

油水井套管外挤力计算 及其力学基础

李志明 殷有泉 著

石油工业出版社

油水井套管外挤力计算 及其力学基础

李志明 殷有泉 著

石油工业出版社

内 容 提 要

在套管设计中,套管外挤力的计算在力学的计算模式和方法上,一直是国际石油界的一个困难课题。本书介绍了在原场地应力条件下以及各种复杂环境下套管外挤力的计算问题,用数学解析方法,给出了套管外挤力的力学模式和计算方法,得到套管外挤力的计算公式,还适当地介绍了相应的力学基础知识。

本书可供石油工程专业的高级技术人员及石油院校相关专业师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

油水井套管外挤力计算及其力学基础/李志明,殷有泉著
北京:石油工业出版社,2006.12

ISBN 7-5021-5791-3

I. 油…

II. ①李… ②殷…

III. 套管(钻孔)—挤压—研究

IV. TE925

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 129769 号

出版发行:石油工业出版社

(北京安定门外安华里 2 区 1 号 100011)

网 址:www.petropub.cn

发行部:(010)64210392

经 销:全国新华书店

排 版:北京乘设伟业科技排版中心

印 刷:北京晨旭印刷厂

2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 开本:1/16 印张:10

字数:254 千字 印数:1—1000 册

书号:ISBN 7-5021-5791-3/TE·4389

定价:42.00 元

(如出现印装质量问题,我社发行部负责调换)

版权所有,翻印必究

前 言

在石油工业中,存在着严重的套管损坏问题。据不完全统计,国内稀油井的套管损坏率在5%左右,稠油热采井套管损坏率在10%以上。油水井的套管损坏,造成了油水井的停产(注)、大修和废弃,影响了油田的产量,影响了油田的层系开发,造成了巨大经济损失。

引起套管的挤扁、缩径、错断、损坏的原因是复杂的。多年来,国内外学者的研究表明,除套管的腐蚀损坏外,套管损坏的根本原因是套管所受的外挤力超过了套管的抗外挤强度。

套管抗外挤能力是套管设计中一项非常重要内容。就世界范围看,当今已成为规范或标准的只有两种计算方法:一是美国石油学会标准(API),另一种是前苏联国家标准(ГОСТ),目前我国采用的是API标准。

无论是API标准,还是ГОСТ标准,他们都是以固井前井眼的静液柱压力作为作用在套管上的惟一外挤力,这与假设套管是受均布静水压力相一致的,其力学背景是建立在地层压力(孔隙压力)和稳定性计算上。

套管外挤力的计算是套管设计中另一项非常重要内容。套管在固井之后,套管、水泥环与地层固结成一体(系统);系统受到了原场地应力、空隙压力变化、温度变化及含泥岩地层遇水膨胀等因素的作用;在系统中,水泥环对套管的作用就是套管的外挤力;当这个外挤力大于套管的抗外挤强度时,套管就会发生破坏。

长期以来,套管在地下所受的外挤力,在力学的计算模式和方法上,一直是国际石油界的一个困难课题。以往的计算方法多用有限元分析等数值模拟。

本书介绍了在原场地应力条件下以及各种复杂环境下套管外挤力的计算问题,用数学解析方法,从理论上给出了套管外挤力的力学模式和计算方法,得到套管外挤力的计算公式。第一章讨论了地应力引起的套管外挤力;第二章讨论了地层的流变性质,随时间变化的套管外挤力;第三章讨论了水泥环对套管外挤力的影响;第四章讨论了热采井和注水井的套管外挤力;第五章讨论了非均布载荷下套管的强度破坏和失稳破坏问题,另外还介绍一些在非均布载荷下如何使用API标准的问题,但其内容是初步的,尚需今后深入地开展这方面的工作。

本书没有涉及套管载荷计算的全部内容,仅讨论我们认为重要的,而且用理论方法可以得到计算公式的那一部分内容。我们使用的力学理论仅是线性弹性力学和粘弹性力学,以及考虑初应变或初应力的弹性理论。我们觉得,对于研究套管外挤压力而言,它们已经足够了。

在套管损坏问题的研究中,国内外的石油工程界、力学界及地学界,进行了很多探索。这些研究表明,目前在套管设计的外挤力计算中,是以固井前井眼的静液柱压力作为作用在套管上的惟一外挤力。这与套管在地下实际所受的外挤力是不符的。

理论是工程技术的基础和依据。本书从理论上给出的套管外挤力的力学模式和计算方

法,给出的套管外挤力的计算公式,已经开始了改进和完善套管设计方法的某些重要步骤,以及探索新的套管设计标准之路。我们期待着,通过国内同行的不懈努力,改进和完善套管设计方法和探索新的套管设计标准将不是遥远的事情。而且,套管损坏问题的缓解和根治也将从套管设计开始,走出一条科学高效的新路子。这是本书出版的由衷愿望。

在开展套管外挤力计算研究过程中,得到了辽河油田的支持;易发新、刘占广、王计平、陈士义等给予了帮助;北京大学博士研究生陈朝伟和李平恩对本书的撰写提供了帮助,在此表示谢意。

由于作者水平所限,本书难免存在缺点和错误,敬请读者不吝指正。

李志明 殷有泉

2006年6月

作者简介

李志明,1946年生,1969年毕业于东北石油学院采油专业,石油工业有突出贡献专家,中国石油天然气总公司高级技术专家,教授级高级工程师。主要著作有《地应力与油气勘探开发》等。

殷有泉,1937年生,1962年毕业于北京大学数学力学系,北京大学力学与工程科学系教授,博士生导师。主要著作有《材料力学》、《固体力学非线性有限元引论》和《有限单元法及其在地学中的应用》等。

目 录

第一章 地应力引起的套管外挤力	(1)
第一节 油田地应力.....	(1)
第二节 平面应变问题的基本方程和拉梅问题的解.....	(2)
第三节 均匀原场地应力下的套管外挤力.....	(5)
第四节 非均匀原场地应力下的套管外挤力.....	(8)
第五节 地层刚度和套管刚度及它们对套管外挤力分布的影响	(20)
第六节 套管外挤力模拟试验中的无量纲相似参数	(27)
第七节 小结	(29)
第二章 地层的流变性质,随时间变化的套管外挤力	(31)
第一节 地层的流变性质,开尔文模型.....	(31)
第二节 拉普拉斯变换	(38)
第三节 均匀原场应力下随时间变化的套管压力	(40)
第四节 流变力学的对应定理	(45)
第五节 非均匀原场应力下随时间变化的套管外挤力	(49)
第六节 从完井到压力稳定所需的时间和地层流变参数的确定	(60)
第七节 小结	(63)
第三章 水泥环对套管外挤力的影响	(65)
第一节 均匀原场地应力情况水泥环对套管外挤力的影响	(65)
第二节 受余弦和正弦形式分布载荷作用厚壁筒的基本解	(73)
第三节 非均匀原场地应力情况水泥环对套管外挤力的影响	(77)
第四节 固井质量对套管外挤力的影响	(88)
第五节 小结	(95)
第四章 热采井和注水井套管的附加压力	(97)
第一节 热弹性轴对称平面问题的基本解	(97)
第二节 热采井套管的附加压力.....	(100)
第三节 高压注水引起的套管附加压力.....	(108)
第四节 泥岩类地层吸水膨胀引起的套管附加压力.....	(113)
第五节 小结.....	(116)
第五章 非均布载荷下套管的强度破坏和失稳破坏	(118)
第一节 API 标准计算公式的力学基础.....	(118)

第二节 非均布载荷下套管的强度破坏.....	(128)
第三节 非均布载荷下套管的失稳破坏.....	(131)
第四节 初始缺陷对套管抗挤强度的影响.....	(134)
第五节 小结.....	(137)
附录一 地层的广义力、广义位移和刚度	(138)
附录二 计算松弛时间及其最值的程序清单.....	(141)
附录三 水泥环缺损和厚度不均对套管强度的影响.....	(145)
附录四 地层滑动引起套管破损.....	(146)
符号说明.....	(150)
参考文献.....	(153)

第一章 地应力引起的套管外挤力

第一节 油田地应力

存在于地壳中的应力称为地应力,它是由于岩石变形而引起的介质内部单位面积上的作用力。地应力的大小随空间位置不同而变化,因此需要研究地应力场。存在于当前地壳内的应力场,叫做现代应力场。地球具有各种动力学过程,如板块运动、地幔对流、地质构造运动、重力和温度作用,而地应力正是以前漫长的地质时期内各种动力学作用的综合结果。根据地应力实测资料分析,某个区域的地应力主要有两部分组成:覆盖岩石重力引起的地应力和地质构造运动所对应的构造应力(王仁,1985;安欧,1992)。

设 z 轴垂直于地表向下,坐标原点取在地表,由覆盖岩石的重力引起的垂直应力分量 σ_z 一般等于单位面积上上覆岩石的重力(以拉应力为正)

$$\sigma_z = -\gamma z \quad (1.1.1)$$

其中 γ 为岩石容重, z 为埋深,负号表示为压应力。其水平分量按照弹性力学理论应为

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z \quad (1.1.2)$$

式中 ν 为岩石的泊松比,它取值在0.15~0.30之间。然而,由于地球介质在应力长时间作用下会产生流变,使水平与垂直应力分量之间的差异逐渐消失,所以一般认为重力引起的是一个各向均等的静岩应力状态,即

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\gamma z \quad (1.1.3)$$

在构造地质学中将这种状态称为标准状态。而在工程界则取地应力垂直分量和水平分量公式(1.1.1)和式(1.1.2)的应力状态为标准状态。

构造应力是全应力与标准状态应力的差异部分。它除了包括由邻近地块或底部传来的现代构造应力外,还可能包括过去构造运动残留下来而尚未完全松弛掉的残留应力,以及附近人为工程引起的应力变化。

寻求地应力的方法主要有三类。第一类是现场应力测量(刘建中,张金珠,张雪,1993),其中有应力解除法、应力恢复法、水压致裂法等。地应力测量虽然在精度上还不令人满意,但它是了解地应力的最直接的手段,具有不可替代的位置。第二类方法是利用震源机制解求应力方向。第三类方法是反演方法。根据从地质学、大地测量学、地震学得到的地壳运动特征和本地区的岩性,假设一组作用在此地区的外力,就可进行应力场和变形场的计算。将计算结果与实测数据比较,若符合不好就在合理范围内调整参数重新计算。由此,通过反演可以得到一个

区域的应力场或储层应力场(殷有泉,陈虎,蒋阒等,1999)。

自 20 世纪 70 年代以来,根据全球现场应力测量的结果,对于地壳上部(最深达 2500m)的应力有如下认识:(1)地壳中主应力为压应力;一个主应力基本上是垂直的,另外两个主应力基本上是水平的。(2)在地壳深度 25~2700m 范围内垂直应力随深度呈线性增长,其增长率大致相当于岩石的平均容重。(3)水平应力比较复杂。水平应力的两个主应力通常是不相等的。一般水平小主应力其数值与大主应力之比(称为应力比,记为 ξ)不小于 0.33,即有

$$\xi > 0.3 \quad (1.1.4)$$

简单的理论分析也支持上式。将构造运动看作平面应力状态,东西向受构造应力 σ 作用,则南北向约束力为 $\nu\sigma$,再叠加上标准状态应力,取泊松比 $\nu=0.3$,就得到式(1.1.4)。在结晶基底岩石和许多折皱带中,两个主应力的平均值超过覆盖压力;在沉积盖层区和节理岩体中,平均应力小于覆盖压力。根据国内和国外的实测资料统计,水平平均应力与覆盖压力之比为 0.5~5.5,大部分地区在 0.8~1.2 之间,最大者有的可达 30。对照式(1.1.2),这表明存在显著的构造应力。(4)在一个相当大的区域内最大主应力方向是相对稳定的。在相对平坦的地区和离地表较深处的地应力测量结果是可以代表这个地区的应力特点的。(5)局部区域的地质构造特点以及大规模岩体工程开挖和油田的采油注水、压裂注砂等生产活动会对该区域的应力场有很大影响。

在油气勘探开发中进行地应力研究是国内外石油界的一个重大的理论和实际问题,国内在此领域内取得了重大进展(李志明,张金珠,1997)。本章主要研究地应力引起的注采井的套管外挤力问题。

第二节 平面应变问题的基本方程和拉梅问题的解

在地层深处的套管,其纵向变形受到限制,如果不考虑地应力沿纵深的变化(这种变化与应力本身相比是个小量),问题可以简化为平面应变问题。在讨论套管一类具有轴对称几何形状的结构应力时,采用极坐标是方便的。取几何对称中心 O 为坐标原点,平面内任一点的位置决定于距原点 O 的距离 r 和 Or 与固定在平面内的某一轴 Ox 之间的夹角 θ 。

在平面应变问题中,非零应力分量有 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 和 σ_z ;非零应变分量有 $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_{r\theta}$;非零位移分量有 u_r, u_θ 。这些量满足如下三类方程(王敏中,王炜,武际可,2002):几何方程

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

注意,这里采用张量剪应变,它是工程剪应变的 1/2。平衡方程(不考虑体积力)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

和本构方程

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \epsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

式中 E 和 ν 分别是材料的弹性模量和泊松比。在平面应变情况, $\epsilon_z = 0$, 从式(1.2.3)的第三式解出 σ_z , 并代入前两式, 本构方程可表示为

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta] \\ \epsilon_\theta = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

在极坐标下的应变协调方程是

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \epsilon_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \epsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.2.5)$$

将本构方程(1.2.4)代入应变协调方程(1.2.5), 得到应力协调方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta] + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left[(1-\nu) \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} - \nu \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right] \right\} - 2(1+\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \epsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.2.6)$$

在极坐标下的艾利(Airy)应力函数 $\Phi(r, \theta)$ 与应力分量的关系可写成

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (1.2.7)$$

将上式代入平衡方程(1.2.2),可验证平衡方程自动满足。将式(1.2.7)代入应变协调方程(1.2.6),即得

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.2.8)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1.2.9)$$

于是在平面应变问题中求解应力问题归结为求解满足双调和方程(1.2.8)的应力函数 Φ 。一旦 Φ 被求出,由式(1.2.7)可求出应力分量,进而由式(1.2.4)求出应变分量,由式(1.2.1)求出位移分量。

作为一个例子,现在讨论拉梅(Lame)问题。这是如图 1.2.1 所示的内外边界都受均布载荷的环内区域(厚壁圆筒),是一个轴对称问题。

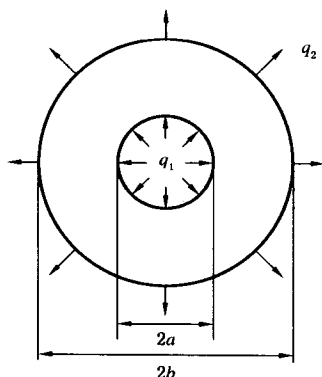


图 1.2.1

应力函数 Φ 与变量 θ 无关,这时方程(1.2.8)简化为

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \Phi = 0 \quad (1.2.10)$$

或者写成:

$$\Phi'''' + \frac{2}{r} \Phi''' - \frac{1}{r^2} \Phi'' + \frac{1}{r^3} \Phi' = 0 \quad (1.2.11)$$

方程的通解是

$$\Phi = A + B \ln r + Cr^2 + Dr^2 \ln r \quad (1.2.12)$$

式中 A, B, C, D 是待定常数。由于常数 A 不产生应力,又由于 $Dr^2 \ln r$ 项对应于多值位移,可取 $A=D=0$,因此

$$\Phi = B \ln r + Cr^2 \quad (1.2.13)$$

将上式代入式(1.2.7),得应力分量

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{B}{r^2} + 2C \\ \sigma_\theta = -\frac{B}{r^2} + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (1.2.14)$$

按照边界条件

$$\begin{cases} r = a, \sigma_r = -q_1, \tau_{r\theta} = 0 \\ r = b, \sigma_r = q_2, \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (1.2.15)$$

得到常数

$$\begin{cases} B = -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (q_1 + q_2) \\ C = \frac{a^2 q_1 + b^2 q_2}{2(b^2 - a^2)} \end{cases} \quad (1.2.16)$$

于是应力分量为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) q_1 + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) q_2 \\ \sigma_\theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) q_1 + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) q_2 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (1.2.17)$$

将应力分量代入本构方程(1.2.4)的第三式得应变分量

$$\varepsilon_\theta = \frac{1+\nu}{E} \left\{ \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - 2\nu + \frac{b^2}{r^2}\right) q_1 + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - 2\nu + \frac{a^2}{r^2}\right) q_2 \right\}$$

由几何方程(1.2.1)的第二式:

$$\begin{aligned} u &= u_r = r\varepsilon_\theta \\ &= \frac{(1+\nu)r}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - 2\nu)(a^2 q_1 + b^2 q_2) + \frac{a^2 b^2}{r^2} (q_1 + q_2) \right] \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

第三节 均匀原场地应力下的套管外挤力

现场实际表明,油水井投产后,套管的外挤力比完井时大得多,这是造成套管损坏的一个重要因素。含盐岩、泥岩和页岩的地层,在原场应力作用下,可以产生流变变形。在固井后套管抵抗井眼收缩而受到大致上不断增加的压力作用。在时间充分长之后,这个压力趋于稳定,称这个稳定压力为套管的地应力外挤力。虽然地应力引起的套管外挤力与地层的流变性质有关,但若不考虑过程而只求最后稳定外挤力,则可用弹性力学方法得到,因为流变问题的稳定解就是同一问题的弹性解(殷有泉,李志明,张广清,2004)。

套管的地应力外挤力主要涉及两个水平主应力。我们分别用 σ_H 和 σ_h 表示水平最大和最小主压应力的数值(即绝对值,它们本身取正值)。而水平主应力则是:

$$\sigma_1 = -\sigma_h, \sigma_2 = -\sigma_H \quad (1.3.1)$$

其中负号表示两个水平主应力均是压应力。在地层深处的套管,其纵向(z 方向)变形受到限制,如不考虑原场地应力沿纵向的变化(这种变化与原场应力大小相比是个小量),问题可以简化为平面应变问题。取如图 1.3.1 所示的地层—套管系统为研究对象。

设套管的外半径为 a , 内半径为 a_0 。远场边界用正方形表示, 能直观画出在边界上作用的主压应力, 在求解时将边界取为 $r=b$ 的圆周, 以便于在极坐标下表述远场边界条件。

本节首先考虑 $\sigma_H = \sigma_h$ 的情况。在石油工程中将它称为均匀地应力情况, 而 $\sigma_H > \sigma_h$ 则称为非均匀地应力情况。显然, 这种均匀性是指在方向上的, 而不是空间位置的。对于均匀地应力情况, 水平面内的所有方向都是主方向, 相应的主应力是相同的, 现记为 σ , 因此现在有

$$\sigma = \sigma_H = \sigma_h \quad (1.3.2)$$

图 1.3.1 现在变为图 1.3.2, 这时问题变成轴对称问题, 容易解析地求解。

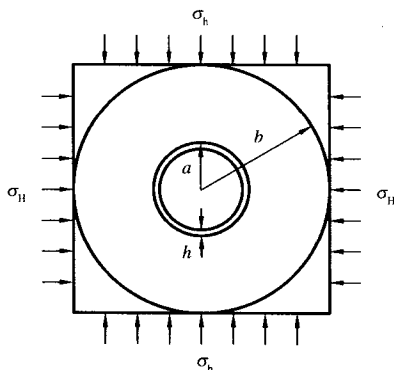


图 1.3.1 地层一套管系统

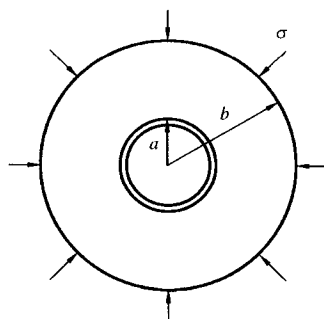


图 1.3.2 力学模型

研究均匀原地应力情况是有实际意义的。首先, 均匀地应力的结果可作为研究非均匀地应力情况的一个基础(详见本章第四节)。其次, 对某些老的地层, 由于地层的流变性质, 两个水平主应力的差异部分因年代久远而消失, 现代应力场接近于均匀状态。第三, 最先给出流变地层中套管外挤力, 并证明其稳定解就是弹性解的, 正是在均匀地应力条件下给出的(李志明, 张颜福, 殷有泉等, 1999)。

在使用图 1.3.2 所示的力学模型研究套管的地应力引起外挤力时, 要使用本章第二节拉梅问题的基本解式(1.2.17)和式(1.2.18)。

首先将拉梅问题基本解用于地层区域($a \leq r \leq b$)。在区域的外边界($r=b$)处, $\sigma_r = -\sigma$, 因而 $q_2 = -\sigma$; 在内边界($r=a$)处, $\sigma_r = s_1$, s_1 是套管外挤力, 目前是待定的, 规定它是代数值, 其计算结果为正则拉力, 为负则为压力。因此, $q_1 = s_1$ 。地层(stratum)的材料参数记为 E_s 和 ν_s 。于是由式(1.2.17)和式(1.2.18), 地层区域的应力和位移为

$$\begin{cases} \sigma_r^s(r) = -\frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) s_1 - \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sigma \\ \sigma_\theta^s(r) = -\frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) s_1 - \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sigma \end{cases} \quad (1.3.3)$$

$$u^s(r) = -\frac{(1 + \nu_s)r}{E_s(b^2 - a^2)} \left[(1 - 2\nu_s)(b^2\sigma + a^2s_1) + \frac{a^2b^2}{r^2}(\sigma + s_1) \right] \quad (1.3.4)$$

考虑到地层尺度 b 远大于套管尺度 a , 即 $b^2 \gg a^2$, 与 1 相比可略去 $\frac{a^2}{b^2}$ 项, 上面各式可简化为

$$\begin{cases} \sigma_r^s(r) = \frac{a^2}{r^2} s_1 - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sigma \\ \sigma_\theta^s(r) = -\frac{a^2}{r^2} s_1 - \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sigma \end{cases} \quad (1.3.5)$$

$$u^s(r) = -\frac{1+\nu_s}{E_s} r \left[\left(1 - 2\nu_s + \frac{a^2}{r^2}\right) \sigma + \frac{a^2}{r^2} s_1 \right] \quad (1.3.6)$$

取 $r=a$, 内边界位移为

$$u^s(a) = -\frac{(1+\nu_s)a}{E_s} [2(1-\nu_s)\sigma + s_1] \quad (1.3.7)$$

将拉梅基本解用于套管区域(外半径为 a , 内半径为 a_0), 这时在内边界 $r=a_0$, $\sigma_r(a_0)=q_1=0$; 在外边界 $r=a$, $\sigma_r(a)=q_2=s_1$ 。套管(Casing)的材料参数为 E_c, ν_c 。由式(1.2.17)和式(1.2.18), 套管应力和位移为

$$\begin{cases} \sigma_r^c(r) = \frac{a^2}{a^2 - a_0^2} \left(1 - \frac{a_0^2}{r^2}\right) s_1 \\ \sigma_\theta^c(r) = \frac{a^2}{a^2 - a_0^2} \left(1 + \frac{a_0^2}{r^2}\right) s_1 \end{cases} \quad (1.3.8)$$

$$u^c(r) = \frac{(1+\nu_c)r}{E_c(a^2 - a_0^2)} \left[(1 - 2\nu_c)a^2 + \frac{a_0^2 a^2}{r^2} \right] s_1 \quad (1.3.9)$$

设

$$m_c = \frac{a_0}{a} \quad (1.3.10)$$

式(1.3.8)和式(1.3.9)可改写为

$$\begin{cases} \sigma_r^c(r) = \frac{1}{1 - m_c^2} \left(1 - m_c^2 \frac{a^2}{r^2}\right) s_1 \\ \sigma_\theta^c(r) = \frac{1}{1 - m_c^2} \left(1 + m_c^2 \frac{a^2}{r^2}\right) s_1 \end{cases} \quad (1.3.11)$$

$$u^c(r) = \frac{(1+\nu_c)r}{E_c(1 - m_c^2)} \left[1 - 2\nu_c + m_c^2 \frac{a^2}{r^2} \right] s_1 \quad (1.3.12)$$

令 $r=a$, 得套管外边界的径向位移

$$u^c(a) = \frac{(1+\nu_c)a}{(1 - m_c^2)E_c} (1 - 2\nu_c + m_c^2) s_1 \quad (1.3.13)$$

最后, 由地层区域内边界和套管区域外边界的位移连续条件, 来确定 s_1 (套管外挤力) 的具体数值。地层与套管的位移连续条件是

$$u^s(a) = u^c(a) \quad (1.3.14)$$

由式(1.2.11)和式(1.2.15)有

$$\frac{(1+\nu_s)a}{E_s}[2(1-\nu_s)\sigma+s_1]+\frac{(1+\nu_c)a}{(1-m_c^2)E_c}(1-2\nu_c+m_c^2)s_1=0$$

从上式解出

$$s_1 = \frac{-2(1-\nu_s)\sigma}{1 + \frac{1}{1-m_c^2} \frac{1+\nu_c}{1+\nu_s} \frac{E_s}{E_c} (1-2\nu_c+m_c^2)} \quad (1.3.15)$$

由于 σ 是地层均匀原场地应力的数值,是正值,由式(1.3.15)表示的套管外挤力 s_1 是负值,因此套管受力为均布压力。

地层区域内边界和套管区域外边界的径向位移是连续的,径向应力也是连续的。这可由式(1.3.5)和式(1.3.8)的第一式看出 $\sigma_r^s(a)=\sigma_r^c(a)=s_1$ 。然而环向正应力却是间断的。实际上,在 $r=a$ 处地层和套管的环向正应力分别是

$$\begin{cases} \sigma_\theta^s(a) = -s_1 - 2\sigma \\ \sigma_\theta^c(a) = \frac{1+m_c^2}{1-m_c^2}s_1 \end{cases} \quad (1.3.16)$$

从式(1.3.15)看, s_1 和 σ 有相同的数量级,而 $\frac{1+m_c^2}{1-m_c^2}$ 与1相比是个较大的数,因而 $\sigma_\theta^c(a)$ 要比 $\sigma_\theta^s(a)$ 大得多。

在套管内侧($r=a_0$)的位移,可由式(1.3.12)令 $r=a_0$ 得到,它是

$$u^c(a_0) = \frac{2(1-\nu_c^2)}{1-m_c^2} \frac{s_1}{E_c} a_0 \quad (1.3.17)$$

在上式等号右端,

$$1-m_c^2 = (1-m_c)(1+m_c) \approx 2 \frac{h}{a} \quad (1.3.18)$$

其中 h 是套管壁厚。 $\frac{h}{a}$ 的数量级是 10^{-1} , $\frac{s_1}{E_c}$ 的数量级是 10^{-4} ,因而

$$u^c(a_0) \sim 10^{-3} a_0$$

而套管内径大约为100mm,这样,在地应力载荷作用下套管径向位移的数量级为0.1mm。在目前测井技术条件,它是很难被测到的。

第四节 非均匀原场地应力下的套管外挤力

对于处于非均匀应力状态的原场地应力(即原场应力),可用水平的大主压应力 σ_H 和小主压应力 σ_h 表征。这种应力状态可分解平均应力分量(球分量)和偏差分量(偏分量)两部分之和

$$\begin{bmatrix} \sigma_H & 0 \\ 0 & \sigma_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_H + \sigma_h) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\sigma_H + \sigma_h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \end{bmatrix}$$

这种分解如图 1.4.1 所示。

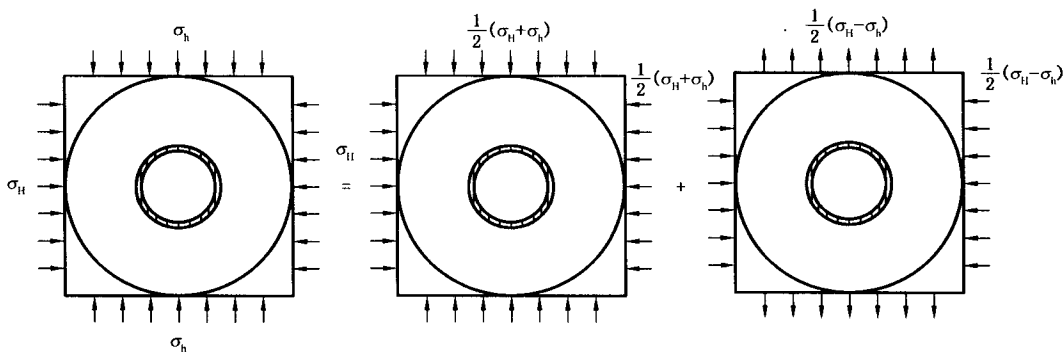


图 1.4.1 非均匀原场应力的分解

如果引用记号 σ 和 s ：

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_H + \sigma_h) \\ s = \frac{1}{2}(\sigma_H - \sigma_h) \end{cases} \quad (1.4.1)$$

不难建立在地层的远场大圆($r=b$)上的正应力和切应力分布的表达式(殷有泉, 励争, 邓成光, 2006):对原问题(非均匀原场应力):

$$\begin{cases} \sigma_r(b, \theta) = -\sigma - s \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta}(b, \theta) = s \cdot \sin 2\theta \end{cases} \quad (1.4.2)$$

对问题 A(平均原场应力):

$$\begin{cases} \sigma_r(b, \theta) = -\sigma \\ \tau_{r\theta}(b, \theta) = 0 \end{cases} \quad (1.4.3)$$

对问题 B(偏差原场应力):

$$\begin{cases} \sigma_r(b, \theta) = -s \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta}(b, \theta) = s \cdot \sin 2\theta \end{cases} \quad (1.4.4)$$

这样,求解非均匀原场应力的套管外挤力问题分解为两个比较简单的问题:在平均应力 σ 作用下的套管外挤力问题(问题 A)和在偏差应力 s 作用下的套管外挤力问题(问题 B)。在求出问题 A 和问题 B 的套管外挤力之后,将它们叠加就得到原来非均匀原场应力下的套管外挤力。

上述的将远场边界条件分解的方法,在处理弹性力学问题时是经常使用的,在解析地研究套管外挤力问题是房军最先提出的(房军,赵怀文,岳伯谦等,1995)。然而他们在推导基本解的位移公式有误,没有得到最后结果。

问题 A 实质上是一个在均匀应力条件下求套管外挤力的问题,只要按式(1.4.1),用 $\frac{1}{2}(\sigma_H + \sigma_h)$ 代替 σ ,就可由本章第三节的式(1.3.15)求得相应的套管外挤力

$$s_1 = - \frac{(1 - \nu_s)(\sigma_H + \sigma_h)}{1 + \frac{1}{1 - m_c^2} \frac{1 + \nu_c}{1 + \nu_s} \frac{E_s}{E_c} (1 - 2\nu_c + m_c^2)} \quad (1.4.5)$$

上式表示这个外挤力是一个均布压力。其中 E_s, E_c 分别是地层和套管材料的弹性模量, ν_s 和 ν_c 分别是地层和套管材料的泊松比, m_c 是套管内半径与外半径之比。

问题 B 是远场边界条件为式(1.4.4),在 $r=a_0$ (套管内侧)处的条件为

$$\begin{cases} \sigma_r(a_0, \theta) = 0 \\ \tau_{r\theta}(a_0, \theta) = 0 \end{cases} \quad (1.4.6)$$

的一个边值问题。在后文将证明在套管外侧和地层内侧,即 $r=a$,接触应力有如下形式:

$$\begin{cases} \sigma_r(a, \theta) = s_2 \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta}(a, \theta) = s_3 \sin 2\theta \end{cases} \quad (1.4.7)$$

实际上,式(1.4.7)就是作用在套管上的分布力。不过此时外挤力的径向分量(压力)不是均匀的,而且还有周向非均布分量(剪力)。在式中的 s_2 和 s_3 目前是待定的,假设它们是代数值[这与式(1.4.1)中定义的 s 不同, s 是已知的外力,它是算数值, $s>0$]。

对问题 B 的求解涉及两个不同材料区域:地层区域和套管区域。不能采用统一的应力函数,因跨过区域的交界($r=a$)周向正应力 σ_θ 发生间断(参考本章第三节)。因此需要在两个区域分别求解,再用应力连接条件(1.4.7)将两个区域的应力解联结起来。最后用两个区域的位移连续条件确定外挤力系数 s_2 和 s_3 ,从而得到问题 B 所对应的套管外挤力。

首先研究地层区域的应力分布。考虑到远场($r=b$)的边界条件(1.4.4)的形式,取应力函数为如下形式(王敏中,王炜,武际可,2002):

$$\Phi(r, \theta) = f(r) \cos 2\theta \quad (1.4.8)$$

式中 Φ 是双调和函数,应满足应力调和方程,因此待定函数 $f(r)$ 应满足方程:

$$f'''' + \frac{2}{r} f''' - \frac{9}{r^2} f'' + \frac{9}{r^3} f' = 0 \quad (1.4.9)$$

这是一个四阶欧拉型常微分方程,其通解可写为

$$f(r) = A \left(\frac{r}{a} \right)^2 + B \left(\frac{a}{r} \right)^2 + C \left(\frac{r}{a} \right)^4 + D \quad (1.4.10)$$

用上式表示的通解使其中的待定常数 A, B, C, D 有相同的量纲。应力分量可用应力函数