GAODENG YINGYONG SHUXUE

高等应用数学

□ 主编 郭建萍 贾进涛 □

国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等应用数学

主编　郭建萍　贾进涛

国防工业出版社
·北京·

内容简介

全书内容共分六篇十五章，分别是：函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数微分学、定积分的应用、空间解析几何简介、多元函数微分学、多元函数积分学基础、常微分方程、无穷级数初步、概率论初步、数理统计基础、线性代数初步. 书后附有九个附录：初等数学中的常用公式、几种常用的曲线、积分表、泊松分布表、标准正态分布表、χ^2 分布表、t 分布表、F 分布表、概率论与数理统计初步及基础预备知识.

本书说理浅显，便于自学，可作为高等专科教育、高等职业教育、成人教育工科类各专业教材，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/郭建萍，贾进涛主编. —北京：国防工业出版社，2007.9

ISBN 978-7-118-05299-2

Ⅰ. 高... Ⅱ. ①郭... ②贾... Ⅲ. 应用数学 Ⅳ. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 113571 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 28¾　字数 667 千字

2007 年 9 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—5000 册　定价 45.00 元

国防书店：(010)68428422　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　发行业务：(010)68472764

前　言

根据国家教委关于“抓好高职高专教材建设”的指示精神，为适应高职高专学校培养高等技术应用型人才和新形势下高职教育基础课改革的需要，急需编写适用的、具有特色的高职数学教材.本教材正是针对这一需要编写的.

本教材力求贯彻“以应用为目的，以必需够用为度”和少而精原则，在保证数学体系基本完整的前提下，注意讲清概念，减少数理论证，注意培养学生基本运算能力和分析问题、解决实际问题的能力，重视理论联系实际.结合目前我国高职高专生源的特点及编者多年参与全国大学生数学建模指导的经验和体会，在教材中有机地渗透简单的数学模型，突出了以培养学生的数学应用意识的目的，更好地奠定了专业课学习的坚实基础.

本书每节后配有习题，每章后配有复习题，书末附有初等数学常用公式表、积分表、常用的概率分布表、常用平面曲线和部分习题答案等.

本教材共设六篇十五章，主要包括：一元函数微积分学、多元函数微积分学、常微分方程、无穷级数初步、概率论与数理统计基础和线性代数初步.全书共计约70万字.对于标有*号的内容可根据专业需要选取.其中：第一章、第七章为贾进涛编写；第二章、第三章为陶华编写；第四章、第六章为杜玉贞编写；第五章、第八章为郭建萍编写；第九章、第十章为王德才编写；第十一章、第十二章为任丽萍编写；第十三章、第十四章、第十五章为吕杰编写.

由于编者水平有限，书中的错误和不当之处，恳请读者和同行批评指正.

编　者

2007年2月

目　录

第一篇　一元函数微积分学

第二篇　多元函数微积分学

第三篇　常微分方程

第四篇　无穷级数初步

第五篇　概率论与数理统计基础

第六篇 线性代数初步

第一篇　一元函数微积分学

第一章　函数的极限与连续

数学是研究现实世界中空间形式与数量关系的学科.初等数学研究的对象基本上是不变量,而高等数学则是研究变量的一门数学.变量与变量之间相互依赖的函数关系及其属性是高等数学的主要研究对象,极限概念及其运算法则是研究函数的主要工具,高等数学中的许多概念及运算法则都是在研究极限的基础上建立起来的.

本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节　函　　数

一、集合

讨论变量之间的数量关系时,必须明确变量的取值范围.本书用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合,如果没有特别声明,以后提到的数都是实数.

1. 常用数集

常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外,还有各种类型的区间.设 a、$b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$,则

开区间 $(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$;

闭区间 $[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

左半开区间 $(a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}$;

右半开区间 $[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$;

无穷区间 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$;

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\}$;

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\}$;

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid x<b\}$;

$(-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant b\}$.

2. 邻域

定义 1　设 a、$\delta\in\mathbf{R}$,$\delta>0$,数集 $\{x\mid |x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$,即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体,称为点 a 的 **δ 邻域**,记作 $N(a,\delta)$,点 a 与数 δ 分别称为这邻域的**中心**与**半径**.有时用 $N(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域.数集 $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的**空心 δ 邻域**,记作 $N(\widehat{a},\delta)$.

显然，$N(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，$N(\hat{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

几何上，点 a 的 δ 邻域是以 a 为中心，δ 为半径的开区间. 如图 1－1 所示.

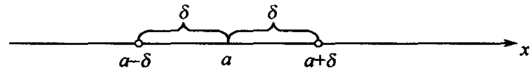

图 1－1

二、函数的概念

定义 2　设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，任意 $x\in D$，变量 y 按照某个对应关系 f 有唯一确定的实数与之对应，记作 $y=f(x)$，则称 f 是定义在 D 上的**函数**. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. D 称为函数 f 的**定义域**. 数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**.

由于常常通过函数值讨论函数，因此习惯上把自变量为 x，因变量为 y 的函数 f 记成 $y=f(x)$.

由上述定义可知，对应关系与定义域是构成函数的两个要素. 如果两个函数具有相同的对应关系和定义域，那么这两个函数是相同的. 由于函数 $y=|x|$ 与 $y=x$ 的对应关系不同，因此它们是两个不同的函数；由于函数 $y=2\ln x$ 与 $y=\ln(x^2)$ 的定义域不同，因此它们也是两个不同的函数；而函数 $y=|x|$ 和 $y=\sqrt{x^2}$ 则是同一个函数.

例 1　某地 2000 年 5 月 15 日—19 日每日最高气温如下表：

日期(5 月)/日	15	16	17	18	19
最高气温/℃	24	25	27	28	28

这个表格确实表达了温度是日期的函数，这里不存在任何计算温度的公式（否则就不需要气象局了），但是每天都会产生一个唯一的最高气温，对每个日期 t，都有一个与 t 相应的唯一的最高气温 N.

例 2　李先生外出郊游，他匀速前进，离家不久，他发现一骑车人的车坏了，他帮助这个人把车修好，随后继续赶路. 请把李先生离家的距离关于时间的函数用图形描述出来（见图 1－2）.

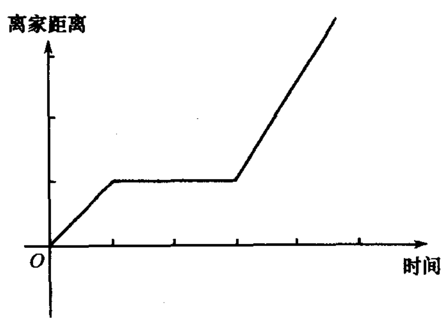

图 1－2

例 3　函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，它的图形如图 1－3 所示，对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

例如，$\operatorname{sgn}(-3)\times|-3|=(-1)\times3=-3$.

例 4　数学式

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

表明变量 y 是 x 的函数,它的图像如图 1-4 所示.

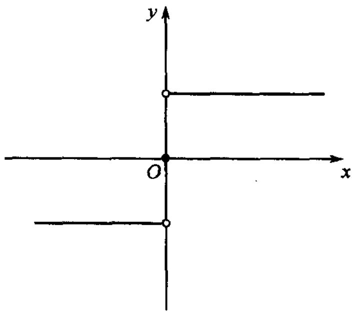

图 1-3

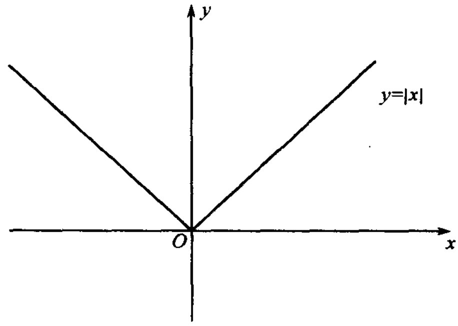

图 1-4

例 5 数学式

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1,\\ -x-1, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$$

也表明变量 y 是 x 的函数.

对于表示实际问题的函数关系,其定义域应由所研究问题的实际意义来确定. 如研究物体的自由落体运动,用 T 表示物体落地的时刻,则自由落体运动中物体下落的距离与时间的函数关系式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是区间$[0,T]$. 对于抽象地用公式表达的函数,函数的定义域是自变量所能取的使公式有意义的一切值. 如例 3 与例 4 中函数的定义域为 $D=\mathbf{R}$,而例 5 中的函数,其自变量的取值范围在函数表达式中已经给定了,它的定义域为 $D=[-1,1)$.

例 6 确定函数 $y=\arcsin\frac{x-3}{2}+\ln(x-1)$ 的定义域.

解 要使 y 有确定的值,必须

$$\begin{cases}\left|\frac{x-3}{2}\right|\leqslant 1,\\ x-1>0.\end{cases}$$

解得 $-2\leqslant x-3\leqslant 2$ 且 $x>1$,即 $1\leqslant x\leqslant 5$ 且 $x>1$,于是定义域为$(1,5]$.

三、函数的表示法

表示函数的常用方法有三种,分别是公式法、表格法和图示法.

1. 公式法

如果变量 x 和变量 y 之间的函数对应关系能用某些已知的运算(或指定的特定运算符号)表示出来,就得到一个包含 x 和 y 的关系式,用这种关系式给出函数的方法叫做公式法. 如例 4、例 5 及例 6 都是用公式法表示的.

2. 图示法

把函数用坐标系上的曲线表示出来,叫做表示函数的图示法. 它的最大优点是直观,

从图中曲线可以很方便地看出两个变量之间的关系，因此常常要把公式给出的函数的图形作出来，弥补公式法的不足. 如例2、例3与例4.

3. 表格法

把自变量所取的值和其对应的函数值列成表格，不需要计算就能知道函数值，这是函数表格法的优点. 如例1、三角函数表、对数表等都是用表格法表示的.

例6中的函数，与定义域中任意一个 x 相对应的 y 都用同一个解析式表示，而例3、例4与例5中的函数，函数的定义域中不同部分的 x，相对应的 y 的解析式不相同. 这种对定义域中的不同部分，对应关系用不同的式子表示的函数，称为**分段函数**. 例3、例4与例5的函数都是分段函数，不过例4中的分段函数可以等价变形为 $y=\sqrt{x^2}$，即对应关系可以化成一个式子. 分段函数是几个式子表示一个（不是几个）函数.

公式法中还有一种隐函数的形式.

若变量 x、y 之间的函数关系是由一个含 x、y 的方程 $F(x,y)=0$ 给出的，则称 **y 是 x 的隐函数**. 相应地，把直接由自变量的式子表示的函数称为**显函数**. 如 $x^2+y^2=2$，$3x+5y+2=0$，$e^{3x}+y+x+e^y=0$（e 是一个大于1的常数）确定的函数都是隐函数. 而 $y=2x+1$ 与 $y=\cos x$ 都是显函数. 由方程 $3x+5y=2$ 可以解得 $y=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}x$，即由方程 $3x+5y=2$ 确定的隐函数可化为显函数，这个过程称为隐函数的显化，但不是每个隐函数都可以显化，如方程 $e^{3x}+y+x+e^y=0$ 确定的隐函数是无法显化的，因此隐函数是表达函数的一种必不可少的形式.

若变量 x、y 之间的函数关系是通过参数方程给出的，这样的函数称为由参数方程确定的函数，简称参数式函数，t 称为参数，如下式：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (t\in T).$$

例如，椭圆的参数方程可以写为

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$$

四、函数的几种特性

设函数的定义域为 D.

1. 有界性

设数集 $X\subset D$，存在正常数 M，任意 $x\in X$，相应的函数值满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果不存在这样的正常数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

如果 $f(x)$ 在 D 上有界，则称 $f(x)$ 为有界函数. 例如，函数 $\cos x$ 是有界函数，而函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 虽然在 $(1,2)$ 内有界，但却是无界函数，因为当 $0<x<1$ 时，不论 M 多么大，取 $x=\frac{1}{M+1}$，都有 $\left|\frac{1}{x}\right|=M+1>M$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，从而 $f(x)$ 在定义域内无界，故 $f(x)$ 是无界函数.

2. 单调性

设区间 $I\subset D$，任意 x_1、$x_2\in I$，$x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是

单调增加的；如果任意 x_1、$x_2 \in I$，$x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

在区间 I 上单调增加或单调减少的函数统称为区间 I 上的单调函数.

3. 奇偶性

设 D 关于原点对称，任意 $x \in D$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；任意 $x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

4. 周期性

设存在一个不为零的常数 T，任意 $x \in D$，有 $x \pm T \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 当周期函数存在最小正周期时，通常所说的周期指的是最小正周期.

周期函数若以 $T(T>0)$ 为周期，则在每个长度为 T 的区间 $[nT,(n+1)T]$ $(n \in \mathbf{Z})$ 上函数的图像是相同的.

五、初等函数

1. 基本初等函数及其图像

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数统称为**基本初等函数**.

2. 复合函数

先举一个例子，设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1-x^2$，以 $1-x^2$ 代替 $y=\sqrt{u}$ 中的 u，得 $y=\sqrt{1-x^2}$. 称这个函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$、$u=1-x^2$ 复合而成的复合函数. 必须注意，并不是任意两个函数都可以复合，如 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 在实数范围内就不能复合.

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，$D=\{x \in X \mid \varphi(x) \in U\} \neq \phi$，则任意 $x \in D$，通过 $u=\varphi(x)$，变量 y 有确定的值 $f(u)$ 与之对应，得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，该函数为 $y=f(u)$、$u=\varphi(x)$ 的**复合函数**. 记作 $y=f[\varphi(x)]$，D 是它的定义域，u 称为**中间变量**.

如，函数 $y=\arctan(x^2)$ 可看作由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成. 这个函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=x^2$ 的定义域.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 例如，设 $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{x}{2}$，则得复合函数 $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$，这里 u 及 v 都是中间变量.

例 7 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$，

$g[f(x)]=g(x^2)=2^{(x^2)}=2^{x^2}$.

例 8 分析下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin^2 x$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x^2+1}}$.

解 (1) $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成；

(2) $y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$是由 $y=e^u, u=\sin v, v=\sqrt{t}, t=x^2+1$ 复合而成.

3. 初等函数

定义 4 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合构成的，可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=2x^2+1, y=\sin\dfrac{1}{x}, y=|x|=\sqrt{x^2}$都是初等函数. 高等数学中讨论的函数许多都是初等函数.

习题 1-1

1. 用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$； (2) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$； (3) $y=\arcsin(x-3)$；

(4) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$； (5) $y=\ln(x+1)$； (6) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

2. 设$f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：

$f(0), f(1), f(-1), f\left(\dfrac{1}{a}\right), f(x_0), f(x_0+h)$.

3. 设$f(x)=\arcsin x$，求下列函数值：

$f(0), f(-1), f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), f(1)$.

4. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$、$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$、$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$、$\varphi(-2)$.

5. 下列各题中，函数$f(x)$和$g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}, g(x)=\sin x$.

6. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$； (2) $y=\sin x+\cos x$； (3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(4) $y=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$.

7. 已知$f(x)=x^3-x, \varphi(x)=\sin 2x$，求$f[\varphi(x)], \varphi[f(x)]$.

8. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin 3x$； (2) $y=e^{\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\cos^3 x$； (4) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x+1}}$.

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=x^2, (-1,0)$;　　(2) $y=\lg x, (0,+\infty)$.

10. 北京到某地的行李费,当行李不超过50kg时,按基本运费0.30元/kg计算;当超过50kg时,超过部分按0.45元/kg收费.试求北京到该地的行李费 y(元)与行李重量 x(kg)之间的函数关系,并作图.

第二节　函数的极限

从研究常量到研究变量,从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体,是人类对自然界认识的一大飞跃,是数学发展中的一个转折点.在上述两个阶段中,不但研究的对象不同,而且研究的方法也不同.初等数学主要采用形式逻辑的方法,静止地、孤立地研究问题,而高等数学则不然,它是以运动的、变化的观点去研究问题,这种不同首先体现在对函数极限的研究中.

中学数学里已讨论过数列的极限,无穷数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 可以看作自变量为正整数 n 的函数 $f(n)$,其中 $f(n)=x_n$.因此数列的极限是一类特殊函数的极限.下面对数列的极限作简要的复习与补充,并进而讨论函数的极限.

一、数列的极限

定义 1　对数列 $\{x_n\}$,当项数 n 无限增大时,数列的相应项 x_n 无限逼近常数 A,则称 **A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限**,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$,并称数列 $\{x_n\}$ 是**收敛的**.若数列 $\{x_n\}$ 没有极限,则称数列 $\{x_n\}$ 是**发散的**.

数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 随自变量 n 的变化而变化.由于 n 只能取正整数,所以研究数列的极限,只需要考虑自变量 $n\to+\infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 的极限.一般地,在研究数列极限时,把记号 $n\to+\infty$ 简记为 $n\to\infty$.

数列 $\{x_n\}$ 的极限是 A,是指数列的项数无限增大时,通项的值的变化趋势——无限逼近常数 A,或者换个说法,即通项 x_n 与 A 的距离 $|x_n-A|$ 无限逼近零.

例 1　观察下列数列的极限:

(1) $x_n=\dfrac{n}{n+1}$;　　(2) $x_n=\dfrac{1}{2^n}$;

(3) $x_n=2n+1$;　　(4) $x_n=(-1)^{n+1}$.

解　先列出所给的数列:

(1) 即为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$;

(2) 即为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$;

(3) 即为 $3,5,7,\cdots,2n+1,\cdots$;

(4) 即为 $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$.

观察如上4个数列在 $n\to\infty$ 时的发展趋势,　得 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$;