



GAOZHONG XINKEBIAO DAOXUE DAOLIAN

主编 沈新权 毛伟民



必修5 · 必修2 · 人教版

数学

高一 下

高中新课标

导学导练

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中新课标导学导练. 数学. 高一. 下 /《高中新课标导学导练》编委会编. —杭州: 浙江教育出版社, 2007

配人教版

ISBN 978-7-5338-6922-9

I. 高... II. 高... III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 024970 号

主 编 沈新权 毛伟民
编 写 钟董甫 吴文尧
洪鲁平 徐存旭
叶 鹏 王德明

高中新课标导学导练·数学 高一下

责任编辑	胡 星	装帧设计	曾国兴
责任校对	汪 晖	责任印务	吴梦菁

- 出版发行 浙江教育出版社
(杭州市天目山路 40 号 邮编: 310013)
 - 图文制作 杭州富春电子印务有限公司
 - 印 刷 富阳美术印刷有限公司
 - 开 本 787 × 1092 1/16
 - 印 张 15.5
 - 字 数 350 000
 - 版 次 2007 年 2 月第 1 版
 - 印 次 2007 年 2 月第 1 次印刷
 - 印 数 0 001—8 000
 - 标准书号 ISBN 978-7-5338-6922-9
 - 定 价 17.00 元
-

联系电话: 0571-85170300-80928

e-mail: zjjy@zjcb.com

网址: www.zjeph.com

编写说明

Foreword

2006年秋季,普通高中课程标准实验教科书开始在浙江省全面推广使用。为了贯彻落实教育部《普通高中课程方案(实验)》和省教育厅《浙江省普通高中新课程实验第一阶段工作方案》等文件精神,配合教学需要,我们邀请省内部分资深教研员和具有丰富教学经验的一线教师共同编写了这套“高中新课标导学导练”丛书,包括语文、英语、数学、思想政治、历史、地理、物理、化学、生物等九门主要学科。

本丛书依据普通高中各学科课程标准,按学期教学要求分册编写,与相应学科教科书完全同步。本册《高中新课标导学导练·数学(高一下)》(必修5·必修2·人教版)按课时内容编排,设置“学习导引”、“典题解读”、“延伸拓展”、“随堂练习”等栏目,每章后设单元练习,每个模块后设两份评价练习。为了方便自学,书后附全书习题的标准答案及难题解答提示。

本丛书编排、设计新颖,集知识性、趣味性于一体,注重培养学生的思维能力和创新能力,有助于学生巩固知识、开发智力,提高学习效率和学习能力。

本丛书的编写,得到了宁波市教育局教研室、嘉兴市教育局教研室、台州市教育局教研室、丽水市教育局教研室、杭州市萧山区教育局教研室、富阳市教育局教研室、上虞市教育局教研室等单位领导和学科教研员的大力支持,同时也得到了杭州学军中学、嘉兴一中、宁波效实中学、湖州中学、丽水中学、丽水学院附中、青田中学、台州一中、桐乡高级中学、海宁高级中学、温岭中学、衢州一中、衢州二中、衢州三中、温州中学、绍兴鲁迅中学等名校名师的鼎力相助,在此表示衷心的感谢。

丛书编委会

2007年1月

目 录

Contents

必修 5

第一章 解三角形	1
1.1 正弦定理和余弦定理	1
1.1.1 正弦定理	1
1.1.2 余弦定理	5
1.2 应用举例	8
1.3 实习作业	11
单元练习	15
第二章 数列	17
2.1 数列的概念与简单表示法(一)	17
2.1 数列的概念与简单表示法(二)	19
2.2 等差数列(一)	22
2.2 等差数列(二)	24
2.3 等差数列的前 n 项和	27
2.4 等比数列(一)	30
2.4 等比数列(二)	33
2.5 等比数列的前 n 项和	35
单元练习	38
第三章 不等式	40
3.1 不等关系与不等式(一)	40
3.1 不等关系与不等式(二)	43
3.2 一元二次不等式及其解法(一)	46
3.2 一元二次不等式及其解法(二)	50
3.2 一元二次不等式及其解法(三)	54
3.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题	58

3.3.1 二元一次不等式(组)与平面区域(一)	58
3.3.1 二元一次不等式(组)与平面区域(二)	62
3.3.2 简单的线性规划问题(一)	66
3.3.2 简单的线性规划问题(二)	71
3.4 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (一)	75
3.4 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (二)	79
单元练习	83
必修5 模块练习(A)	86
必修5 模块练习(B)	89

必修 2

第一章 空间几何体	92
1.1 空间几何体的结构	92
1.1.1 柱、锥、台、球的结构特征	92
1.1.2 简单组合体的结构特征	98
1.2 空间几何体的三视图和直观图	101
1.2.1 中心投影与平行投影	101
1.2.2 空间几何体的三视图	101
1.2.3 空间几何体的直观图	106
1.3 空间几何体的表面积与体积	110
1.3.1 柱体、锥体、台体的表面积与体积	110
1.3.2 球的体积和表面积	114
单元练习	117
第二章 点、直线、平面之间的位置关系	120
2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系	120
2.1.1 平面	120
2.1.2 空间中直线与直线之间的位置关系	123
2.1.3 空间中直线与平面之间的位置关系	126
2.1.4 平面与平面之间的位置关系	128
2.2 直线、平面平行的判定及其性质	131
2.2.1 直线与平面平行的判定	131

2.2.2	平面与平面平行的判定	134
2.2.3	直线与平面平行的性质	137
2.2.4	平面与平面平行的性质	139
2.3	直线、平面垂直的判定及其性质	142
2.3.1	直线、平面垂直的判定	142
2.3.2	平面与平面垂直的判定	145
2.3.3	直线与平面垂直的性质	148
2.3.4	平面与平面垂直的性质	150
	单元练习	153

第三章 直线与方程 156

3.1	直线的倾斜角与斜率	156
3.1.1	倾斜角与斜率	156
3.1.2	两条直线平行与垂直的判定	159
3.2	直线的方程	163
3.2.1	直线的点斜式方程	163
3.2.2	直线的两点式方程	166
3.2.3	直线的一般式方程	169
3.3	直线的交点坐标与距离公式	173
3.3.1	两条直线的交点坐标	173
3.3.2	两点间的距离	177
3.3.3	点到直线的距离	180
3.3.4	两条平行直线间的距离	180
	单元练习	184

第四章 圆与方程 187

4.1	圆的方程	187
4.1.1	圆的标准方程	187
4.1.2	圆的一般方程	190
4.2	直线、圆的位置关系	193
4.2.1	直线与圆的位置关系	196
4.2.2	圆与圆的位置关系	198
4.2.3	直线与圆的方程的应用	201
4.3	空间直角坐标系	205
4.3.1	空间直角坐标系	205
4.3.2	空间两点间的距离公式	209

单元练习	212
必修 2 模块练习(A)	215
必修 2 模块练习(B)	218
参考答案	221

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

►学习导引

【知识梳理】

在 $\triangle ABC$ 中,各边和它所对角的正弦的比相等,即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径.

【重点难点】

重点:正弦定理及其推导过程,正弦定理的运用.

难点:运用正弦定理理解斜三角形.

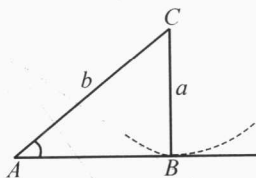
【创新学法】

利用正弦定理,可以解决如下三类问题:(1)已知两角和任一边,求其他两边和一角;(2)已知两边及其中一边的对角,求另一边的对角及其他的边和角;(3)判断三角形的形状.

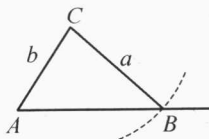
【易错警示】

已知两边和其中一边的对角,在求解三角形时,可能出现一解、两解或无解的情况,如:已知 a, b 及 A 作三角形,其解的情况如下:

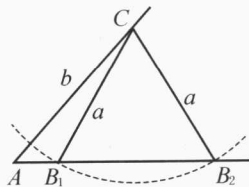
(1)当 A 为锐角时,若 $a = b \sin A$,则可作一个三角形如图 1-1①;



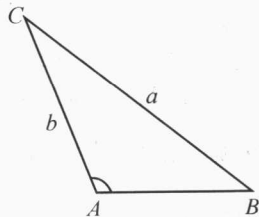
①



②



③



④

图 1-1

若 $a \geq b$, 则有一解, 如图 1-1②; 若 $b \sin A < a < b$, 则有两解, 如图 1-1③.

(2) 当 A 为直角或钝角时, 若 $a > b$, 则有一解, 如图 1-1④; 若 $a \leq b$, 则无解.

► 典题解读

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A=30^\circ, C=105^\circ, a=10$, 求 b, c .

解 $\because A=30^\circ, C=105^\circ, \therefore B=45^\circ$.

根据正弦定理, $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 10\sqrt{2}, c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{10 \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$.

评注 正弦定理可以用于解决已知两角和任一边, 求其他两边和一角的问题.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=4, b=4\sqrt{2}, B=45^\circ$, 求角 A .

解 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $a < b$, $\therefore A$ 为锐角, 即 $A=30^\circ$.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=2, c=\sqrt{6}, A=45^\circ$, 解三角形.

解 $\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore C=60^\circ$ 或 120° .

$\therefore$ 当 $C=60^\circ$ 时, $B=75^\circ, b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{6} \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3} + 1$;

当 $C=120^\circ$ 时, $B=15^\circ, b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{6} \sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3} - 1$.

$\therefore b = \sqrt{3} + 1, B=75^\circ, C=60^\circ$ 或 $b = \sqrt{3} - 1, B=15^\circ, C=120^\circ$.

评注 正弦定理也可用于解决已知两边及其中一边的对角, 求另一边的对角和其他边和角的问题.

► 延伸拓展

例 4 已知在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 请给出正弦定理证明的多种探索.

解 探索 1: (1) 若 C 为直角, 结论显然成立;

(2) 若 C 为锐角 (如图 1-2①), 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 则 $\sin B = \frac{AD}{c}, \sin C = \frac{AD}{b}$, 则 $c \sin B = b \sin C$, 即 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. 同理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

(3) 若 C 为钝角 (如图 1-2②), 过点 A 作 $AD \perp BC$, 交 BC 的延长线于点

D , 则 $\sin B = \frac{AD}{c}, \sin C = \sin(180^\circ - C) =$

$\frac{AD}{b}$. 同理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \therefore \frac{a}{\sin A}$

$= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

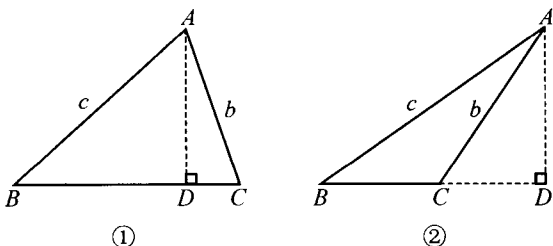


图 1-2

综上所述,结论成立.

探索 2: 建立如图 1-3 所示的平面直角坐标系, 则有 $A(c\cos B, c\sin B)$, $C(a, 0)$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B$. 同理, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A$, 即 $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$.

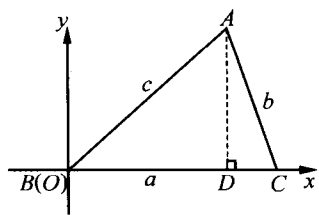


图 1-3

探索 3: 在 $\triangle ABC$ 中, 有 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. 设 C 为最大角, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D (如图 1-4), 于是 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$. 设 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的夹角为 α , 则 $0 = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(90^\circ + B) + |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos \alpha$, 其中, 当 C 为锐角或直角时, $\alpha = 90^\circ - C$; 当 C 为钝角时, $\alpha = C - 90^\circ$.

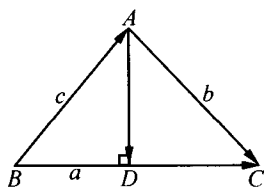


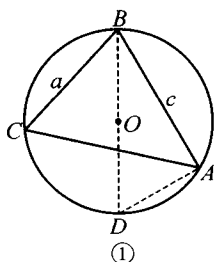
图 1-4

故可得 $c\sin B - b\sin C = 0$, 即 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

同理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$. 因此 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

探索 4: 设 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 直径 $BD = 2R$.

(1) 如图 1-5①, 当 C 为锐角时, 连结 AD , 则 $\angle BAD = 90^\circ$, $c = 2R\sin D$. 又 $D = C$, 即得 $c = 2R\sin C$;



(2) 如图 1-5②, 当 C 为钝角时, 连结 AD , 则 $\angle BAD = 90^\circ$, $c = 2R\sin D$. 又 $C + D = 180^\circ$, 可得 $\sin D = \sin(180^\circ - A) = \sin A$, 即得 $c = 2R\sin A$;

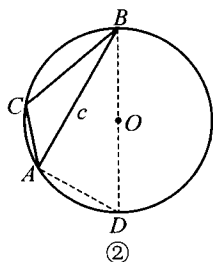


图 1-5

(3) 当 C 为直角时, $c = 2R$, 显然有 $c = 2R\sin C$.

同理可证 $b = 2R\sin B$, $a = 2R\sin A$. $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

评注 (1) 三角形的各边与其所对角的正弦之比是一个定值, 这个定值就是三角形外接圆的直径.

(2) 由此可得到正弦定理的变形形式: ① $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$; ② $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$; ③ $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$.

随堂练习

- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sqrt{3}a = 2b\sin A$, 则角 B 的度数为 ()
(A) 60° (B) 30° (C) 60° 或 120° (D) 30° 或 150°
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A < \sin B$ 是 $A < B$ 的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B 的对边分别为 a, b ,且 $A=60^\circ, a=\sqrt{6}, b=4$,那么满足条件的三角形()
(A) 有一个 (B) 有两个 (C) 不存在 (D) 不能确定
4. 若三角形三内角之比为 $1:2:3$,则这个三角形的三边之比为_____.
5. 在 $\triangle ABC$ 中,若角 A, B, C 满足 $2B=A+C$,且边 $b=2$,则此三角形的外接圆半径为_____.
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $A=105^\circ, B=30^\circ, a=\frac{\sqrt{6}}{2}$,求角 B 的平分线 BD 的长.
7. 求证:在 $\triangle ABC$ 中, $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$.
8. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.
9. 根据下列条件,判断 $\triangle ABC$ 有没有解.若有解,判断解的个数;若无解,请说明理由.
(1) $a=5, b=4, A=120^\circ$,求 B ;
(2) $a=5, b=4, A=90^\circ$,求 B ;
(3) $a=10\sqrt{6}, b=20\sqrt{3}, A=45^\circ$,求 B ;
(4) $a=20\sqrt{2}, b=20\sqrt{3}, A=45^\circ$,求 B ;

(5) $a=4, b=\frac{10\sqrt{3}}{3}, A=60^\circ$, 求 B .

1.1.2 余弦定理

► 学习导引

【知识梳理】

余弦定理: 三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍. 即设三角形 ABC 的三边长分别为 a, b, c , 它们的对应角为 A, B, C , 则 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

【重点难点】

重点: 余弦定理及其推导过程, 余弦定理的运用.

难点: 运用正弦定理和余弦定理解斜三角形.

【创新学法】

利用余弦定理可以解决以下三类三角形问题: (1) 已知三角形三边求角; (2) 已知两边和它们的夹角, 求第三边; (3) 判断三角形的形状.

【易错警示】

注意正弦定理与余弦定理是相通的, 凡是能用正弦定理理解的三角形, 用余弦定理也能解. 反之亦然, 只不过选用不同的定理其繁简程度不同.

► 典题解读

例1 在 $\triangle ABC$ 中, (1) 已知 $b=3, c=1, A=60^\circ$, 求 a ; (2) 已知 $a=4, b=5, c=6$, 求 A (精确到 0.1°).

解 (1) 由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 3^2 + 1^2 - 2 \times 3 \times 1 \times \cos 60^\circ = 7$,
 $\therefore a = \sqrt{7}$.

(2) 由余弦定理, 得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 6} = 0.75$, $\therefore A \approx 41.4^\circ$.

评注 已知三角形的两边及它们的夹角求第三边, 或者已知三角形的三边求角的问题

题,可用余弦定理加以解决.

例 2 用余弦定理证明:在 $\triangle ABC$ 中,当 C 为锐角时, $a^2+b^2>c^2$;当 C 为钝角时, $a^2+b^2<c^2$.

证明 当 C 为锐角时, $\cos C>0$,由余弦定理,得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C<a^2+b^2$,即 $a^2+b^2>c^2$.同理,当 C 为钝角时, $a^2+b^2<c^2$.

例 3 已知关于 x 的方程 $x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$ 的两根之积等于两根之和,其中 A, B 为 $\triangle ABC$ 的两内角, a, b 为其对应的边,试判定这个三角形的形状.

分析 要判定三角形的形状,只需将题目中隐含的边角关系转化为边之间或角之间的关系即可.

解法 1 设方程的两根为 x_1, x_2 ,由韦达定理知 $x_1+x_2=b\cos A, x_1x_2=a\cos B$.

则 $b\cos A=a\cos B$.代入余弦定理得:

$$b \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = a \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad \therefore b^2+c^2-a^2=a^2+c^2-b^2, \text{化简得 } a=b.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

解法 2 仿解法 1 得 $b\cos A=a\cos B$.由正弦定理得 $2R\sin B\cos A=2R\sin A\cos B$,

即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=0, \therefore \sin(A-B)=0$.

$\therefore A, B$ 为 $\triangle ABC$ 的内角, $\therefore 0<A<\pi, 0<B<\pi$,

$\therefore A-B=0$,即 $A=B$.故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

评注 由三角形的边角关系判定三角形的形状,基本思路是利用正弦定理和余弦定理进行边角变换,或全化为边的关系,或全化为角的关系,然后利用简单的平面几何知识求解即可.

► 延伸拓展

例 4 设 P 是正方形 $ABCD$ 内部的一点,若点 P 到顶点 A, B, C 的距离分别是 $1, 2, 3$,求正方形 $ABCD$ 的边长.

分析 应从余弦定理入手列方程,来求出边长.

解 设边长为 x ($1<x<3$), $\angle ABP=\alpha$, 则 $\angle CBP=90^\circ-\alpha$.

$$\text{在}\triangle ABP\text{中,由余弦定理得 } \cos\angle ABP = \frac{x^2+2^2-1^2}{2 \cdot 2x} = \frac{x^2+3}{4x} \quad \text{①},$$

$$\text{在}\triangle CBP\text{中,由余弦定理得 } \cos\angle CBP = \frac{x^2+2^2-3^2}{2 \cdot 2x} = \frac{x^2-5}{4x} \quad \text{②},$$

$$\text{①}^2+\text{②}^2, \text{得 } \left(\frac{x^2+3}{4x}\right)^2 + \left(\frac{x^2-5}{4x}\right)^2 = 1, \text{设 } x^2=t, \text{由 } \cos\angle CBP>0, \text{得 } t>5.$$

$$\text{由 } (t+3)^2 + (t-5)^2 = 16t, \text{解得 } t_1=5+2\sqrt{2}(\text{舍去}), t_2=5-2\sqrt{2}.$$

$\therefore$ 边长为 $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

评注 解题时要善于运用方程思想,列方程求未知数.

► 随堂练习

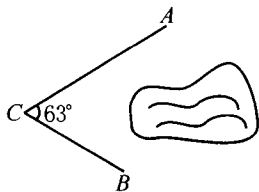
1. 若 $\triangle ABC$ 三边 a, b, c 之比依次为 $5:7:8$,则最大角与最小角的和是()

- (A) $\frac{5\pi}{6}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{7\pi}{12}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b=4\sqrt{3}$, $c=2\sqrt{3}$, $A=120^\circ$,则 a 等于()
 (A) $2\sqrt{21}$ (B) 6 (C) $2\sqrt{21}$ 或6 (D) $2\sqrt{15+6\sqrt{3}}$
3. 若三个三角形的三边长分别如下:①3,5,7;②10,24,26;③21,25,28.则这三个三角形中锐角三角形、直角三角形、钝角三角形的顺序依次是()
 (A) ①②③ (B) ③②① (C) ③①② (D) ②③①
4. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a^2+b^2<c^2$,且 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则角 C 的度数是_____.
5. 若在 $\triangle ABC$ 中, $b=8$, $c=3$, $\cos A=\frac{3}{16}$,则此三角形的形状为_____.
6. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $a=3$, $b=4$, $c=\sqrt{37}$,求该三角形的最大内角.

7. 已知: AM 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线.求证: $AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}$.

8. 已知 A, B 两地之间隔着一个水塘,现选择另一点 C ,测得 $AC=182$ m, $BC=126$ m, $\angle ACB=63^\circ$,求 A, B 两地之间的距离(精确到1 m).



(第8题)

9. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $BC=15$, $AB:AC=7:8$, $\sin B=\frac{4}{7}\sqrt{3}$,求 BC 边上的高.

1.2 应用举例

►学习导引

【知识梳理】

1. 三角形面积公式:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B.$$

2. 正弦定理的变形:(1) $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$;

(2) $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$; (3) $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$.

3. 余弦定理的变形: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

【重点难点】

重点和难点:利用正弦、余弦定理及其变形形式解斜三角形.

【创新学法】

1. 应用正弦、余弦定理可以实现将“边、角相混合”的等式转化为“边、角单一”的形式.

2. 在较为复杂的图形中求边或角,首先要找出有关的三角形,再合理使用正弦定理或余弦定理解决.

【易错警示】

1. 正弦、余弦定理是解三角形的有力工具,要区别两个定理的不同作用,在解题时正确选用.

2. 必要时要与三角形面积和三角形外接圆直径联系在一起.

►典题解读

例1 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $c=4$,内角 $A=45^\circ$, $B=75^\circ$,求三角形的周长.

分析 根据三角形内角和为 180° ,可先求得角 C ,再根据正弦定理求出 a 和 b ,即可求得三角形周长 l .

解 $\because A+B+C=180^\circ, \therefore C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$.

根据 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$,得 $a = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{4}{\sin 60^\circ} \cdot \sin 45^\circ = \frac{4}{3}\sqrt{6}$,

根据 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ 得 $b = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin B = 2\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

$\therefore \triangle ABC$ 周长 $l = a + b + c = 4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$.

评注 求 b 也可以用余弦定理,但运算较繁复.

例 2 已知圆 O 的半径为 R , 在它的内接 $\triangle ABC$ 中, 有 $2R(\sin^2 A - \sin^2 C) = (\sqrt{2}a - b)\sin B$ 成立, 求角 C 的大小.

分析 观察已知等式的结构特征, 用正弦定理将角转化为边即可.

解 由题意得: $(2R)^2(\sin^2 A - \sin^2 C) = (\sqrt{2}a - b) \cdot 2R\sin B$,

由正弦定理, 得 $a^2 - c^2 = \sqrt{2}ab - b^2$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$,

再由余弦定理, 得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}ab}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore C = \frac{\pi}{4}$.

评注 本题由 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$, 联想余弦定理求得 $C = \frac{\pi}{4}$ 是解题的关键. 类似地, 可由 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ 推得 $C = \frac{\pi}{3}$, 由 $a^2 + b^2 + c^2 = \sqrt{3}ab$ 推得 $C = \frac{\pi}{6}$. 熟记这些结论, 可以快速解题.

例 3 如图 1-6, 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AD \perp CD$, $AD = 10$, $AB = 14$, $\angle BDA = 60^\circ$, $\angle BCD = 135^\circ$, 求 BC 的长.

解 在 $\triangle ABD$ 中, 设 $BD = x$.

由余弦定理得 $14^2 = x^2 + 10^2 - 2 \cdot 10x \cdot \cos 60^\circ$,

$\therefore x^2 - 10x - 96 = 0$,

解得 $x_1 = 16$, $x_2 = -6$ (舍去).

由正弦定理, 得 $\frac{BC}{\sin \angle CDB} = \frac{BD}{\sin \angle BCD}$, 即 $BC = \frac{16}{\sin 135^\circ} \cdot \sin 30^\circ = 8\sqrt{2}$.

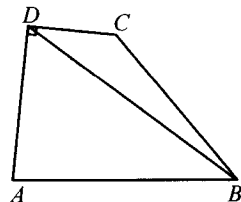


图 1-6

► 延伸拓展

例 4 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a \cos A + b \cos B = c \cos C$, 试判断三角形的形状.

分析 判断三角形的形状, 可以根据三角形的边长或内角之间的关系来判断. 本例已知条件为边角关系, 故可由正弦定理或余弦定理, 统一成角或边的关系, 从而判断三角形的形状.

解法 1 由正弦定理, 设 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k > 0$,

将 $a = k \sin A$, $b = k \sin B$, $c = k \sin C$, 代入已知条件得

$k \sin A \cos A + k \sin B \cos B = k \sin C \cos C$, 即 $\sin A \cos A + \sin B \cos B = \sin C \cos C$.

根据二倍角公式, 得 $\sin 2A + \sin 2B = \sin 2C$,

即 $\sin[(A+B) + (A-B)] + \sin[(A+B) - (A-B)] = 2 \sin C \cos C$,

展开整理, 得 $2 \sin(A+B) \cos(A-B) = 2 \sin C \cos C$.

代入 $C = \pi - (A+B)$, 得 $\cos(A-B) + \cos(A+B) = 0$,

即 $2 \cos A \cos B = 0$, 得 $\cos A = 0$, 或 $\cos B = 0$, 即 $A = 90^\circ$, 或 $B = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

解法 2 由余弦定理,

$$\text{得 } a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + c \cdot \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2ab} = 0,$$

$$\text{即 } a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(c^2 - a^2 - b^2) = 0,$$

$$\text{展开整理得 } (a^2 - b^2)^2 = c^4, \therefore a^2 - b^2 = \pm c^2, \text{ 即 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 或 } b^2 = a^2 + c^2,$$

根据勾股定理知 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

评注 若等式两边是关于三角形的边或内角的正弦函数的齐次式,则可以根据正弦定理互相转化. 如 $a \sin A + b \sin B = c \sin C \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$.

► 随堂练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$, $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则此三角形中最小角的度数是()
(A) 60° (B) 30° (C) 45° (D) 15°
2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 相对应的边分别为 a, b, c , 则 $a \cos B + b \cos A$ 等于()
(A) $2 \cos C$ (B) $2 \sin C$ (C) $\frac{a+b}{2}$ (D) c
3. 在钝角 $\triangle ABC$ 中, 若三边长是连续的三个自然数, 则这样的三角形()
(A) 不存在 (B) 有无数个 (C) 仅有一个 (D) 仅有两个
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=5, b=3, C=120^\circ$, 则 $\sin A =$ _____.
5. 已知 $\triangle ABC$ 的两边 a, b 分别是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两根, 若 $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 则第三边 c 的长是_____.
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a \cos A = b \cos B$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.
7. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $B=30^\circ, b=2, c=2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.