}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x} \tag{5}$$

的原函数,根据原函数的定义,欲证$\frac{1}{2}e^{2x}$,$e^{x}\mathrm{sh}x$及$e^{x}\mathrm{ch}x$都是(5)的原函数,只需证明:

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'_{x}=(e^{x}\mathrm{sh}x)'_{x}=(e^{x}\mathrm{ch}x)'_{x}=\frac{e^{x}}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}. \tag{6}$$

事实上,因

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'_{x}=\frac{1}{2}(e^{2x})'_{x}=\frac{1}{2}(e^{2x})'_{2x}\cdot(2x)'_{x}=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot2\times1=e^{2x},$$

即
$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'_{x}=e^{2x}. \tag{7}$$

$$(e^{x}\mathrm{sh}x)'_{x}\xlongequal{(3)}\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\right)'_{x}=\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'_{x}-\left(\frac{1}{2}\right)'_{x}\xlongequal{(7)}e^{2x}-0=e^{2x},$$

即
$$(e^{x}\mathrm{sh}x)'_{x}=e^{2x}. \tag{8}$$

$$(e^{x}\mathrm{ch}x)'_{x}\xlongequal{(4)}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\right)'_{x}=\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'_{x}+\left(\frac{1}{2}\right)'_{x}\xlongequal{(7)}e^{2x}+0=e^{2x},$$

即
$$(e^{x}\mathrm{ch}x)'_{x}=e^{2x}. \tag{9}$$

$$\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}\xlongequal{(2)-(1)}\frac{e^x}{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})}$$

$$=\frac{e^x}{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x})}=\frac{e^x}{\frac{1}{2}(2e^{-x})}=\frac{e^x}{e^{-x}}=e^x\cdot e^x=e^{x+x}=e^{2x},$$

即
$$\frac{e^x}{\mathrm{ch}x\cdot \mathrm{sh}x}=e^{2x}. \tag{10}$$

比较(7),(8),(9),(10)四式,不难看出,它们的右边相同,据此推知它们的左边必相等,即第(6)式必成立,证毕.

16.4 质点作直线运动,已知其加速度为 $a=12t^2-3\sin t$, 如果 $t=0$ 时,$v_0=5$,$S_0=-3$,求:

(a) 速度 v 与时间 t 的函数关系;

(b)距离 S 与时间 t 的函数关系.

解:(a)因运动物体的加速度是速度函数的一阶导数,即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a,\text{而 } a=12t^2-3\sin t(\text{题设}),$$

于是 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t=(12t^2-3\sin t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}(4t^3+3\cos t)$,

所以 $v=\int \mathrm{d}v=\int \mathrm{d}(4t^3+3\cos t)=4t^3+3\cos t+C_1$,

即
$$v=4t^3+3\cos t+C_1. \tag{1}$$

(1)式表示的是所论质点在任意时刻 t 时,运动的速度 v 与时间 t 的函数关系. 其中 C_1是任意常数,为了建立在所给条件:$t=0$ 时,$v_0=5$ 下速度 v 与时间 t 的函数关系式,尚需确定(1)式中的 C_1 值,为此,把 $t=0$,$v=5$ 代入(1)式,得:

$$5=4\times 0^3+3\cos 0+C_1,\qquad 5=0+3+C_1,$$

$C_1=5-3=2$, 把 $C_1=2$ 代入(1) 式,得:

$$v=4t^3+3\cos t+2. \tag{2}$$

(2)式表示的就是我们所要建立的质点运动时速度 v 与时间

t 之间的函数关系.

(b)因运动物体的速度 v 是位移(距离)函数 S 的一阶导数,即

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=v,$$

$$\mathrm{d}S=v\mathrm{d}t\xlongequal{(2)}(4t^3+3\cos t+2)\mathrm{d}t=\mathrm{d}(t^4+3\sin t+2t)$$

上式两边积分,得:

$$S=t^4+3\sin t+2t+C_2. \tag{3}$$

(3)式表示的是所论质点在任意时刻时,运动的距离 S 与时间 t 之间的函数关系,其中 C_2 是任意常数,为了建立所论质点在所给的条件下($t=0$ 时,$S_0=-3$)距离 S 与时间 t 之间的函数关系,需要根据所给条件确定(3)式中 C_2 的值. 为此,把所给条件 $t=0,S=-3$ 代入(3)式,得:

$$-3=0^4+3\sin 0+2\times 0+C_2,$$

$$-3=0+0+0+C_2,\quad C_2=-3.$$

把算得的 $C_2=-3$ 代入(3)式,得:

$$S=t^4+3\sin t+2t-3. \tag{4}$$

这就是我们所要建立的质点运动时距离 S 与时间 t 之间的函数关系.

二、关于习题 16.2 的讲解

这个习题在本卷上册第 18 页,是在讲了不定积分的性质和基本积分公式之后布置的. 自学者在做这个习题之前,应先把第 9 ~ 18 页的课文和例题看懂,对不定积分的有关性质和基本积分公式有所了解之后再做这个习题. 做这个习题时,如果还有困难,可看下面的讲解,但看懂之后,自己仍应独立、正确、认真地做一遍,以

培养和锻炼自己的解题能力.

16.5　求不定积分$\int \frac{1}{x^3}dx$.

解:$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{1}{-3+1} + C$(利用上册第12页公式〔16.19〕)$= \frac{1}{-2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$.

16.6　求不定积分$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$.

解:在这个不定积分中,h是积分变量,$2g$是常数,于是

$$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int \frac{dh}{\sqrt{2g}\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

(常数可以提到积分号外,见上册第11页性质4)

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int \frac{dh}{h^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int h^{-\frac{1}{2}}dh = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}h^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

(利用上册第12页公式〔16.19〕)

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2h^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}} + C = \frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} + C = \sqrt{\frac{2h}{g}} + C,$$

即

$$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + C.$$

16.7　求不定积分$\int (3x^{0.4} - 5x^{-0.7})dx$.

解:$\int (3x^{0.4} - 5x^{-0.7})dx$(差的积分,等于积分的差,见上册第10页性质3)$= \int 3x^{0.4}dx - \int 5x^{-0.7}dx$

$= 3\int x^{0.4}dx - 5\int x^{-0.7}dx$(常数可以提到积分号外)

$= 3\frac{1}{0.4+1}x^{0.4+1} - 5\frac{1}{-0.7+1}x^{-0.7+1} + C$（利用公式[16.19]）

$= \frac{3}{1.4}x^{1.4} - \frac{5}{0.3}x^{0.3} + C,$

即 $$\int(3x^{0.4} - 5x^{-0.7})\mathrm{d}x = \frac{3}{1.4}x^{1.4} - \frac{5}{0.3}x^{0.3} + C.$$

16.8 求不定积分 $\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

解: 因 $\frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1-2x+x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{1-\frac{1}{3}} + x^{2-\frac{1}{3}}$

$= x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{3}},$ (1)

所以 $$\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{(1)} \int(x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{3}})\mathrm{d}x$$

$= \int x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x - 2\int x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x + \int x^{\frac{5}{3}}\mathrm{d}x$（利用公式[16.19]）

$$= \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1} - 2\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1} + \frac{1}{\frac{5}{3}+1}x^{\frac{5}{3}+1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{\frac{5}{3}}x^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{\frac{8}{3}}x^{\frac{8}{3}} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C$$

即 $$\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C.$$

16.9 求不定积分 $\int\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

解: 仿前题，因 $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 1}{x^{\frac{1}{4}}}$

$= x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}.$ (2)

所以，$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx \xlongequal{(2)} \int (x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}})dx$

$= \int x^{\frac{1}{4}}dx - 2\int x^{\frac{5}{12}}dx + \int x^{-\frac{1}{4}}dx$（利用公式[16.19]）

$$= \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1} - 2\frac{1}{\frac{5}{12}+1}x^{\frac{5}{12}+1} + \frac{1}{-\frac{1}{4}+1}x^{-\frac{1}{4}+1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{4}}x^{\frac{5}{4}} - \frac{2}{\frac{17}{12}}x^{\frac{17}{12}} + \frac{1}{\frac{3}{4}}x^{\frac{3}{4}} + C = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$$

即 $$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C.$$

16.10　求不定积分$\int \frac{x^3-27}{x-3}dx$.

解：$\int \frac{x^3-27}{x-3}dx = \int \frac{x^3-3^3}{x-3}dx$

$= \int \frac{(x-3)(x^2+x\cdot 3+3^2)}{x-3}dx = \int (x^2+3x+9)dx$（约分）

$= \int x^2dx + 3\int xdx + 9\int dx$（和的积分等于积分的和）

$= \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{3}{1+1}x^{1+1} + 9x + C$（利用公式[16.19]）

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + C.$

16.11　求不定积分$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

解：$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1^2-(x^2)^2}}dx$（分解因式）

$= \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}}dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}dx$（约分）

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$$（利用上册第 12 页公式〔16. 10〕）.

16. 12　求不定积分$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

解:$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$$=\int\left[\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}+\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\right]dx=\int\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right]dx$$

$$=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+\operatorname{arctg}x+C$$

（利用上册第 12 页公式〔16. 19〕及〔16. 12〕）

$$=-x^{-1}+\operatorname{arctg}x+C=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x+C.$$

16. 13　求不定积分$\int 3^xe^xdx$.

解:$\int 3^xe^xdx=\int(3e)^xdx$（利用上册第 12 页公式〔16. 16〕）

$$=\frac{1}{\ln(3e)}(3e)^x+C.$$

16. 14　求不定积分$\int\operatorname{tg}^2xdx$.

解:$\int\operatorname{tg}^2xdx=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-\frac{\cos^2x}{\cos^2x}\right)dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C$$（利用上册第 11 页公式〔16. 6〕）.

16. 15　求不定积分$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}dx$.

解:$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}dx=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}dx$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$= -\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x + C$(利用上册第 11 页公式[16.6] 及[16.7]).

或 $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{2} d\sin 2x}{\left(\frac{2\sin x\cos x}{2}\right)^2} = \int \frac{\frac{1}{2} d\sin 2x}{\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2} d\sin 2x}{\frac{(\sin 2x)^2}{4}} = 2\int \frac{d\sin 2x}{(\sin 2x)^2} = 2\int (\sin 2x)^{-2} d\sin 2x$$

$$= \frac{2}{-2+1}(\sin 2x)^{-2+1} + C = -2(\sin 2x)^{-1} + C.$$

16.16 求不定积分$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$.

解:$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} dx$$

$= \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)} dx$(利用三角关系式)

$$= \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos^2 x - 1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\right) dx = \int \frac{dx}{2\cos^2 x} + \int \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}x + \frac{1}{2}x + C.$$

三、关于习题 16.3 的讲解

这个习题在本卷上册第 40 页,是在讲了换元积分法之后布置

的.自学者在做这个习题之前,应先把第 19 ~ 40 页的课文和例题看懂,对两种换元积分法有了一定的了解之后再做这个习题.做这个习题时,如果还有困难,可看下面的讲解,但看懂之后,自己仍应独立、正确、认真地做一遍,以培养和锻炼自己的解题能力.

用换元积分法求下列的不定积分:

16.17　求不定积分 $\int\frac{3\mathrm{d}x}{(1-2x)^2}$.

解: $\int\frac{3\mathrm{d}x}{(1-2x)^2}=3\int(1-2x)^{-2}\mathrm{d}x=3\int(1-2x)^{-2}\frac{\mathrm{d}(1-2x)}{-2}$

(凑微分 $\mathrm{d}(1-2x)$)

$=-\frac{3}{2}\int(1-2x)^{-2}\mathrm{d}(1-2x)$ (令 $1-2x=u$)

$=-\frac{3}{2}\int u^{-2}\mathrm{d}u=-\frac{3}{2}\frac{1}{-2+1}u^{-2+1}+C$

$=\frac{3}{2}u^{-1}+C=\frac{3}{2}\frac{1}{u}+C$(把 u 还原成 $1-2x$) $=\frac{3}{2(1-2x)}+C.$

这种方法也可称为**"凑换法"**,因为在换元之前,作了凑微分 $\mathrm{d}(1-2x)$,本题也可以光换不凑,如

$$\int\frac{3\mathrm{d}x}{(1-2x)^2}(\text{令 }1-2x=u)=\int\frac{3\mathrm{d}\left(\frac{1-u}{2}\right)}{u^2}$$

$=\int\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\mathrm{d}u\right)}{u^2}=-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=-\frac{3}{2}\int u^{-2}\mathrm{d}u$

$=-\frac{3}{2}\frac{1}{-2+1}u^{-2+1}+C=\frac{3}{2}u^{-1}+C=\frac{3}{2u}+C=\frac{3}{2(1-2x)}+C$

(把 u 还原成 $1-2x$).

也可以光凑不换,如

$$\int\frac{3\mathrm{d}x}{(1-2x)^2}=-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1-2x)}{(1-2x)^2}$$