21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

信号与线性系统

第四版

全程导学及习题全解

下册

5

主　编　高静波
副主编　王莹莹
　　　　张　遥
主　审　邓　晖

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODEN CAITONGBUFUDAO

信号与线性系统

第四版

全程导学及习题全解

下册

主　编　高静波
副主编　王莹莹
　　　　张　遥
主　审　邓　晖

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

信号与线性系统全程导学及习题全解．下册／高静波主编．
—北京：中国时代经济出版社，2007.9
(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-80221-386-9

Ⅰ.信...Ⅱ.高...Ⅲ.①信号理论—高等学校—教学参考资料
②线性系统—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 104016 号

信号与线性系统全程导学及习题全解(下册)

高静波 主编

出版者	中国时代经济出版社
地　址	北京东城区东四十条 24 号 青蓝大厦 11 层东办公区
邮　编	100007
电　话	(010)68320825（发行部） (010)88361317（邮购）
传　真	(010)68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　本	787 × 1092　1/16
版　次	2007 年 9 月第 1 版
印　次	2007 年 9 月第 1 次印刷
印　张	12.25
字　数	190 千字
印　数	1～5000 册
定　价	15.00 元
书　号	ISBN 978-7-80221-386-9

前 言

信号与系统是通信和电子信息类专业的核心基础课，其中的概念和分析方法广泛应用于通信、自动控制、信号与信息处理、电路与系统等领域。而由管致中、夏恭恪、孟桥老师主编，高等教育出版社出版的《信号与线性系统》是全国同类教材中的佼佼者，该教材自 1979 年第一版出版以来，历经四次修订，目前已累计发行几十万册。本书便是与这本教材配合使用的学习辅导用书。

本书紧扣教材，内容结构与教材一致，共十四章，分为上下两册。其中第七～十四章为下册，包括：离散时间系统的时域分析、变换域分析以及离散傅里叶变换，即第七、八、九章内容；数字滤波器，即第十章内容；线性系统状态变量分析，即第十一章内容；随机变量、随机过程以及线性系统对随机信号的响应，即第十二、十三、十四章内容。每章包括以下三个部分：

本章知识要点

本章知识要点，对教材中的相应内容进行了系统、全面的归纳和总结，有助于读者全面掌握基本知识，清晰把握各章知识的脉络。同时，这一部分也可以作为复习备考的重要手册。

重点难点分析及典型例题解析

重点难点分析，针对每一章中的重点、难点以及一些容易混淆的知识点进行了强调，同时也给出一些经典例题的详细解答，从而帮助学习者真正掌握各章的精髓。

习题全解

习题全解，对原教材中的全部习题做了详细解答。从学习者的角度，给出了例题的思路和步骤，对培养学习者的思维能力，树立理论联系实际的科学观点，提高综合分析问题和解决问题的能力等，都有着较好的帮助作用。

全书由高静波、张瑶、王莹莹、方云等编写，由邓晖主审。本书编写得到了中国时代经济

出版社的领导和有关编辑的支持和帮助，在此表示衷心的感谢！对《信号与线性系统》(第四版)教材作者管致中、夏恭恪、孟桥等老师，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免有疏忽与不妥之处，恳请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2007 年 7 月

目　录

第七章　离散时间系统的时域分析

本章知识要点

一、离散时间信号及其时域特性分析

1. 离散时间信号的定义

(1)仅在一些离散时刻$k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$上才有定义的信号,称为离散时间信号,用$f(k)$表示.

(2)连续时间信号$f(t)$经过抽样(离散化)后所得到的抽样信号,也称离散信号,用$f(kT)$表示,T为抽样周期,$f(kT)$一般简写为$f(k)$.

2. 常见典型序列及其关系

(1)单位取样序列　$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(2)单位阶跃序列　$\varepsilon(k)=\begin{cases}1 & k\geqslant 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(3)矩形序列　$G_N(k)=\begin{cases}1 & 0\leqslant k\leqslant N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(4)实指数序列　$x(k)=a^k\varepsilon(k)$,　a为实数

常见序列之间的关系

$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n)\text{ 或 }\varepsilon(k)=\sum_{n=-\infty}^{k}\varepsilon(n)$$

3. 离散时间信号的运算

(1)乘法和加法:离散信号的乘法和加法,是指它同序号的离散信号值对应的相乘和相加.

(2)移位、翻转和尺度变换

移位　$y(k)=x(k-k_0)$　$x(k)$右移k_0位

$y(k)=x(k+k_0)$　$x(k)$左移 k_0 位

翻转　$y(k)=x(-k)$　与 $x(k)$关于竖轴对称

尺度变换　$y(k)=x(mk)$　是 $x(k)$序列每隔 m 点取一点形成的,相当于时间轴压缩了 m 倍.

(3)离散时间信号的卷积和

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_1(n)f_2(k-n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_2(n)f_1(k-n)$$

卷积运算满足交换律、分配律和结合律.

$$f_1(k)*f_2(k)=f_2(k)*f_1(k)$$

$$[f_1(k)+f_2(k)]*f_3(k)=f_1(k)*f_3(k)+f_2(k)*f_3(k)$$

$$[f_1(k)*f_2(k)]*f_3(k)=f_1(k)*[f_2(k)*f_3(k)]$$

二、离散时间系统

1. 线性时不变离散时间系统的差分方程为

$$\sum_{i=0}^{n}a_iy(k+i)=\sum_{j=0}^{m}b_je(k+j)$$

2. 离散时间系统的单位样值响应

当　$e(k)=\delta(k)$,　$y_{zs}(k)=h(k)$

$y_{zs}(k)=e(k)*h(k)$

系统零状态响应等于系统激励与单位样值响应的卷积和.

3. 离散时间系统的模拟

差分方程的基本关系是延迟(移位)、乘系数、相加,系统的基本单元为延迟、乘系数、相加.

三、抽样定理

抽样定理:为了能从抽样信号 $f_s(k)$中恢复原连续信号 $f(t)$,抽样需满足以下两个条件:

(1)被抽样信号频带是有限的,带宽为 $\omega_m(f_m)$.

(2)抽样间隔 $T_s\leqslant\frac{1}{2f_m}=\frac{\pi}{\omega_m}$;　抽样频率 $f_s\geqslant 2f_m$ 或 $\omega_s\geqslant 2\omega_m$

其最小抽样频率 $f_{smin}=2f_m$ 或 $\omega_{smin}=2\omega_m$ 称为奈奎斯特频率,其允许最大抽样间隔 $T_{max}=\frac{1}{2f_m}=\frac{\pi}{\omega_m}$称为奈奎斯特抽样间隔.

重点难点分析

(1)离散信号的定义与时域特性,及典型序列运算;

(2)离散系统零输入响应,零状态响应的时域分析方法;

(3)抽样定理;

(4)系统模拟框图以及离散系统差分方程.

典型例题解析

【例 7-1】 (东南大学 2000 年考研题)已知离散时间系统的差分方程为 $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=x(k+1)-x(k)$,$x(k)=(-2)^k\varepsilon(k)$,零输入初始条件为 $y_{zi}(0)=0$,$y_{zi}(1)=1$. 求零输入响应、零状态响应以及全响应.

解　由系统差分方程可得系统特征方程

$$\alpha^2+3\alpha+2=0$$

可以求得特征方程的根为 $\alpha_1=-1$,$\alpha_2=-2$.

则可设系统零输入响应为 $y_{zi}(k)=c_1\cdot(-1)^k+c_2(-2)^k$

将　$y_{zi}(0)=0$,$y_{zi}(1)=1$ 代入解得

$$c_1=1,\qquad c_2=-1$$

故　$y_{zi}(k)=[(-1)^k-(-2)^k]\varepsilon(k)$

再求单位样值响应 $h(k)$.

设 $h(k)=A_1(-1)^k+A_2(-2)^k$,通过 $h(k+2)+3h(k+1)+2h(k)=\delta(k+1)-\delta(k)$

可以求得 $h(0)=0$,$h(1)=1$,$h(2)=-4$,将 $h(1)$,$h(2)$代入 $h(k)$

解出　$A_1=2,A_2=-\dfrac{3}{2}$

则 $h(k)=\left[2\cdot(-1)^k-\dfrac{3}{2}\cdot(-2)^k\right]\varepsilon(k-1)$,于是

$$\begin{aligned}y_{zs}(k)=h(k)*x(k)&=\left[2\cdot(-1)^k-\frac{3}{2}\cdot(-2)^k\right]\varepsilon(k-1)*(-2)^k\varepsilon(k)\\&=[-2\cdot(-1)^k+2\cdot(-2)^k+3\cdot k\cdot(-2)^k]\varepsilon(k-1)\end{aligned}$$

则 $y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=[-(-1)^k+(-2)^k+3k\cdot(-2)^{k-1}]\varepsilon(k)$.

【例 7-2】　试判断以下各系统的因果稳定性

(1)$\delta(k-k_0)$,$k_0\geqslant0$ 或 $k_0<0$　　(2)$2^k\varepsilon(-k)$　　(3)$2^kG_N(k)$　　(4)$e^{x(k)}$

解　(1)$k_0\geqslant0$ 时,系统是因果稳定的;$k_0<0$ 时,系统是非因果稳定的.

因为 $\delta(k-k_0)=\begin{cases}1 & (k=k_0)\\0 & (k\neq k_0)\end{cases}$　所以 $k_0\geqslant0$ 时,系统是因果的;$k_0<0$,系统是非因果的.

又因为 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|\delta(k-k_0)|=1<\infty$,所以系统是稳定的.

(2)非因果稳定系统.

因为表达式中含有 $\varepsilon(-k)$ 是左边序列,所以系统是非因果的.

因为 $2^0=1$,第一项有界;又 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2^{k-1}}{2^k}=\dfrac{1}{2}<1$,后面所有项收敛,所以系统是稳定的.

(3)因果稳定系统.

因为 $k<0$ 时,$2^kG_N(k)=0$,所以系统是因果的.又因为 $\sum\limits_{k=0}^{N-1}|2^k|=2^N-1<\infty$,所以系统是稳定的.

(4)因果稳定系统.

因为系统的输出只取决于 $x(k)$ 的现在值,与以后时刻无关,所以系统是因果的.

如果 $|x(k)|\leqslant M$,$|y(k)|=|e^{x(k)}|\leqslant e^{|x(k)|}\leqslant e^M$,所以系统是稳定的.

【例 7-3】 求用差分方程 $y(k)-\dfrac{5}{6}y(k-1)+\dfrac{1}{6}y(k-2)=x(k)-x(k-2)$ 描述的系统的单位样值响应 $h(k)$.

解　当 $x(k)=\delta(k)$ 时,$y(k)=h(k)$,差分方程变为

$$h(k)-\frac{5}{6}h(k-1)+\frac{1}{6}h(k-2)=\delta(k)-\delta(k-2)$$

为求 $h(k)$,可利用叠加性质,先分别求出 $\delta(k)$ 和 $\delta(k-2)$ 的响应,然后叠加得到 $h(k)$.即

$$h_1(k)-\frac{5}{6}h_1(k-1)+\frac{1}{6}h_1(k-2)=\delta(k)$$

可由上式得到系统初始条件为 $h_1(-1)=0$,$h_1(0)=1$.

设　$h_1(k)=\left[A_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^k+A_2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\right]\varepsilon(k)$

将初始条件代入可得

$$\begin{cases}h_1(-1)=A_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}+A_2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=0\\ h_1(0)=A_1+A_2=1\end{cases}$$

解得　$A_1=3$,　$A_2=-2$

即

$$h_1(k)=\left[3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

同样方法当 $\delta(k-2)$ 单独作用时,令其响应为 $h_2(k)$.

同样可得　$h_2(k)=\left[3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2}-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2}\right]\varepsilon(k-2)$

所以　$h(k)=h_1(k)-h_2(k)$

$$=\left[3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]\varepsilon(k)-\left[3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\right]\varepsilon(k-2)$$

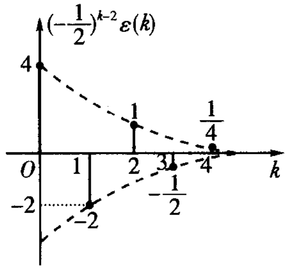
习题全解

7.1　绘出下列离散信号的图形.

(1)$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}\varepsilon(k)$　　(2)$2\delta(k)-\varepsilon(k)$

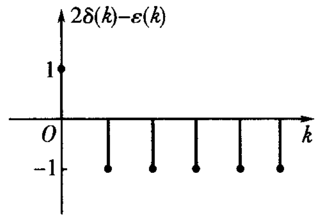
(3)$\varepsilon(k)+\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)\varepsilon(k)$　　(4)$k(2)^{-k}\varepsilon(k)$

解　(1)



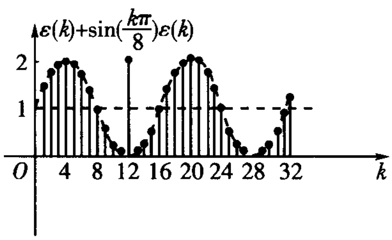
(1)

(2)



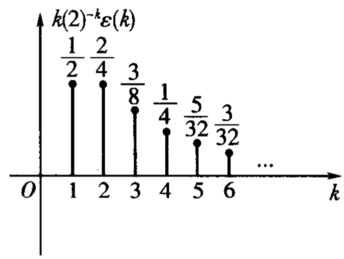
(2)

(3)



(3)

(4)



(4)

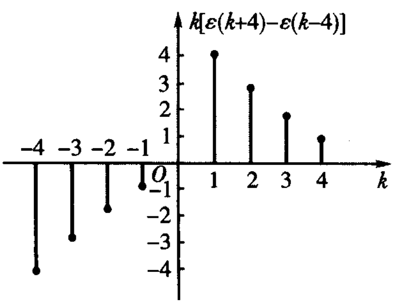
解 7-1 图

7.2　绘出下列离散信号的图形.

(1)$k[\varepsilon(k+4)-\varepsilon(k-4)]$　　(2)$1-\varepsilon(k-4)$

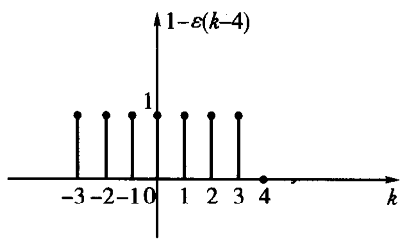
(3)$2^k[\varepsilon(-k)-\varepsilon(3-k)]$　　(4)$(k^2+k+1)[\delta(k+1)-2\delta(k)]$

解　(1)

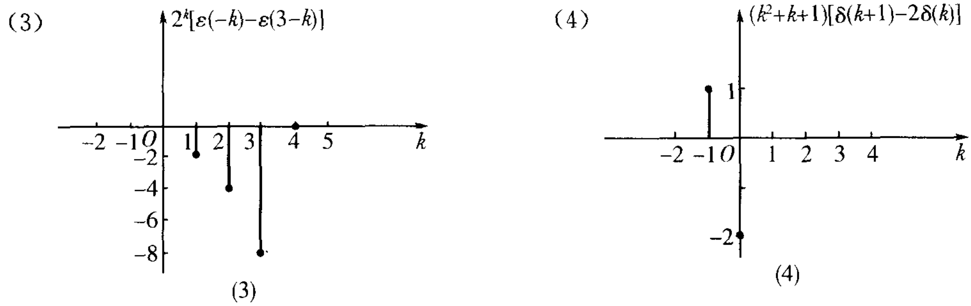


(1)

(2)



(2)



解 7-2 图

7.3 写出图 P7-3 所示序列的函数表达式.

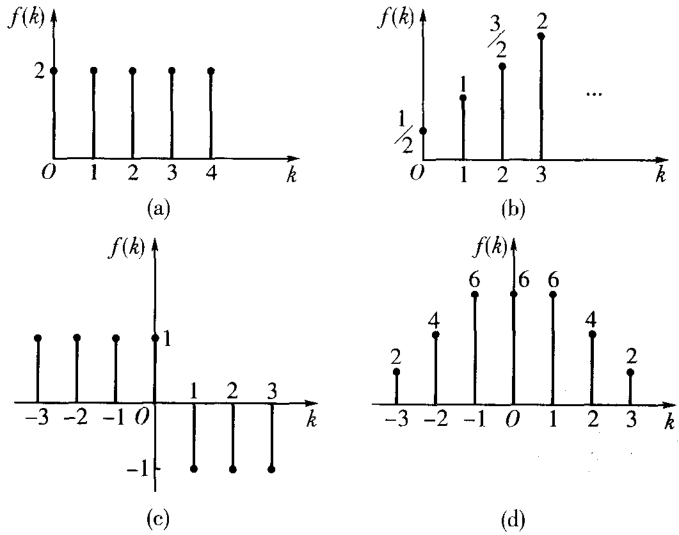


图 P7-3

解 (1)由图 P7-3(a)所示波形知,该序列仅在区间[0,4]上有值为 2,则其表达式为

$$f(k)=2[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-5)]$$

(2)由图 P7-3(b)所示波形知,该序列是一个以$\frac{1}{2}$为首项,以$\frac{1}{2}$为公差的的等差右边序列,则其表达式为

$$f(k)=\frac{1}{2}(k+1)\varepsilon(k)$$

(3)由图 P7-3(c)所示波形知,该序列在区间[$-3,-1$]上值为 1,在区间[1,3]上值为-1,则其表达式为

$$f(k)=[\varepsilon(-k-1)-\varepsilon(-k-4)]-[\varepsilon(k-1)-\varepsilon(k-4)]$$

(4)由图 P7-3(d)所示波形知,该序列在区间[$-3,-1$]上的值满足表达式 $8+2k$,在区间[1,3]上满足表达式 $8-2k$,且 $k=0$ 时值为 6,则其表达式为

$$f(k)=(8-2k)[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)]-2\delta(k)+(8+2k)[\varepsilon(-k-1)-\varepsilon(-k-4)]$$

7.4　用归纳法写出下列右边序列的闭式.

(1)$\{1,-1,1,-1,\cdots\}$

(2)$\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots\}$

(3)$\{-2,-1,2,7,14,23,\cdots\}$

(4)$\{3^2+8,5^2+11,7^2+14,9^2+17,\cdots\}$

解　(1)该右边序列中的值绝对值为1,奇数位符号为负,偶数位符号为正,故其表达式为$(-1)^k\varepsilon(k)$.

(2)该右边序列分子、分母都是单调递增,分别为k、$k+1$,故其表达式为$\frac{k}{k+1}\varepsilon(k)$.

(3)该右边序列表达式可写为$(k^2-2)\varepsilon(k)$.

(4)该右边序列满足$(3+2k)^2+3(3+k)-1$,则其表达式可写为$(4k^2+15k+17)\varepsilon(k)$.

7.5　判断下列信号是否是周期性信号,如果是则其周期为多少?

(1)$\sin(k)$　　(2)$e^{j0.4\pi k}$

(3)$\sin(0.2\pi k)+\cos(0.3\pi k)$　　(4)$\cos(0.512\pi k)$

(5)$\mathrm{sgn}[(-0.23)^k]$　　(6)$\sin(\pi k)\varepsilon(k)$

解　(1)$\omega=1,T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$,为无理数,故该函数非周期信号.

(2)$\omega=0.4\pi,T=\frac{2\pi}{\omega}=5$,为有理数,故该函数为周期信号,最小周期为5.

(3)$\omega_1=0.2\pi,\omega_2=0.3\pi$,则$T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=10,T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}=\frac{20}{3}$,均为有理数,取其最小公倍数为20,则$f(k)=\sin(0.2\pi k)+\cos(0.3\pi k)$为周期信号,其最小周期为20.

(4)$\omega=0.512\pi,T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{125}{32}$,为有理数,故该函数为周期信号,其最小周期为125.

(5)$\mathrm{sgn}[(-0.23)^k]=\mathrm{sgn}[(-0.23)^{k+2n}],n=0,1,2\cdots$,则该函数的最小周期为2.

(6)当$k<0$时,$f(k)=\sin(\pi k)\varepsilon(k)=0$,故$f(k)$为非周期信号.

7.6　一个有限长连续时间信号,时间长度为2分钟,频谱包含有直流至100 Hz分量的连续时间信号.为便于计算机处理,对其取样以构成离散信号,求最小的理想取样点数.

解　$f_m=100\text{Hz}$,由抽样定理可知最小抽样频率为

$$f_{smin}=2f_m=200\text{Hz}$$

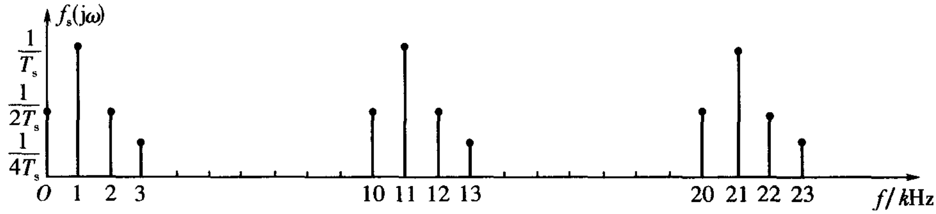
则最小理想抽样点数为

$$n_{min}=t\cdot f_{smin}=2\times60\times200=24\ 000$$

7.7　设一连续时间信号,其频谱包含有直流、1 kHz、2 kHz、3 kHz四个频率分量,幅度分别为0.5、1、0.5、0.25;相位谱为0,试以10 kHz的取样频率对该信号取样,画出取样后所得离散序列在0到25 kHz频率范围内的频谱.

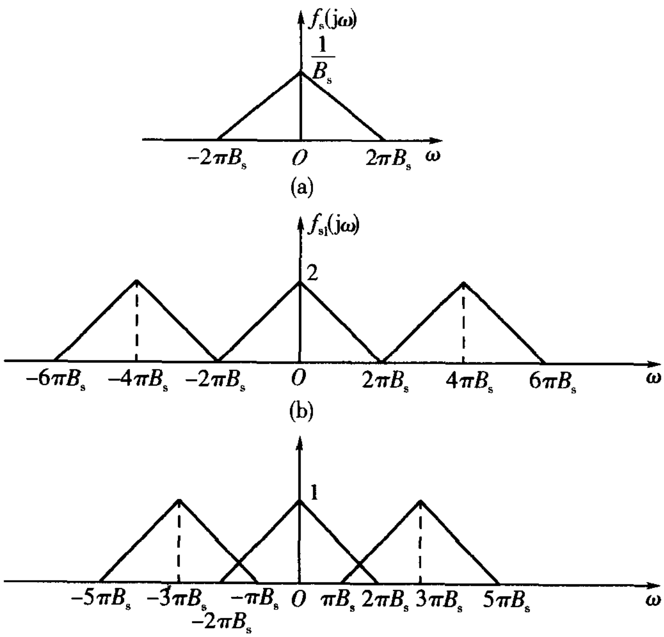
解　对连续信号进行抽样,所得频谱是原连续信号频谱的周期延拓,若为理想抽样,则所求

频谱如解 7-7 图所示,其中 T_s 为抽样周期.



解 7-7 图

7.8　对信号 $f(t)=\mathrm{sinc}^2(\pi B_s t)=\left[\frac{\sin(\pi B_s t)}{\pi B_s t}\right]^2$,以取样时间间隔分别为 $T=\frac{1}{2B_s}$ 及 $T=\frac{1}{B_s}$ 进行理想取样,试绘出取样后所得序列的频谱并作比较.



解 7-8 图

解　由题知

$$f(t)=\mathrm{sinc}^2(\pi B_s t)=\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2\pi B_s t}{2}\right)$$

即

$$\omega_m=2\pi B_s,f_m=B_s$$

由抽样定理,应满足

$$\omega_s\geqslant 2\omega_m=4\pi B_s,\omega_{smin}=4\pi B_s,f_{smin}=2B_s$$

故以抽样时间间隔为 $T=\frac{1}{2B_s}$ 进行理想抽样，$f_s=2B_s=f_{smin}$，满足抽样定理；

而以抽样时间间隔为 $T=\frac{1}{B_s}$ 进行理想抽样，$f_s=B_s<f_{smin}$，不满足抽样定理，频谱会出现混叠.

上述两种情况抽样后频谱如解 7-8 图(b)、(c)所示，而解 7-8(a)图所示为 $f(t)$ 的频谱.

7.9　有人每年初在银行存款一次，银行利息为 β，每年底所得利息亦转存下一年，试用差分方程表示第 k 年初的存款额.

解　第 k 年的本利 $y(k)$ 包括三部分，即

(1)第 $k-1$ 年的本利 $y(k-1)$；

(2)第 $k-1$ 年的利息 $\beta y(k-1)$；

(3)第 k 年的存款 $e(k)$.

则有

$$y(k)=y(k-1)+\beta y(k-1)+e(k)$$

$$e(k)=y(k)-(1+\beta)y(k-1)$$

7.10　图 P7-10 表示一离散信号 $e(kT)$ 经 D/A 转换为一阶梯形模拟信号激励图示的 RC 电路. 已知电路参数为 $C=1$ F，$R_1=R_2=1\ \Omega$，试写出描述 $y(kT)$ 与 $e(kT)$ 间关系的差分方程，这里 $y(kT)$ 为 $y(t)$ 在离散时间 kT 处的值组成的序列.

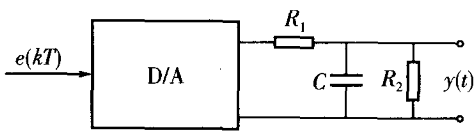


图 P7-10

解　由图 P7-10，知此 RC 系统的转移函数为

$$H(s)=\frac{R_2/\!/C}{R_1+R_2/\!/C}$$

根据 s 等效模型知识，知

$$R_2/\!/C=\frac{R_2\cdot\frac{1}{Cs}}{R_2+\frac{1}{Cs}}$$

故 $H(s)$ 经整理，如下

$$H(s)=\frac{R_2\cdot\frac{1}{Cs}}{R_1\left(R_2+\frac{1}{Cs}\right)+R_2\cdot\frac{1}{Cs}}=\frac{\frac{1}{R_1C}}{s+\frac{1}{\tau_0}}$$

其中 $\tau_0=C\cdot\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$，称为电路的时间常数.

代入题中数值，求得 $\tau_0=\frac{1}{2}$，则

$$H(s)=\frac{1}{s+2}$$

故　$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=\frac{1}{R_1C}\cdot e^{-\frac{t}{\tau_0}}=e^{-2t}$

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t),y_{zi}(t)=C_1e^{-\frac{t}{\tau_0}}$$

由题 $e(kT)$ 是经 D/A 转换器转换成的一个梯形激励，则有

当　$kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$ 间，$e(t)=e(kT)$

由起始条件，当 $t=kT$ 时，有

$$y(kT)=C_1\cdot e^{-\frac{kT}{\tau_0}}$$

即　$C_1=y(kT)e^{\frac{kT}{\tau_0}}$

故　$y_{zi}(t)=y(kT)e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}$

而在 $kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$ 时，$e(t)$ 的零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)&=h(t)*e(t)=\frac{1}{R_1C}e^{-\frac{t}{\tau_0}}*e(t)=\frac{1}{R_1C}e^{-\frac{t}{\tau_0}}*e(kT)\\&=\frac{1}{R_1C}e(kT)\int_{kT}^{t}e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-\tau)}d\tau=\frac{\tau_0}{R_1C}e(kT)[1-e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}]\\&=\frac{R_2}{R_1+R_2}e(kT)[1-e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}]\end{aligned}$$

所以

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=y(kT)e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}+e(kT)\frac{R_2}{R_1+R_2}[1-e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}]$$

$$kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$$

将式中变量代为题中已知数值，并有 $t=(k+1)T$，得所求差分方程为

$$y[(k+1)T]=y(kT)e^{-2T}+\frac{1}{2}(1-e^{2T})e(kT)$$

$$y[(k+1)T]-e^{-2T}y(kT)=\frac{1}{2}(1-e^{2T})e(kT)$$

7.11　连续时间系统中，常用有限时间积分器求取信号的平均值，即

$$y(t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}x(\lambda)d\lambda$$

试证明可以将上述积分方程转换为下列差分方程来近似求解

$$y(k)=\frac{1}{N}[x(k)+x(k-1)+\cdots+x(k-N+1)]=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}x(k-j)$$

证明　令 $\tau=NT$，则

$$y(t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}x(\lambda)d\lambda=\frac{1}{NT}\int_{t-NT}^{t}x(\lambda)d\lambda$$

若 T 足够小，可认为在时间段 T 内，$x(t)$ 区间左端点保持不变，则 $y(t)$ 可近似为

$$y(t)=\frac{1}{NT}\sum_{j=0}^{N-1}x(t-jT)T$$