21 世纪高等院校教材

线性代数

易伟明　王平平　杨淑玲　编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

线性代数

易伟明　王平平　杨淑玲　编著

科学出版社

北京

内容简介

本书根据教育部颁布的经济、管理本科专业《经济数学》教学大纲，针对经济数学教学改革的需要，以培养“厚基础、宽口径、高素质”人才为宗旨，系统地介绍了线性代数的主要内容和方法，包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型、经济应用与数学实验等7章，书末附有练习与习题参考答案．本书注重基本知识、基本技能、基本方法的训练以及实际应用能力的培养，注重学科的前沿性，将经济应用、数学实验以及Matlab软件的运用编入教材，便于学生学以致用．例题和习题选用基础、适中和综合提高三类题目，既照顾一般程度水平的学生要求，也兼顾准备参加硕士研究生入学考试读者的需求．本书是江西省精品课程教材，江西财经大学精品课程网可作为本书的教学支持网．

本书适合经济、管理类等专业的高等院校学生、成人教育学生、参加国家自学考试的学生，以及准备参加经济管理类硕士研究生入学考试的有关人士等．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/易伟明，王平平，杨淑玲编著．—北京：科学出版社，2007
21世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-019660-6

Ⅰ.线… Ⅱ.①易… ②王… ③杨… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第126793号

责任编辑：李鹏奇　胡华强　吴伶伶／责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007年8月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2007年8月第一次印刷　印张：16 3/4
印数：1—7 000　字数：321 000

定价：23.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉)

前　言

线性代数是重要的基础学科之一，在自然科学、工程技术、经济与管理等领域具有非常广泛的应用. 本书是作者根据素质教育的要求，兼顾经济、管理专业的特点，融入多年教学实践的经验和体会编撰而成的.

本书系统地介绍线性代数的主要内容和方法，其主要特点是以能力培养为主线，贯穿能力、知识与技巧三位一体的思维定式. 在注重基础和重点知识面的同时，也考虑到考研的需要. 在学科体系的总体框架下，知识内容围绕重点由浅入深展开，题型方法注重典型性、启发性和针对性. 全书以提供思维的钥匙、培养综合分析和实际运作能力为宗旨，授之以鱼，更授之以渔. 本书适合高等院校在校生、备考研究生的学生和其他人员学习使用.

本书由江西财经大学信息管理学院易伟明教授、王平平副教授、杨淑玲副教授编著. 易伟明负责总体构架和编写大纲的统筹设计，以及全书的修改定稿工作. 全书共分 7 章，王平平撰写第 1 章、第 3 章两章；杨淑玲撰写第 2 章、第 7 章两章；易伟明撰写第4～6 章三章.

最后，要特别地感谢江西财经大学信息管理学院领导给予本书出版的重视和大力支持，感谢各位同仁对本书的关爱和帮助. 另外，还要衷心地感谢陶长琪教授对编写大纲、书稿的审定和指导.

由于成书时间仓促，作者水平有限，书中错误在所难免，敬请广大读者批评指正.

作　者

2007 年 5 月于南昌

目　录

第1章　行　列　式

行列式是线性代数的一个重要工具.本章的主要内容有:排列与行列式的定义,用行列式性质计算行列式,用克拉默法则求线性方程组的解.

1.1　排列与逆序

作为定义 n 阶行列式的基础,我们先讨论排列与逆序的概念及其性质.

定义 1.1　把 n 个不同的元素 $1,2,\cdots,n$ 排成一行,叫做这 n 个元素的一个全排列,也称 n 元(阶)排列.

例如,2341 是一个四元排列,54321 是一个五元排列.

n 元排列的所有排列种数,共有 $n!$ 个.事实上,从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上,有 n 种取法;又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上,有 $n-1$ 种取法,……,这样继续下去,直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上,只有一种取法.于是所有 n 元排列共有

$$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!(\text{个}).$$

比如,三元排列共有 $3!=6$ 个,即 123,132,213,231,312,321.

例中只有一个排列 123 中的数字是从小到大按自然顺序排列的,在其他排列中都有大的数排在小的数之前.下面引入逆序和逆序数的概念.

定义 1.2　在一个 n 元排列中,如果一个大的数排在一个小的数的前面,就称这两个数构成一个逆序.一个 n 元排列中所有逆序的总数,称为这个排列的逆序数.

一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

由定义可知,一个 n 元排列的逆序数的计算方法是:先算出 j_n 前面比 j_n 大的数的个数 k_n,然后算出 j_{n-1} 前面比 j_{n-1} 大的数的个数 k_{n-1},……,从后向前,用类似方法计算下去,直到算出 j_2 前面比 j_2 大的数的个数 k_2,于是就得到排列的逆序数为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=k_n+k_{n-1}+\cdots+k_2.$$

例 1　计算排列 2431 的逆序数.

解　$k_4=3,\quad k_3=1,\quad k_2=0,\quad \tau(2431)=3+1+0=4.$

例 2　计算排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数.

解　$k_n=n-1,\quad k_{n-1}=n-2,\quad \cdots,\quad k_3=2,\quad k_2=1,$

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.3　逆序数为奇数的排列,称为奇排列;逆序数为偶数或零的排列,称为偶排列.

例如,14325 为奇排列,例 1 中的 2431 为偶排列.

定义 1.4　把一个排列中的某两个数的位置互换,其余数的位置不动,这样的变换称为对换.

比如,将排列 2431 中的 1 与 4 对换,得排列 2134,而 $\tau(2134)=1$,即排列 2134 为奇排列,对换改变了排列的奇偶性.

定理 1.1　经过一次对换,排列的奇偶性改变.

证　先证相邻两数对换的情形.排列

$$\cdots ij\cdots \tag{1.1}$$

经过 i,j 对换,变成新排列

$$\cdots ji\cdots \tag{1.2}$$

显然,在排列(1.1)中,如果 i,j 与其他的数构成逆序,那么在排列(1.2)中仍然构成逆序;如不构成逆序,则在排列(1.2)中也不构成逆序;两个排列的逆序数的不同,仅取决于 i,j 的次序.

如果 $i<j$,则排列(1.2)比排列(1.1)增加了一个逆序;如果 $i>j$,则排列(1.2)比排列(1.1)减少了一个逆序.因此,由排列(1.1)～(1.2),逆序数要么增加一个,要么减少一个,都改变了排列的奇偶性.

再证一般对换的情形.设排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \tag{1.3}$$

把 i 与 j 对换,得到一个新排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \tag{1.4}$$

这样一个对换可以通过一系列的相邻对换来完成.把排列(1.3)中的 i 与 k_1 对换,再与 k_2 对换,……,直到与 k_s 对换,得到排列

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots \tag{1.5}$$

然后把排列(1.5)中的 j 与 i 对换,再与 k_s 对换,……,直到与 k_1 对换得到排列(1.4),即

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots$$

显然,由排列(1.3)～(1.5)经过了 s 次相邻对换,由排列(1.5)～(1.4)经过了 $s+1$ 次相邻两数对换.因此,i,j 对换可以通过 $2s+1$ 次相邻两数对换来实现,$2s+1$ 是奇数.相邻对换一次改变排列的奇偶性,故 $2s+1$ 次相邻对换改变了排列的奇偶性.

定理 1.2　所有 $n(\geqslant 2)$ 元排列中,奇偶排列各占一半,均为$\frac{n!}{2}$个.

证 设共有 m 个奇排列，k 个偶排列，则 $m+k=n!$. 将每个奇排列对换一次，相应得到一个偶排列. 于是这 m 个不同的奇排列经过相同的一个对换后，就得到 m 个偶排列，显然，$m\leqslant k$；同理可得 $k\leqslant m$，所以 $m=k=\frac{n!}{2}$.

例 3 三元排列中，奇偶排列各为 3 个.

奇排列：132，213，321；

偶排列：123，231，312.

练习 1.1

1. 求下列各排列的逆序数：

(1) 136452；

(2) 4375261；

(3) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$.

2. 确定 i 和 j 的值，使得排列 $38i7j625$ 为奇排列.

3. 四元排列 $j_1j_2j_3j_4$ 经过奇数次对换变成 2314，排列 $j_1j_2j_3j_4$ 的奇偶性如何？

4. 若排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=k$，证明

$$\tau(j_n\cdots j_2j_1)=\frac{n(n-1)}{2}-k.$$

1.2 n 阶行列式

1.2.1 二阶与三阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\end{cases}\tag{1.6}$$

利用加减消元法计算，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时，得方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\\[2ex] x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\end{cases}$$

这是二元线性方程组的求解公式. 为记忆方便，令

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

此式叫做二阶行列式. 方程组(1.6)的解可用二阶行列式表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases}$$

二阶行列式含有两行、两列，行列式中的数叫做行列式的元素，a_{ij} 就是第 i 行第 j 列位置上的元素. 二阶行列式是下列两项的代数和：一项是从左上角到右下角的对角线上两个元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的对角线上两个元素的乘积，取负号. 代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为行列式的展开式，称为行列式的值. 展开式中的两项可用"对角线法则"记忆，实线连结的两个元素的乘积取正号，虚线连结的两个元素的乘积取负号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

于是，当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，方程组(1.6)的解也可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \end{cases}$$

其中 D 称为方程组(1.6)的系数行列式，而 D_1, D_2 分别为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

D_1 是用方程组(1.6)中的常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 而得，D_2 是用 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 得到的.

三阶行列式

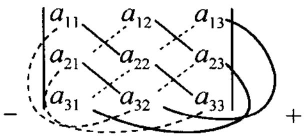
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

其值定义为：

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

其展开式中的 6 项可按"对角线法则"来记忆(见下图)，实线上三个元素相乘取正号，虚线上三个元素相乘取负号. 并称 a_{11}, a_{22}, a_{33} 为主对角线上的元素，a_{13}, a_{22}, a_{31}

为副对角线上的元素. 三阶行列式的特点为:



(1) 行列式展开式的每一项都是来自于不同行不同列的三个元素的乘积,每项一般形式可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,该项元素的第一下标(行标)按自然顺序排列,第二下标(列标)是 1,2,3 所有的排列 123,231,312,132,213,321 中的一个;

(2) 展开式中共有 3! =6 项;

(3) 由于 $\tau(123)=0$,$\tau(231)=2$,$\tau(312)=2$,故知列指标为偶排列的项的前面取正号;而 $\tau(132)=1$,$\tau(213)=1$,$\tau(321)=3$,因此,列指标为奇排列的项的前面取负号. 所以,每项的符号完全可由列指标排列的逆序数决定,即每项的符号可写成 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

于是三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

对于二阶行列式,其展开式也有类似规律,下面定义 n 阶行列式.

1.2.2 n 阶行列式的定义

定义 1.5 把 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并规定 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,称此数学符号为 n 阶行列式,其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对n 元排列$j_1j_2\cdots j_n$ 所有可能排列求和. 并称$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为主对角线上元素. 上述 n 阶行列式通常简记作 $\det(a_{ij})_n$.

n 阶行列式的特点为:

(1) 当 $n=1$ 时,$|a_{11}|=a_{11}$称为一阶行列式;

(2) 一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是 n 个元素的乘积,且这 n 个元素来自于不同行不同列;

(3) 行列式定义中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的排列求和，共有 $n!$ 项；

(4) 行标按自然顺序排列，每项所带的符号由列标排列的逆序数确定.

例 4　计算下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　由定义，$D = \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，因各项元素都是来自不同行不同列，又 a_{1j_1} 只有当 $j_1=1$ 时，才有 $a_{1j_1} \neq 0$，即 $a_{1j_1}=a_{11}$；而 a_{2j_2} 当 $j_2 \neq 1,2$ 时，$a_{2j_2}=0$，只有当 $j_2=1,2$ 时，a_{2j_2} 才可能不为零，又 $j_1=1$，故 j_2 只能取 2，即 $a_{2j_2}=a_{22}$，依此类推，得 $a_{1j_1}=a_{11}, a_{2j_2}=a_{22}, \cdots, a_{nj_n}=a_{nn}$，即除了 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外，其余各项都为零. 所以

$$D = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

同理可得：上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

特别地，对角形行列式(主对角线以外的元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

行列式定义中，我们将一般项的每个元素的行标按自然顺序排列，但作为数的乘积，每一元素的次序可以任意交换，即行标也可按任意顺序排列，行列式一般项的形式也可写为

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}, \tag{1.7}$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 与 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是两个 n 元排列.

不难证明，行列式一般项(1.7)的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}. \tag{1.8}$$

把项(1.7)中的元素适当调换次序，行指标按自然顺序排列，项(1.7)变成

$$a_{1j_1'} a_{2j_2'} \cdots a_{nj_n'}, \tag{1.9}$$

其符号为

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}. \tag{1.10}$$

由项(1.7)～(1.9)是经过若干元素调换次序得到的，每次调换时，元素的行标和列标所组成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都作一次对换，由定理 1.1 可知，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 同时改变奇偶性，因而，它们的逆序数之和 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$的奇偶性不会改变. 又(1.9)中的行标和列标所组成的排列 $12\cdots n$ 和 $j_1'j_2'\cdots j_n'$的逆序数之和为

$$\tau(12\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')=\tau(j_1'j_2'\cdots j_n'),$$

故 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')$ 的奇偶性相同，从而 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$，即(1.7)与(1.9)的符号相同.

这就表明，行列式每一项的符号可由排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数之和来确定.

由此可得行列式的等价定义：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

同理，若将每项列标按自然顺序排列，一般项记为

$$a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

它的符号为$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$，所以每项可表示为$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$.

从而得到另外一个行列式的等价定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 由等价定义，$D=\sum\limits_{i_1i_2i_3i_4}(-1)^{\tau(i_1i_2i_3i_4)}a_{i_11}a_{i_22}a_{i_33}a_{i_44}$.

因为 a_{i_11}取自第一列，仅当 $i_1=1$，即 $a_{11}=1$ 时，才有 $a_{i_11}\neq 0$，故取 $i_1=1$；同理，

$a_{i_2 2}$取自第二列，仅当 $i_2=3$，即 $a_{i_2 2}=2$ 时，才有 $a_{i_2 2}\neq 0$，故取 $i_2=3$；$a_{i_3 3}$取自第三列，因 $i_1=1,i_2=3$，故 i_3 只能取 2 或 4，即 $a_{i_3 3}=-1$ 或 2；$a_{i_4 4}$取自第四列，若 $i_3=2$，则 $i_4=4$，若 $i_3=4$，则 $i_4=2$，于是

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}+(-1)^{\tau(1342)}a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} \\ &= (-1)^1\times 1\times 2\times(-1)\times 3+(-1)^2\times 1\times 2\times 2\times 2 \\ &= 14. \end{aligned}$$

练习 1.2

1. 下列各项，哪些是五阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}$$

的项？若是，决定该项的符号：

(1) $a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$；　(2) $a_{31}a_{12}a_{43}a_{52}a_{24}$；

(3) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$；　(4) $a_{21}a_{42}a_{53}a_{14}a_{25}$.

2. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & \sec\theta \\ \sec\theta & 1 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} -1 & -c & -b \\ c & -1 & -a \\ b & a & -1 \end{vmatrix}$.

3. 用定义计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.3 行列式的性质

从 1.2 节可以看出，用定义计算行列式是很困难的. 因此，有必要进一步研究行列式的性质，以便简化行列式的计算.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 D 的行与列互换后得到的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^{T}（或 D'）

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 设

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

显然 $b_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$，由定义有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}}&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \\ &=D\quad(\text{由行列式等价定义可得}). \end{aligned}$$

性质表明，行列式的行所具备的性质，其列同样具备，即行列式的行与列有相同地位.

性质 1.2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证 令

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (s\text{ 行}) \\ \\ (k\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix},$$

s 行与 k 行互换得

$$D_2=\begin{array}{|cccc|l}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & (s\text{ 行}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & (k\text{ 行}) \\
\vdots & \vdots & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} &
\end{array}.$$

D_2 的一般项可写成:

$$a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}.$$

将其中 a_{kj_k} 与 a_{sj_s} 互换次序得:$a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$,这恰好是 D_1 的一般项,D_1 中该项的符号为 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_k\cdots j_n)}$. D_2 的一般项 $a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$ 中的 a_{kj_k} 是 D_2 中的第 s 行的元素,a_{sj_s} 是 D_2 中第 k 行的元素,其行标排列为 $1\cdots s\cdots k\cdots n$,列标排列为 $j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n$,故其符号为

$$(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots k\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n)}.$$

又 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_k\cdots j_n)}$,所以 D_2 的一般项与 D_1 的一般项只相差一个符号,故 $D_2=-D_1$.

推论 若行列式两行(列)的对应元素相同,则行列式为零.

证 将相同的两行(列)互换,得 $D=-D$,即 $D=0$.

性质 1.3 行列式的某一行(列)的公因子可以提到行列式符号的前面,即

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.$$

证
$$\begin{aligned}
\text{左边}&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\
&=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\
&=\text{右边}.
\end{aligned}$$

推论 1 若行列式中有一行(列)的元素全为零,则行列式为零.

推论 2 若行列式中有两行(列)的对应元素成比例,则行列式为零.

性质 1.4 若行列式某行(列)的所有元素可表示成两数之和,则行列式可写

成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 左边 $\displaystyle =\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$
$$+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

= 右边.

性质 1.5 将行列式的某一行(列)的全部元素乘以同一数 k 后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 1.4 和性质 1.3 的推论 2，容易得证.

例 6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 利用行列式的性质，将行列式 D 化为上(下)三角形行列式.