现代数学基础丛书 108

组合网络理论

徐俊明 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书系统介绍互连网络拓扑结构设计和分析中的基本组合理论和方法. 内容包括网络与图论的基本概念，网络性能的基本度量；网络设计的基本原则和方法(如线图，Cayley 和笛卡儿方法)；某些著名的网络拓扑结构(如超立方体网络，de Brujin 网络，Kautz 网络，循环网络等)和它们的基本结构性质以及各种推广；容错网络分析中的基本度量参数(如路由转发指数、容错直径、宽直径、限制直径、距离控制数、限制连通度)的基本理论、研究进展和最新成果.

本书可作为高等学校和研究所计算机、网络通信和应用数学专业研究生的阅读，还可供从事理论计算机和互连网络的研究人员、工程技术人员和爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

组合网络理论/徐俊明著. —北京：科学出版社，2007
(现代数学基础丛书；108)

ISBN 978-7-03-018834-2

I. 组… II. 徐… III. 计算机网络-拓扑-研究 IV. TP393
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 049891 号

责任编辑：张 扬 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 5 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 5 月第一次印刷 印张：22
印数：1—3 000 字数：408 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

大规模集成(VLSI)电路技术的出现使人们能建造出非常庞大而复杂的互连网络. 出于多方面的考虑, 下一代超级计算机系统将通过增加处理器的数目, 而不是单靠利用更快的处理器. 将来实现高速快捷的目的建造超级计算机系统最困难的技术问题将是连接这些处理器的互连网络的设计, 选择一个合适和理想的互连网络拓扑结构将变成一个迫切需要解决的问题. 在过去的十几年里, 研究工作者已经在这个方面做了许多工作. 该书旨在把更多读者的注意力吸引到这个重要的研究领域中来, 也为应用数学和理论计算机科学的研究工作者和研究生提供一个新的研究领域.

实践证明, 图论是设计和分析互连网络的最基本且强有力的数学工具, 因为互连网络的拓扑结构就是图. 这个事实已被计算机科学家和工程技术人员所接受并广泛应用. 该书旨在用图论的语言介绍有关互连网络拓扑结构设计和分析中最基本的问题、概念和已获得的基本结果. 所采用的材料虽然源于浩瀚的文献, 但展现在读者面前的材料是经过精心组织和安排的. 我们对材料的处理也是自我包含的, 大部分结果都给出了证明. 每章末都有少量习题, 有些习题是正文中重要结论, 但没有给出证明, 留给读者作为练习, 以加强和巩固读者对材料的理解. 书末附有名词和符号索引, 还有大量的参考文献, 供读者查阅.

作者于2001 年出版过《Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks》(Kluwer Academic Publishers)[325]. 时隔五年, 各专题的研究都有了很大的发展. 国内许多同行也希望我将英文版改写成中文出版, 以满足国内读者的需求. 该书就是在英文版的基础上改写而成, 在内容和形式上都做了很大的充实和调整.

该书分为四部分, 由十六章组成. 第 1 章介绍图与互连网络拓扑结构的关系, 图的基本概念, 术语, 记号和对应的网络背景, 以及网络设计的基本原则; 回顾将在本书中用到的基本图论结果. 从第 2 章到第 5 章是第二部分, 介绍大规模互连网络设计的三个基本方法: 线图方法, Cayley 方法和笛卡儿乘积方法. 详细介绍由这三种方法构造出来的图的基本性质; 还将简单介绍 (d,k) 图问题. 从第 6 章到第 10 章为第三部分, 作为第二部分的三种方法应用, 介绍四类最著名的互连网络拓扑结构: 超立方体, de Brujin 网络, Kautz 网络和双环网络以及它们的基本性质. 在这一部分的最后一章, 还将简单地介绍某些熟知网络拓扑结构, 如: 网状网, 格网, 金字塔网, 立方连通圈, 蝶形网, Ω 网等等. 第四部分是本书的主要部分, 从第 11 章到第 16 章. 每章都将介绍容错网络分析中一个最基本的问题和研究结果, 它们涉及网络的路由选择, 限制容错分析, 并行系统中 Menger 型问题, 容错直径, 宽直径和 (l,w)

控制数. 读者很容易从中找到一些有进一步研究意义的问题.

对熟悉图论基本知识的读者来说, 阅读该书并不困难. 本书为试图从事互连网络结构设计和分析的读者, 计算机和应用数学专业的学生提供了一本入门教材, 对理论计算机科学工作者, 工程技术人员, 应用数学工作者和对互连网络有兴趣的其他读者也有一定的参考价值.

该书是在作者为中国科学技术大学图论与计算机科学专业研究生开设的课程《组合网络》讲义的基础上修改而成的. 作者感谢中国科学技术大学研究生院和数学系一贯的支持和鼓励. 作者感谢国家自然科学基金多次资助研究项目“组合网络理论”，也感谢科学出版基金和科学出版社对本书出版的资助和支持。

趁此机会, 我衷心感谢李乔教授的长期指导和帮助; 堵丁柱教授的鼓励并推荐原英文版的出版; 黄光明教授的宝贵建议; 许德标教授在他 1992 年访问中国科学技术大学期间引导作者进入这个研究领域. 感谢国内外许多同行的鼓励和帮助, 其姓名不一一列出, 但作者铭记在心.

我感谢书末参考文献中列出的所有作者, 正是他们的出色研究成果, 才形成这本书的内容. 感谢中国科学技术大学所有选修“组合网络”课程和参与组合网络研究课题的本科生、研究生, 正是他们的学习和研究热情, 才使我对这一领域的研究充满信心. 特别感谢博士研究生黄佳、徐敏、吕敏、马美杰、朱强、田方、杨超等在本书编写过程中给予的许多具体帮助; 特别是黄佳同学用 Latex 软件画出了本书的全部图.

最后, 感谢我的妻子邱景霞的支持和理解. 没有这些, 该书是不可能完成的.

徐俊明

(xujm@ustc.edu.cn)

2006 年 9 月于中国科大

目　　录

第一部分　互连网络和图的基本概念

第二部分　互连网络拓扑结构设计的基本方法

第三部分 著名的互连网络拓扑结构

第四部分 互连网络拓扑结构分析

第一部分

互连网络和图的基本概念

第 1 章　互连网络和图的基本概念

用图来表示互连网络拓扑结构这一事实已被计算机科学工作者和工程技术人员广泛接受和运用. 而且, 在实践上已被证明, 图论是设计和分析互连网络拓扑结构的一个非常有用的数学工具 (可参见文献 [204]).

在这一章, 我们将简单地回顾一下本书将用到的图论概念和它们相应的网络背景. 虽然任何一本标准的图论教科书中都包含图论概念, 但这些概念因不同的作者会有不同的描述. 为了避免概念和记号的混淆, 有必要将这些概念和记号重新叙述一下. 某些基本的图论结果只作叙述, 不再证明. 读者可参见任何一本标准的图论教材. 例如, 文献 [40] 或者文献 [318].

§1.1　图和互连网络

本书所说的图 (graph) G 是有序的二元组 $(V(G), E(G))$, 其中 $V(G)$ 是 G 的**顶点集** (vertex-set), $V(G)$ 中元素称为 G 的**顶点**或者**点** (vertices); $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ 称为 G 的**边集** (edge-set), $E(G)$ 中元素称为 G 的**边** (edges). 边中的一对顶点称为该边的**端点** (end-vertices). 一条边的两端点也可能是相同的, 这样的边称为**环** (loop). $v(G) = |V(G)|$ 是图 G 中的顶点数目, 也称为 G 的**阶** (order). $\varepsilon(G) = |E(G)|$ 是 G 的**边数**. 若 $v(G) = 1$, 则称 G 是**平凡图** (trivial graph), 其余的图称为**非平凡图** (non-trivial graph). 若 $\varepsilon(G) = 0$, 则称 G 是**空图** (empty graph). 若 $v(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 都是有限的, 则称 G 为**有限图** (finite graph).

若 $V(G) \times V(G)$ 是有序顶点对集, 则称图 G 为**有向图** (digraph). 有向图的边 $e = (x, y)$ 称为**有向边** (directed edge), 分别称为顶点 x 和 y 为 e 的**起点** (head) 和**终点** (tail); 也称 e 为顶点 x 的**出边** (out-going edge), 或者顶点 y 的**入边** (incoming edge). 若 $V(G) \times V(G)$ 是无序顶点对集, 则称图 G 为**无向图** (undirected graph). 为方便起见, 通常用 xy 或者 yx 表示无序顶点对 $\{x, y\}$. 无向图的边有时叫**无向边** (undirected edges).

如果将无向图的边看成是两条方向相反的两条有向边 (这样的两条有向边称为**对称边** (symmetric edges)), 那么, 无向图就可以看成特殊的有向图, 即**对称有向图** (symmetric digraph). 因此, 研究有向图的结构比无向图更具有一般性. 有向图被称为是**反对称的** (asymmetric), 如果它不含对称边. 两点是**相邻的** (adjacent), 如果它们之间有边相连; 两边称为**相邻的**, 如果它们有一个公共顶点.

在本书中, 如果没有特别声明, 字母 G 总表示非空非平凡有限图.

两个图 G 和 H 称为是**同构的** (isomorphic), 记为 $G \cong H$, 如果存在双射 θ :

$V(G) \to V(H)$ 满足相邻性条件:

$$(x,y) \in E(G) \Leftrightarrow (\theta(x),\theta(y)) \in E(H).$$

这样的双射 θ 称为图 G 与 H 之间的同构 (isomorphism). 在同构的意义下, n 阶完全图 (complete graph) 和完全 2 部分图 (complete bipartite graph) 是唯一的, 分别用 K_n 和 $K_{m,n}$ 表示. 习惯上, 称 $K_{1,n}$ 为星 (star).

按照 Hayes[147] 的定义, 一个系统 (system) 可以定义为对象或者元件族, 它们被相互连接形成一个具有确定功能或者目的的整体. 系统所能实现的功能是由系统中元件所具有的功能和元件的互连方式来决定的.

计算机系统, 多处理系统, 计算机网络, 电路系统, 通讯系统, 流水生产线, 管道系统, 交通运输系统等等都是一些最常见的例子.

对于计算机系统, 它的元件可以包括处理器, 控制单元, 储存单元和输入输出 (I/O) 设备 (或许包括开关), 它的功能是将输入的信息 (如, 程序和它的数据) 转换成输出信息 (如, 由数据通过程序计算的结果).

具有多个相互独立的处理器系统称为多处理系统 (multiple processor system, MPS). 因此, 一个多处理系统可以被认为是包含两个或者两个以上处理器集成的计算机. 定语"集成"意味着在执行程序过程中处理器之间的相互合作. 由成千上万个处理器组成的多处理系统亦称为超级处理系统, 它具有运行并行算法的能力以解决超大规模的实际问题.

按照 Saad 和 Schultz[273] 的定义, 本质上存在两大类多处理系统. 第一类是它有 n 个相同的处理器和 n 个存储器, 通过一个大型的开关网络将它们互连起来. 连接模式的变化是多种多样的, 但引起变化的本质特征是开关网络. 这种类型的结构的主要优点是使得数据的存取对用户是透明的, 用户可以认为数据被存储在一个大存储器中, 而且任何处理器都可以容易地存取. 然而, 这种分享存储型结构不利于充分利用问题中某些固有的性质. 例如, 当利用迭代法求解问题时, 需要利用数据的相邻性, 数据的传递只需局部通信. 而且, 在这种结构中, 开关网络会随着处理器数目的增加而变得异常复杂.

第二类多处理系统是它的每个处理器都有自己的局部存储器, 按照某种方便的模式将这些处理器相互连接起来. 在这种类型的机器中, 不需分享存储, 也不必整体同步. 而且, 相互之间的通信是由数据传递来实现的, 计算是由数据来驱动的. 这种结构常称为整体结构, 它的主要优点是使设计简单化. 处理器是一样的, 或者只有微小的差别, 所以它可以用相当低的费用制造出来.

多处理系统两种不同的网络结构如图 1.1 所示.

系统的基本特征是它的元件之间要通过物理连线按照某个模式相互连接在一起以传输信息. 毫无疑问, 系统功能的实现在很大程度上依赖于元件之间的连接模式.

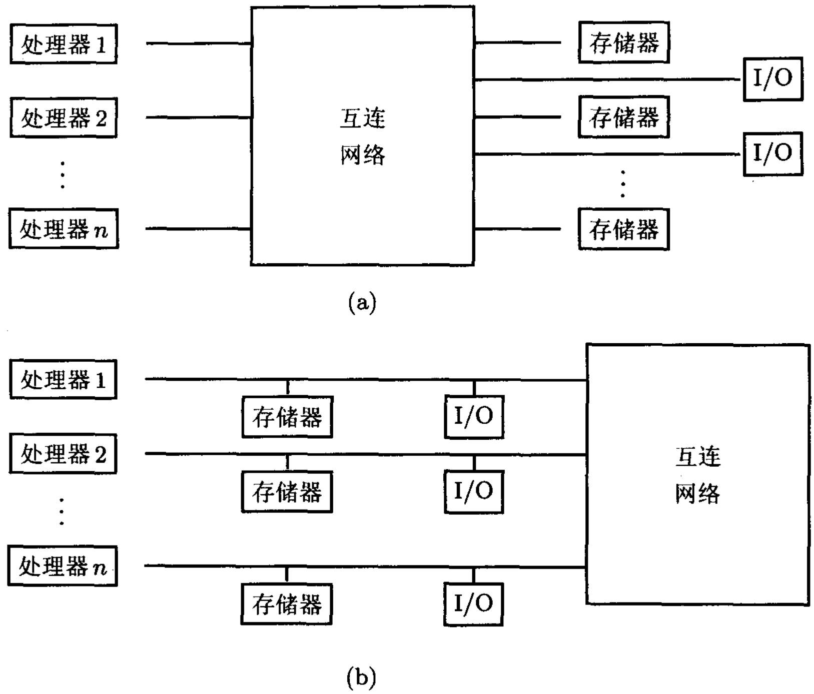

图 1.1 两种类型的多处理系统

系统中元件之间的连接模式称为该系统的互连网络 (interconnection network), 或者简称为网络 (network). 拓扑上讲, 一个系统的互连网络本质上刻画了该系统的结构特征. 换句话说, 系统的互连网络逻辑上指定了该系统中所有元件之间的连接方式.

显然, 互连网络可以用图来表示. 图的顶点表示系统中的元件, 图的边表示元件之间的物理连线, 其中有向边表示单向通信连线, 无向边表示双向通信连线, 而关联函数指定了元件之间的连接方式. 这样的图称为*互连网络拓扑结构* (topological structure), 或者简称*网络拓扑* (network topology). 例如, 以 K_n 为拓扑结构的互连网络称为*全连通网络* (fully connected network). 2 部分图常常用来表示第一类 MPS 结构中的纵横开关 (cross-bar switches) 的拓扑结构. 例如, 图 1.2 中所示的图是 3×3 纵横开关和它的拓扑结构 $K_{3,3}$.

反之, 图也可以看成是某个互连网络的拓扑结构. 从拓扑上讲, 图和互连网络是一回事. 因此, 在以后的叙述中, 我们将混淆“图”和“互连网络”. 将网络、元件和连线说成是图、顶点和边, 反之亦然. 图是有向的还是无向的, 根据通信连线是

单向的还是双向的决定.

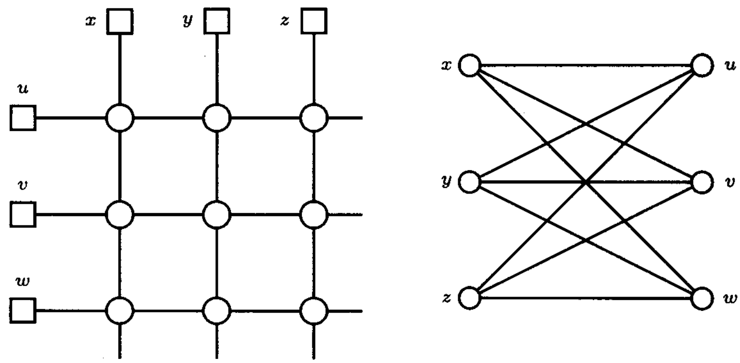

图 1.2 3×3 纵横开关和它的拓扑结构

网络拓扑通常能划分成两个范畴: 动态的和静态的. 在动态系统中, 比如, 上面提到的第一类多处理系统, 网络结构随开关元件的类型而变化. 在静态系统中, 比如, 上面提到的第二类多处理系统, 处理器之间的连接是被动的, 系统的重构是不可能的, 因此网络结构是固定的. 在本书中, 我们的主要兴趣是静态的网络拓扑结构.

§1.2 图的基本概念和记号

这一节回顾将在本书用到的某些基本图论术语, 记号和结论, 包括子图, 顶点度, 路, 圈, 连通图, Euler 回, Hamilton 圈, 邻接矩阵, 匹配, 独立数和控制数等等.

子图是基本的图论概念. 首先回顾由图的运算得到的各种各样的子图.

图 H 称为 G 的**子图** (subgraph), 记为 $H\subseteq G$, 如果 $V(H)\subseteq V(G)$ 且 $E(H)\subseteq E(G)$. G 的子图 H 称为**支撑子图** (spanning subgraph), 如果 $V(H)=V(G)$.

设 S 是 $V(G)$ 的非空子集. G 中由 S **导出子图** (induced subgraph) 记为 $G[S]$, 它的顶点集为 S, 边集为 G 中其两端点都在 S 中的所有边. 记号 $G-S$ 表示导出子图 $G[V\setminus S]$.

设 B 是 $E(G)$ 中的非空子集. G 中由 B **导出的子图** (edge-induced subgraph), 记为 $G[B]$, 它的顶点集为 B 中边的端点集, 它的边集为 B.

$G-B$ 表示 G 的支撑子图 $G[E\setminus B]$. 同样地, $G+F$ 表示在 G 中添加边集 F 后得到的图.

子图被用来表示子网络. 如果 G 是互连网络的拓扑结构, 那么, $G+F$ 表示为

了改进网络的性能而添加连线集 F 而得到的网络; $G-S$ 和 $G-B$ 分别表示网络包含一个故障点集 S 和故障连线集 B.

本质上讲, 互连网络应该包含某些给定类型的子网络. 这是因为计算系统的功能是执行某些算法.

按照 Hayes[146] 的说法, 算法也可以用图 G 来表示. G 的顶点表示执行该算法所要求的设备, G 的边表示这些设备之间的连线. 这样的图 G 叫做该算法的**通信模式** (communication pattern). 因此, 算法能在计算机系统 G 中执行当且仅当该算法的通信模式同构于 G 的子图.

设 G_1 和 G_2 是 G 的两个子图. G_1 和 G_2 是**不交的** (disjoint), 如果它们没有公共的顶点; G_1 和 G_2 是**边不交的** (edge-disjoint), 如果它们没有公共的边. G_1 和 G_2 的**并** (union), 记为 $G_1 \cup G_2$, 是 G 的子图, 它的顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$, 且边集为 $E(G_1) \cup E(G_2)$. 如果 G_1 和 G_2 是不交的, 有时记 $G_1 \cup G_2$ 为 $G_1 + G_2$. 如果 $V(G_1) \cap V(G_2)$ 是非空, 同样地可以定义 G_1 和 G_2 的**交** (intersection), 记为 $G_1 \cap G_2$.

两个图 G_1 和 G_2 的**联** (join), 记为 $G_1 \vee G_2$, 它是由在 $G_1 + G_2$ 中添加连接 G_1 中每个顶点到 G_2 中每个顶点的边而得到.

边的细分 (subdivision) 是指在该边中添加一个新顶点而成为两条边. 由图 G 通过一系列边的细分而得到的图称为 G 的细分图.

设 G 是无向图, $x \in V(G)$. $E_G(x)$ 表示 G 中与 x 关联的边集. $d_G(x) = |E_G(x)|$ 称为 x 的顶点度, 简称为**度** (degree), 度为 d 的顶点称为 **d 度点** (d-degree vertex), 0 度点称为**孤立点** (isolated vertex). G 称为 **d 正则的** (d-regular), 如果 G 中每个顶点都是 d 度点.

$$\Delta(G) = \max\{d_G(x):\ x \in V(G)\} \quad 和$$

$$\delta(G) = \min\{d_G(x):\ x \in V(G)\}$$

分别称为 G 的**最大度** (maximum degree) 和**最小度** (minimum degree). $xy \in E(G)$,

$$\xi_G(xy) = d_G(x) + d_G(y) - 2$$

称为边 xy 的度 (degree of an edge),

$$\xi(G) = \min\{\xi_G(xy);\ xy \in E(G)\}$$

称为 G 的**最小边度** (minimum edge-degree). 显然,

$$\xi(G) \leqslant \Delta(G) + \delta(G) - 2.$$

G 称为是**边正则的** (edge-regular), 如果 G 中每条边 e 都有 $\xi(e) = \xi(G)$. 显然, 正则图一定是边正则的, 反之不成立. 如, $K_{m,n}$, $m \neq n$ 是边正则的, 但不是正则的.

有向图也有类似的术语和记号. 设 G 是有向图, $x \in V(G)$. $E_G^+(x)$ 表示 G 中以 x 为起点的边集, $d_G^+(x) = |E_G^+(x)|$ 称为 x 的出度 (out-degree). 同样地, $E_G^-(x)$ 表示 G 以 x 为终点的边集, $d_G^-(x) = |E_G^-(x)|$ 称为 x 的入度 (in-degree). 顶点 x 称为平衡的 (balanced edge), 如果 $d_G^+(x) = d_G^-(x)$; G 称为平衡的 (balanced digraph), 如果它的每个顶点都是平衡点.

$$\Delta^+(G) = \max\{d_G^+(x):\ x \in V(G)\} \quad 和$$

$$\Delta^-(G) = \max\{d_G^-(x):\ x \in V(G)\}$$

分别称为 G 的最大出度 (maximum out-degree) 和最大入度 (maximum in-degree).

$$\delta^+(G) = \min\{d_G^+(x):\ x \in V(G)\} \quad 和$$

$$\delta^-(G) = \min\{d_G^-(x):\ x \in V(G)\}$$

分别称为 G 的最小出度 (minimum out-degree) 和最小入度 (minimum in-degree).

$$\Delta(G) = \max\{\Delta^+(G),\ \Delta^-(G)\} \quad 和$$

$$\delta(G) = \min\{\delta^+(G),\ \delta^-(G)\}$$

称为 G 的最大度 (maximum degree) 和最小度 (minimum degree). 有向图 G 是 d 正则的 (d-regular), 如果 $\Delta(G) = \delta(G) = d$.

当图 G 表示互连网络时, 顶点 x 的入度 $d_G^-(x)$ 和出度 $d_G^+(x)$ 分别表示该网络中元件 x 的输入和输出接口数; 它是该元件中 I/O 设备的最大数.

图的顶点度, 阶数和边数之间有下列关系, 该定理的证明参见 [318] 中定理 1.1 及其推论.

定理 1.2.1 设 G 是任意的图, $V = V(G)$.

(a) 如果 G 是有向图, 那么

$$\varepsilon(G) = \sum_{x \in V} d_G^+(x) = \sum_{x \in V} d_G^-(x).$$

(b) 如果 G 是无向图, 那么

$$2\,\varepsilon(G) = \sum_{x \in V} d_G(x),$$

并且奇度点的数目是偶数. ∎

设 S 和 T 是有向图 G 的不交非空顶点子集. $E_G(S,T)$ 表示 G 中其起点在 S 而终点在 T 中的边集. 如果 $T = \overline{S} = V(G) \setminus S$, 那么记 $E_G^+(S)$ 替代 $E_G(S,\overline{S})$, 并记 $d_G^+(S) = |E_G^+(S)|$. $N_G^+(S)$ 表示 $E_G^+(S)$ 中边的终点集, 称为 S 的外邻点集 (out-neighbors). 同样地, 不难理解记号 $E_G^-(S)$, $d_G^-(S)$ 和 $N_G^-(S)$ 以及无向图 G 的 $E_G(S)$, $d_G(S)$ 和 $N_G(S)$ 的含义, 不再一一赘述.