工科研究生教材·数学系列

最优化计算方法

ZUI YOU HUA JI SUAN FANG FA

蒋金山 何春雄 潘少华 编

华南理工大学出版社

最优化计算方法

工科研究生教材·数学系列

最优化计算方法

蒋金山　何春雄　潘少华　编

华南理工大学出版社
·广州·

内容简介

本书内容分为线性规划、非线性规划和现代最优化算法三部分。线性规划主要介绍线性规划基本理论、单纯形法、对偶理论和应用实例;非线性规划主要介绍非线性规划的基本概念与基本原理、无约束问题最优化方法和约束问题的最优化方法;现代最优化算法主要介绍计算复杂性与启发式算法、模拟退火算法、遗传算法和人工神经网络.

本书可作为工科硕士研究生和工程硕士研究生的教材,亦可供有关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

最优化计算方法/蒋金山,何春雄,潘少华编.—广州:华南理工大学出版社,2007.10
ISBN 978-7-5623-2706-6

Ⅰ.最… Ⅱ.①蒋… ②何… ③潘… Ⅲ.最优化算法-研究生-教材 Ⅳ.O242.23

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第140371号

总 发 行:华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学17号楼,邮编510640)
营销部电话:020-87113487 87110964 87111048(传真)
E-mail:scutc13@scut.edu.cn **http**://www.scutpress.com.cn
责任编辑:张 颖
印 刷 者:广州市穗彩彩印厂
开 本:787mm×1092mm 1/16 **印张**:18.375 **字数**:459千
版 次:2007年10月第1版 2007年10月第1次印刷
定 价:31.00元

总　序

研究生教材建设是研究生教育的基础工程，是提高研究生培养质量的重要环节。自1978年恢复研究生招生以来，我校先后编写了供工科研究生使用的数学教材或教学参考书，其中一些教材出版后，不仅本校使用，许多兄弟院校也选作教材或教学参考书，受到读者好评；另有一些教材则采用讲义形式在校内印发、使用。为适应研究生教育事业迅速发展的需求，我校决定在原有“工科研究生用书”的基础上，通过修订和新编，出版“工科研究生教材·数学系列”。

现代科学技术的发展，特别是计算机技术的高度发展，使得数学科学在人类生产、管理及科学研究中发挥越来越突出的促进作用，也使得人类社会生活的各个领域使用数学技术成为可能。“工科研究生教材·数学系列”作为工科硕士研究生和博士研究生公共课的选用教材，我们希望每本教材既要介绍该学科分支的历史沿革与发展、基本理论和方法，又能反映该学科分支的最新成果。对于后者，主要是从基本思想和实际运用技巧方面进行概括和阐述。这就要求每本教材既要有严谨的解析论证，又要有概括性的分析和介绍，不宜过分追求教材内容的自我完备。

我校研究生教材建设（特别是公共数学课程教材建设）还处在不断完善过程中，限于学术水平和教学经验，本系列教材难免有疏漏和不足之处，恳请读者指正，以便日后修订时加以更正。

华南理工大学研究生院

2005年6月

前　言

最优化问题是人们在工程技术、科学研究和经济管理等诸多领域中经常遇到的问题．最优化计算方法则是解决各种各样最优化问题的科学方法，它基于对实际问题的数学建模和探求解法来实现问题的最优化处理．随着现代科学技术的发展，特别是计算机技术的高速发展，使得应用该方法解决人类生活各个领域中遇到的各种优化问题成为可能，并且应用越来越广泛、深入，同时也极大地促进了该方法的理论研究和实际运用研究的高速发展．掌握优化思想方法并善于对遇到的问题进行优化处理，是现代工程技术人员、科研人员和管理者必须具备的基本素质．

最优化理论和方法所包含的内容很多，大致分为经典方法和现代方法两大方面．经典方法如线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划等，现代方法如随机规划、模糊规划、模拟退火算法、遗传算法、禁忌搜索和人工神经网络等。对于如此庞杂的内容，多年来国内外已陆续出版专著介绍每个分支，也有不少教材或专门介绍经典方法，或专门介绍现代法．本书集经典算法和现代算法于一体，希望读者既能理解和掌握经典算法，又对现代算法有尽可能多的了解和体会．这是一种大胆的甚至是冒险的尝试．首先，我们认为在这知识爆炸的年代，研究生教材不宜刻意追求自我完备，而应是开放式的、与时俱进的．其次，我们认为工科研究生修读公共数学课，目的不外乎培养理解和运用两方面的素养，在理解方面分为两个层次：第一个层次是问题的数学建模、解法的基本思想和一般步骤，第二个层次是严格的数学论证和分析（我们坚持认为这是不可或缺的）．在运用方面，首先培养用数量分析解决实际问题的自觉性和找到合适的数学方法的敏锐性，其次是问题求解借助于计算机和计算软件进行．

基于以上的理解和认识，我们在教材内容的选择和处理上，基本上是从模型的实际背景和求解方法的思想来源及一般步骤入手，进而进行必要的、严格的数学分析论证（对部分超出学生现有知识层次的证明只给出参考文献，而对诸如马尔科夫链这样多次用到的知识则先作简单介绍），再辅以计算实例或指出有关计算实例的参考文献．本书内容分为三篇：第一篇为线性规划，包括线性规划的定义和基本性质、单纯形法、对偶理论、灵敏度分析和应用实例等；第二篇为非线性规划，包括非线性规划基本概念与基本原理、一维搜索无约束问题的最优化方法、有约束问题的最优化方法和二次规划问题；第三篇介绍现代优化方法，包括优化问题及计算复杂性、模拟退火算法、遗

传算法和人工神经网络等，每章都配备了一定数量的练习题，并提供了较为详尽和具体的参考文献．本教材是作者在多年讲授工学硕士生“最优化计算”和工学博士生“智能计算方法”的基础上集体讨论编写而成的．第一篇由潘少华博士执笔，第二篇和第三篇第十三章由蒋金山博士执笔，第三篇第十章、第十一章和第十二章由何春雄博士执笔．由于编者知识和能力所限，谬误与不足之处有待在教学实践中加以更正和补充，也恳请读者不吝赐教．

编　者
2007 年 8 月于华南理工大学
数学科学院

目　录

第一篇　线性规划

第二篇 非线性规划

第三篇　现代最优化算法

第一篇　线性规划

第1章　线性规划的数学模型和基本性质

线性规划是理论和求解方法都比较成熟，且具有广泛应用的一个运筹学分支．本章介绍它的数学模型并讨论其基本性质．

1.1　线性规划问题及其数学模型

1.1.1　问题的提出

在生产管理和经营活动中，经常会遇到这样两类问题：一类是如何合理地使用有限的劳动力、设备、资金等资源，以获得最大的利润；另一类是为了达到一定的目标，应如何组织生产，或合理安排生产工艺流程，或调整产品的成分……以使消耗的资源（人力、设备台时、资金、原材料等）为最少．

例1－1　某制药厂生产甲、乙两种药品，生产这两种药品要消耗某种维生素．生产每吨药品所需要的维生素量、所占用的设备时间，以及所获得的利润见表1－1．已知该厂每周所能得到的维生素量为160 kg，每周设备最多能开15个台班，而且根据市场需求，甲种产品每周产量不应超过4 t．试问该厂应如何安排两种产品的每周产量以使获取的利润最大？

表1－1

	甲	乙	每天可用能力
维生素/kg	30	20	160
设备/台班	5	1	15
利润/万元	5	2	

解　设该厂每周安排生产甲、乙两种药品的产量分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，则每周所能获得的利润总额为 $z=5x_1+2x_2$（万元）．但生产量的大小要受到维生素量、设备的台班和市场最大需求量的限制，即 x_1 和 x_2 要满足下述一组不等式条件

$$
\begin{aligned}
30x_1 + 20x_2 &\leq 160 \\
5x_1 \quad + x_2 &\leq 15 \\
x_1 \qquad\quad &\leq 4
\end{aligned}
$$

另外，x_1 和 x_2 显然只能取非负值，故有

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

于是，问题可以写成下列数学形式

$$\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 2x_2 \\
\text{s. t.} \quad & 30x_1 + 20x_2 \leqslant 160 \\
& 5x_1 + x_2 \leqslant 15 \\
& x_1 \leqslant 4 \\
& x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1-1}$$

其中，$\max z = 5x_1 + 2x_2$ 表示要求函数 $z = 5x_1 + 2x_2$ 达到最大，s. t. 为英文"subject to"（受约束于）的缩写. 因此，要求在上面所列出的全部条件下，求 x_1 和 x_2 的一组值，使函数 $z = 5x_1 + 2x_2$ 达到最大.

例 1－2 某公司经销一种产品，现要将三个生产点 $A_i(i=1,2,3)$ 生产的产品分别运往四个销售点 $B_j(j=1,2,3,4)$. 已知三个生产点的每日产量、各销售点的每日销量，以及每吨产品从各生产点到销售点的运价见表 1－2. 试问该公司应如何调运产品，可在满足各销售点需要量的前提下，使总运费最少？

表 1－2

运价（元/t） 生产点 A_i	销售点 B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	生产量(t)
A_1	4	11	3	10	5
A_2	1	9	2	8	7
A_3	7	4	10	5	8
需求量(t)	3	4	5	8	

解 设从生产点 A_i 到销售点 B_j 的调运数量为 x_{ij}(t)，则总运费为

$$z = 4x_{11} + 11x_{12} + 3x_{13} + 10x_{14} + x_{21} + 9x_{22} + 2x_{23} + 8x_{24} + 7x_{31} + 4x_{32} + 10x_{33} + 5x_{34}$$

我们的目标是在一定条件下使函数 z 达到最小值. 由于从各生产点运出的数量不能超过它的产量，故应有

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leqslant 5 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leqslant 7 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leqslant 8
\end{aligned}$$

同时，还应保证各销售点所需产品都得到满足，因此有

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 3 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 4 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 5 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 8
\end{aligned}$$

此外，调运量 $x_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$ 都应取非负值：

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4)$$

于是,问题可写成下列数学形式:

$$\begin{aligned}
\min z = & 4x_{11} + 11x_{12} + 3x_{13} + 10x_{14} + x_{21} + 9x_{22} \\
& + 2x_{23} + 8x_{24} + 7x_{31} + 4x_{32} + 10x_{33} + 5x_{34} \\
\text{s. t.}\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leqslant 5 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leqslant 7 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leqslant 8 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} = 8 \\
& x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4)
\end{aligned} \tag{1-2}$$

注意到,此问题中三个生产点的生产总量恰好等于四个销售点的需求总量,因此,要保证各个销售点的需求量都得到满足,三个生产点的生产量应全部运走. 故,式(1-2)中的三个不等式也可以改写成等式.

在上述两个例题中,都首先要确定一组具有明确含义的变量,称之为**决策变量**. 问题的目标是选取这些决策变量的值使得一个函数取得最大值或最小值,此函数称之为**目标函数**. 我们又利用决策变量把问题的条件表示成等式或不等式,并称这些等式和不等式为**约束条件**. 如果目标函数是决策变量的线性函数,而且约束条件也都是关于决策变量的线性等式或线性不等式,则相应的数学问题就称为一个**线性规划问题**. 显然,上述两个例子都是线性规划问题.

1.1.2　线性规划问题的数学模型

从实际问题得到的线性规划模型是多种多样的,为了方便讨论,规定下列形式的线性规划为标准型:

$$\begin{aligned}
\min z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s. t.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\
& x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n)
\end{aligned} \tag{1-3}$$

其中 $b_i \geqslant 0 \ (i=1,2,\cdots,m)$. 也就是说,以后谈及的标准型线性规划都是指:**对目标函数一律求最小值;决策变量一律要求为非负变量;约束条件除非负约束条件外一律为等式约束;约束条件的右端项一律非负**. 定义如下矩阵和向量:

$$\boldsymbol{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{A}_1\ \boldsymbol{A}_2 \cdots \boldsymbol{A}_n]$$

$$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}},\quad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\quad b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$$

其中$\boldsymbol{A}_j\in\mathbb{R}^m$是约束条件的系数列向量,$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$为约束条件的系数矩阵,$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$为价值向量,$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$为限定向量,$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$为决策变量,则式(1-3)的标准型线性规划可重新写为向量形式:

$$\begin{aligned}&\min z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\&\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_jx_j=\boldsymbol{b}\\&\qquad\boldsymbol{x}\geqslant 0\end{aligned}\tag{1-4}$$

或矩阵形式:

$$\begin{aligned}&\min z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\&\text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\&\quad x\geqslant 0\end{aligned}\tag{1-5}$$

本书将式(1-3)、式(1-4)和式(1-5)的标准型线性规划统一记为(LP).这三种表达形式在本书中都会用到,请读者熟练掌握.

虽然线性规划模型是多种多样的,但通过下面几种办法都可化为标准型.

(1)若问题的目标是求函数$z'=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$的最大值,即求$\max z'=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$,则令$z=-z'$,新问题为在相同的约束条件下求$\min z=-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.显然,新问题与原问题的最优决策变量是相同的,只是它们的目标函数值相差一个符号而已.

(2)若某个等式约束的右端项$b_i<0$,只需将该等式两端同乘以-1;若某个不等式约束的右端项$b_i<0$,则将该不等式两端同乘以(-1),然后再利用下面介绍的方法将其化为等式约束.

(3)如果约束条件中具有不等式$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i$且$b_i\geqslant 0$,则可引进一个新变量$x_i'$,称为**松弛变量**,并用下面两个约束条件取代这个不等式:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_i'=b_i\quad(x_i'\geqslant 0)$$

(4)如果约束条件中含有不等式$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i$且$b_i\geqslant 0$,则可引进一个新变量$x_i''$,称为**剩余变量**,并用下面两个约束条件代替这个不等式:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-x_i''=b_i\quad(x_i''\geqslant 0)$$

(5)若约束条件中出现$x_j\geqslant h_j(h_j\neq 0)$,则可引进新变量$y_j$,并令$x_j=h_j+y_j$,将它代入问题的目标函数和约束条件中消去$x_j$,于是原来的约束条件$x_j\geqslant h_j$就化为$y_j\geqslant 0$.

(6)如果决策变量x_j的符号不受限制(称这种变量为自由变量),即$x_j>0$,$x_j=0$或$x_j<0$,则为了满足标准型中关于每个变量的非负要求,可引进两个新变量y_j'和y_j'',并以$x_j=y_j'-y_j''$代入问题的目标函数和约束条件中消去x_j,同时在约束条件中添加$y_j'\geqslant 0$和$y_j''\geqslant 0$两个约束条件.

例1-3 把下列线性规划问题化成标准型:

$$\max z=3x_1-4x_2+2x_3-5x_4$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ \ & 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geqslant 2 \\ & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

解　该问题共有五处不符合标准型的要求：目标函数 z 求最大值；x_3 为自由变量；第二、第三个约束条件为右端项大于 0 的不等式；第一个约束条件的右端项小于 0. 为此，通过以下步骤把该模型标准化：

(1) 令 $z' = -z$，把求 $\max z$ 改为求 $\min z'$；

(2) 将第一个约束条件两端同乘以 (-1)；

(3) 用 $(x_5 - x_6)$ 替换自由变量 x_3，其中 $x_5 \geqslant 0, x_6 \geqslant 0$；

(4) 对第二、第三个约束条件分别引进松弛变量 x_7 和剩余变量 x_8.

最后得到标准型为

$$\begin{aligned} \min z' &= -3x_1 + 4x_2 - 2x_5 + 2x_6 + 5x_4 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 \\ \text{s.t.}\ \ & -4x_1 + x_2 - 2x_5 + 2x_6 + x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_5 - 3x_6 - x_4 + x_7 = 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 - x_5 + x_6 + 2x_4 - x_8 = 2 \\ & x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,8 \text{ 且 } j \neq 3) \end{aligned}$$

1.2　线性规划问题的图解法

对于线性规划问题，我们更关心的是如何进行求解. 一个线性规划问题有解，是指能找出一组 $x_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 满足所有约束条件，称这组 x_j 为问题的**可行解**. 通常线性规划问题总是含有多个可行解，称全部可行解的集合为**可行域**，可行域中使目标函数值达到最优的可行解称为**最优解**. 若线性规划问题不存在可行解，则称该线性规划问题**无解**. 对于只有两个决策变量的线性规划问题，可以通过在平面上作图的方法来判别它是否有解，并在存在最优解的条件下，把问题的最优解找出来. 这种方法不仅直观，而且从此方法中还可得到有关线性规划问题的许多重要结论，从而有助于理解线性规划问题求解方法的基本原理.

1.2.1　图解法的步骤

图解法的步骤可概括为：在平面上建立直角坐标系；图示约束条件，找出可行域；图示目标函数和寻找最优解. 下面通过一个例子来具体说明.

例 1-4　试用图解法求解如下线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ & -x_1 + 4x_2 \leqslant 8 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

第 1 步　作一个以变量 x_1, x_2 为坐标轴的直角坐标系（见图 1-1），并适当选取单位坐

标长度.

第 2 步　约束条件,找出可行域. 约束条件 $3x_1+2x_2\leqslant 18$ 可以分解为 $3x_1+2x_2=18$ 和 $3x_1+2x_2<18$,前者在坐标系中是一条直线,记为 L_1;而后者位于这条直线左下方的半平面,由此,$3x_1+2x_2\leqslant 18$ 是位于含直线 L_1 的点及其左下方的半平面,见图 1-1. 同理,设直线 $-x_1+4x_2=8$ 为 L_2,则 $-x_1+4x_2\leqslant 8$ 为 L_2 的右下半平面. 满足非负约束条件 $x_1\geqslant 0$ 和 $x_2\geqslant 0$ 的点分别为坐标轴的右半平面和上半平面. 因此,满足所有约束条件的点应是上述 4 个半平面的交集,即图 1-1 中四边形 $OABC$ 区域(含边界),称之为可行域.

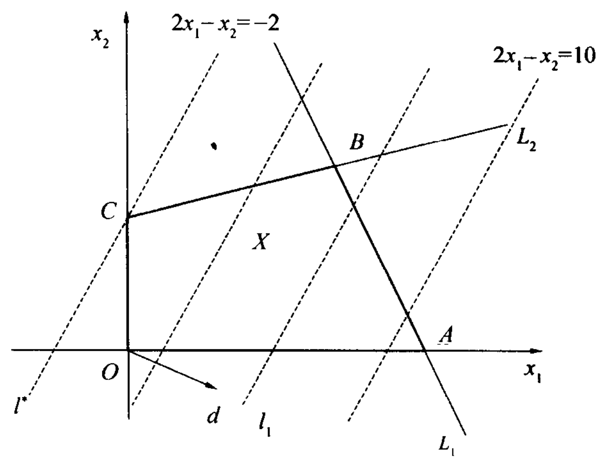

图 1-1

第 3 步　图示目标函数. 由于 z 是一个线性的目标函数值,因此,随着 z 的变化,$z=2x_1-x_2$ 是斜率为 2 的一簇互相平行的直线. 在同一直线 $2x_1-x_2=z_0$ 上的点 (x_1,x_2),它们的目标函数值相等,因此称为等值线.

第 4 步　最优解的确定. 在等值线簇 $z=2x_1-x_2$ 中,z 取得最大且又在可行域内(或说与可行域相切)的直线 l^* 便是我们要寻找的,其与可行域的交点就是最优解 x^*. 具体做法是,首先求出函数 $z=2x_1-x_2$ 的梯度 $\nabla z=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1},\dfrac{\partial z}{\partial x_2}\right)=(2,-1)^{\mathrm{T}}$,记梯度向量 ∇z 的方向为 d;在坐标平面上画出 d,然后将任意一条等值线如 l_1,沿 d 的反方向(即 z 值减少的方向)移动,直到该直线与约束条件包围成的凸多边形相切为止,切点即是最优解.

在本例中,目标函数的等值线与凸多边形的切点是 C 点. 容易计算,C 点的坐标为 $(0,2)$. 因此,本题的最优解 $x^*=(0,2)^{\mathrm{T}}$,最优值为 $z^*=-2$.

注意到,若数学模型中对目标函数 z 是求极大值,等值线显然应按梯度方向 d 移动,从而求得 l^* 及最优解 x^*.

1.2.2　线性规划问题求解的几种可能结果

从图解法作图结果来分析,线性规划问题求解应有以下几种可能结果:

(1) **有唯一最优解**. 如例 1-4.

(2) **有无穷多最优解**. 如果将例 1-4 中的目标函数改为 $\max z=-2x_1+8x_2$,则表示目